
ISBN 9978-310-31-2
ISBN 978-9978-310-31-1





ICM
Instituto de Ciencias Matemáticas



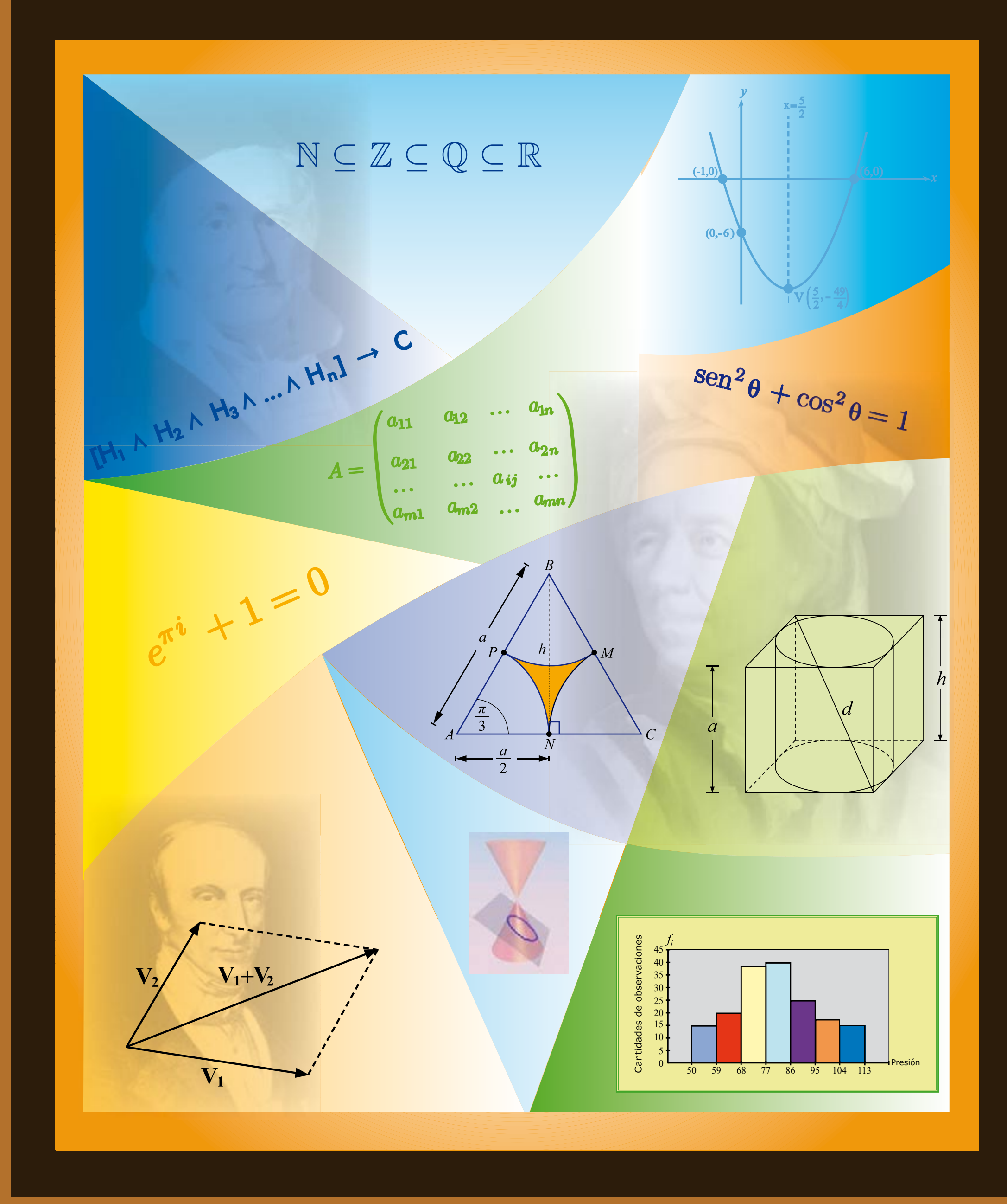
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS
Para Bachillerato

ICM

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

Para Bachillerato

ESPOL



LÓGICA-NÚMEROS-FUNCIONES-TRIGONOMETRÍA-MATRICES-GEOMETRÍA PLANA
GEOMETRÍA DEL ESPACIO-VECTORES-GEOMETRÍA ANALÍTICA-ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES




ICM
ESPOL
POLITECNICA DEL LITORAL
ESPOL

Segunda Edición - Mayo 2006
Derechos del Autor No. 024094-IEPI
ISBN-9978-310-34-7

Distribución:
ICM-ESPOL
Campus Gustavo Galindo, Km. 30.5 Vía Perimetral
Teléfonos: (593-4) 2269525-2269526
Telefax: (593-4) 2853138
e-mail: icm@espol.edu.ec
www.icm.espol.edu.ec

Impresión:
Impreso en Ecuador/ Printed in Ecuador



Guayaquil - Ecuador



Prólogo

El Instituto de Ciencias Matemáticas, ICM, de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, responsable de la enseñanza de una de las ciencias básicas del conocimiento humano, tiene como parte de su Misión: "Definir lineamientos y elevar el nivel de la Educación Matemática en el país"; consecuente con este principio, ha creído conveniente diseñar y desarrollar el presente texto, como un apoyo dirigido a los estudiantes del Bachillerato. Este libro revisa temas básicos de nivel secundario y, por su amplitud y profundidad, constituye una guía necesaria dentro de su proceso de aprendizaje.

El presente texto ha sido estructurado de tal manera que sea de fácil lectura y comprensión, asequible para estudiantes de colegios que requieran fortalecer su formación matemática, preparándose así para enfrentar los retos que la vida universitaria les depare.

Los profesores podrán encontrar una ayuda didáctica en la organización y el contenido de sus clases, de tal manera que se logre homogeneidad en la simbología y lenguaje matemáticos utilizados. Además, el colorido de sus páginas facilita la visualización de los capítulos y temas tratados.

Los ejercicios resueltos tienen como objetivo que el estudiante profundice sus conocimientos conforme los va adquiriendo y han sido desarrollados de manera tal que progresivamente se los aplique, empezando por lo más elemental, hasta llegar a lo más complejo. Adicionalmente, la orientación del texto fomenta la investigación de los temas tratados, avanzando así en el conocimiento hacia su consolidación.

La cristalización de esta obra se debe a la calidad académica de un equipo de profesores del ICM, integrado por los ingenieros Miriam Ramos, Guillermo Baquerizo y Soraya Solís, quienes con tesón, esfuerzo y largas horas de trabajo plasmaron este texto.

En esta era de continuo cambio tecnológico, las Matemáticas son más importantes que nunca. Cuando los estudiantes terminen sus estudios de Bachillerato, el uso de las Matemáticas en la etapa universitaria y luego en su trabajo y en la vida diaria les permitirá operar equipos de computación, planificar horarios y programas, leer e interpretar datos, comparar precios, administrar finanzas personales y ejecutar otros trabajos de resolución de problemas sobre cualquier tema. Todo lo que se aprenda en Matemáticas y la manera en que se adquiera ese conocimiento, le proporcionará a los estudiantes de nuestro país una satisfacción personal y una excelente preparación para afrontar un futuro exigente y en constante cambio.





REPUBLICA DEL ECUADOR
MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
DIRECCIÓN NACIONAL DE ASESORIA JURIDICA

No. 443

EL MINISTRO DE EDUCACIÓN Y CULTURA

CONSIDERANDO:

QUE la Ley Orgánica de Educación en su Art. 12 expresa que el ciclo diversificado procura la preparación interdisciplinaria que permita la integración del alumno a las diversas manifestaciones del trabajo y la continuación de los estudios en el ciclo post bachillerato o en el nivel superior, atendiendo a los requerimientos del desarrollo social y económico del país y a las diferencias y aspiraciones individuales.

QUE con Oficio MAT 0580 - 2006, de fecha 19 de julio de 2006, el Ing. Washington Armas C., Director del Instituto de Ciencias Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, solicita el aval de esta Cartera de Estado, para la obra "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA EL BACHILLERATO".

QUE dentro de las funciones de Dirección Nacional de Currículo determinadas en el Art. 62 literal l) del Reglamento Orgánico Funcional, publicado en el Registro Oficial No. 983 de 8 de julio de 1996, consta la de"Aprobar y evaluar las propuestas que en materia educativa y cultural se desarrollen específicamente en el campo del sistema no escolarizado, educación básica, bachillerato, y post-bachillerato".

QUE con Memorando No. 135 DINCU-06 de fecha 31 de julio del 2006 la Dirección Nacional de Currículo emite informe técnico favorable respecto del Libro "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA BACHILLERATO", producida por la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

QUE es política de Estado el velar por el mejoramiento de la calidad de la educación, y el Ministerio de Educación y Cultura, debe proporcionar a estudiantes y docentes del bachillerato obras que aporten significativamente a la mejor formación de los bachilleres de todas las modalidades y especializaciones.

EN USO de sus atribuciones que le confieren el numeral 6 del Art. 179 de la Constitución política del Estado y el literal f) del Art. 29 del Reglamento General de la Ley Orgánica de Educación,

---




REPUBLICA DEL ECUADOR
MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
DIRECCIÓN NACIONAL DE ASESORIA JURIDICA

ACUERDA:

Art. 1 DECLARAR al libro "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA BACHILLERATO" del Instituto de Ciencias Matemáticas de la ESPOL como obra de consulta de alto valor científico y pedagógico para el primero, segundo y tercer años de bachillerato (cuarto, quinto y sexto cursos).

Art. 2 RECOMENDAR que todas las instituciones educativas de segunda enseñanza del país, incorporen en sus bibliotecas el libro "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA BACHILLERATO" para ser utilizado por docentes y estudiantes.

COMUNÍQUESE Y PUBLÍQUESE.- En la ciudad de San Francisco de Quito, Distrito Metropolitano, a 12 SET. 2006

Raúl Vallejo Corral
MINISTRO DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA DESPACHO SR. MINISTRO ECUADOR

MOG/SM
12-09-2006

Dirección: San Salvador E6-49 y Eloy Alfaro



Agradecimientos

A las autoridades de la ESPOL.

A los directivos del ICM.

Al aporte significativo de las señoritas estudiantes Janett Loja y Evelyn Peña, como responsables del proceso de digitalización de la información.

Dedicatoria

A los estudiantes de Bachillerato que requieren profundizar sus conocimientos matemáticos y forjar las bases necesarias para acceder con paso firme al nivel superior de estudios.

Tabla de Contenido

CAPÍTULO 2

NÚMEROS REALES

CAPÍTULO 3

FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

CAPÍTULO 4

TRIGONOMETRÍA

CAPÍTULO 5

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES.

CAPÍTULO 6

NÚMEROS COMPLEJOS

CAPÍTULO 7

GEOMETRÍA PLANA

CAPÍTULO 8

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

CAPÍTULO 9

VECTORES EN EL ESPACIO

CAPÍTULO 10

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO 11

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

Introducción

Para que se pueda tener una idea global de esta obra, a continuación se presenta un enfoque panorámico de sus componentes.

El material del libro incluye:

Tabla de Contenido: Representa el detalle del índice temático de esta obra, para que el lector pueda ubicar de manera rápida los tópicos de su interés.

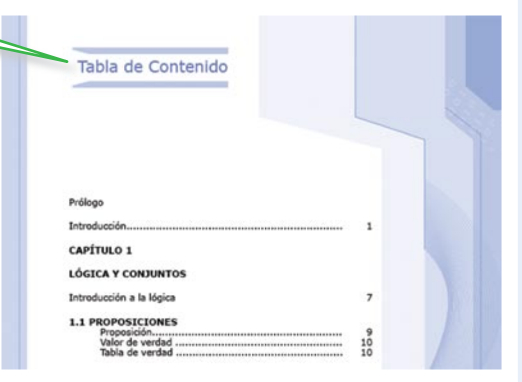


Tabla de Contenido

Once Capítulos: Los cuales han sido seleccionados en base a las exigencias actuales del conocimiento que debe adquirir un estudiante del bachillerato. Cada capítulo se puede diferenciar del resto, ya que se han utilizado colores distintos.

Glosario de Términos: Contiene el significado de expresiones que se utilizan en este texto, con el propósito de no dejar dudas o imprecisiones.

Glosario de términos

Axioma: Proposición o enunciado que se considera evidente y no requiere demostración.

Certeza: Seguridad en el conocimiento; adhesión firme del sujeto al contenido de un enunciado.

Círculo: Es el conjunto de puntos formado por la circunferencia y su superficie interior.

Los once capítulos a los cuales se hace referencia, son:

- **Lógica y Conjuntos:** Con el uso de la Lógica Matemática como lenguaje, se establecen criterios de verdad, se emplean métodos de análisis y razonamiento; y, se usan implicaciones y equivalencias lógicas para conocer cómo se realiza una demostración. Considerando que los conjuntos constituyen uno de los conceptos básicos de las matemáticas, se puede obtener una descripción detallada de los fundamentos de la Teoría de Conjuntos. Ambos conceptos se enlazan de manera lógica para plantear el tema de funciones sobre conjuntos finitos, tema de trascendental importancia en el conocimiento matemático.

- **Números Reales:** En la parte aritmética se desea que el estudiante recuerde las operaciones fundamentales sobre los números; un tema relevante lo constituyen la manipulación de fracciones y los radicales. Cuando se utiliza el Álgebra se espera que el estudiante adquiera destrezas mínimas como objeto de estudio de cantidades que pueden considerarse en la forma más general posible. El planteo y resolución de problemas es fundamental en la formación profesional del futuro ingeniero.

- **Funciones de una Variable Real:** El concepto de función se refiere a toda correspondencia matemática que cumpla con las condiciones de existencia y unicidad. Se tratan los diferentes tipos y características que las funciones poseen, haciendo especial énfasis en su graficación como requisito indispensable para los cursos de cálculo. Las aplicaciones de este tema merecen especial atención, pues se reconocerá la utilidad particular de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas, en diversas situaciones que ocurren a nuestro alrededor.

- **Trigonometría:** Las razones trigonométricas son la base fundamental de numerosas aplicaciones matemáticas y físicas, por ello, en este capítulo se conocerá el significado de cada una, comprobando sus propiedades y relaciones en las denominadas identidades trigonométricas. Nuevamente, el enfoque gráfico es prioritario para el estudio de las funciones trigonométricas y sus correspondientes inversas.

- **Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones:** Para el modelamiento de múltiples ecuaciones se introduce el concepto de matriz con sus diferentes clasificaciones. La aplicación del determinante nos permitirá distinguir entre matrices singulares y regulares, así como resolver sistemas de ecuaciones lineales. Mientras que para resolver sistemas de ecuaciones no lineales y de inecuaciones se utilizará el análisis gráfico propuesto en el capítulo de Funciones de una Variable Real.

- **Números Complejos:** Se ha considerado este capítulo por la limitación de los números reales para resolver raíces de índice par de números negativos, ampliando los conceptos ya tratados en el capítulo de Números Reales. También se muestra la relación que tienen estos números con las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

• **Geometría Plana:** El estudio de la geometría en el plano es de fundamental importancia, ya que a partir de subconjuntos no vacíos se pueden establecer sus relaciones y propiedades, así como calcular perímetros y áreas de superficies que utilizamos en nuestra vida diaria.

• **Geometría del Espacio:** La profundización en esta parte de la geometría proveerá las referencias necesarias para construir cuerpos en tres dimensiones, identificando sus elementos principales y estableciendo las expresiones necesarias para el cálculo de áreas de superficies laterales, superficies totales y volúmenes.

• **Vectores:** Se realiza un análisis vectorial en el plano y en el espacio, con las diferentes operaciones permitidas entre ellos o con valores escalares. Se introducen los conceptos de combinación lineal y espacio vectorial, fundamentos de un curso de Álgebra Lineal, así como la aplicación geométrica del producto punto y producto cruz.

• **Geometría Analítica:** En este capítulo se estudiarán definiciones y propiedades de figuras en el plano, partiendo del planteamiento de igualdades condicionadas que llevarán a identificar lugares geométricos de rectas y cónicas, estudiando sus gráficas, elementos; y, características principales.

• **Estadística y Probabilidades:** Aunque este tema puede resultar bastante extenso, solamente nos enfocaremos en la estadística descriptiva y daremos una breve introducción a la teoría de Probabilidades. Se podrá organizar un conjunto de datos en forma tabular y realizar su representación gráfica, encontrar las medidas de tendencia central y de dispersión; y, se utilizarán los conceptos del capítulo referente a Conjuntos para encontrar los elementos que corresponden a eventos de espacios muestrales y la probabilidad de su ocurrencia.

Cada capítulo presenta el siguiente esquema:

Introducción al tema: En donde el lector obtiene una referencia apropiada de cada capítulo mediante antecedentes históricos y biográficos, así como de su importancia y trascendencia en las matemáticas.

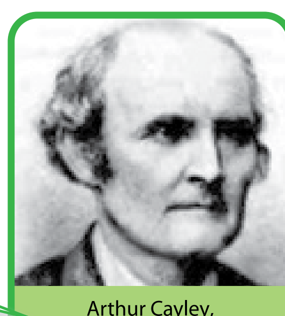
Capítulo 5

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Introducción

La definición de matriz aparece por primera vez en el año 1850, introducida por J. J. Sylvester. Sin embargo, hace más de dos mil años los matemáticos chinos habían descubierto ya un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y por lo tanto empleaban tablas con números.

Normalmente esta introducción tiene la foto de un personaje que distingue de manera adecuada el tema que se comenzará a analizar. La foto incluye el nombre del personaje, país de origen y período de vida.



Arthur Cayley, matemático británico (1821-1895)

Inducción a la sección: En búsqueda de la coherencia con el propósito del nuevo material de lectura, se prepara al lector con nexos para las diferentes secciones.



Programación lineal

Desde el punto de vista histórico, la programación lineal surgió como una técnica para resolver problemas relacionados con la distribución de artículos y materiales para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos durante la segunda guerra mundial.

En la actualidad es utilizada para la optimización de la distribución de los vuelos de las líneas aéreas y el establecimiento de redes telefónicas. Aunque los problemas prácticos contienen cientos de desigualdades lineales con otros cientos de incógnitas, en esta sección limitaremos nuestro estudio a sólo dos variables para poder resolverlo gráficamente.

Secciones: Cada capítulo ha sido dividido en temas, de acuerdo a los conceptos que se pretende analizar. Estas agrupaciones, denominadas secciones, muestran de manera detallada cada tópico con la profundidad y aplicación que el caso amerita. También se puede contrastar con lo que se supone el lector ya conoce sobre el tema. Cada sección se encuentra numerada según corresponda al capítulo que se está analizando.



5.1 Matrices

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una matriz, identificar su dimensión y los elementos que la conforman, aplicando la notación correcta.
- Dada una matriz, reconocer si es: matriz cuadrada, triangular superior, triangular inferior, diagonal, simétrica, matriz identidad, matriz nula.

Objetivos: Al iniciar cada sección, el profesor puede plantear de manera específica en conjunto con sus estudiantes lo que se pretende lograr al finalizar la lectura de cada una de ellas. El cumplimiento de tales objetivos confirmará la comprensión de los diferentes conceptos.

Definiciones: Estas declaraciones representan las propiedades y los significados más relevantes que el lector no debe olvidar.

Definición 5.6 (Matriz simétrica)

Una matriz cuadrada A, se dice que es simétrica, si y sólo si, $A^T = A$.
Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i \, \forall j (a_{ij} = a_{ji})$.

Teoremas: Proporcionan el material necesario para complementar la importancia del marco teórico de definiciones y demostraciones.

Teorema 5.1

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces $det(A) = a_{11}.a_{22}....a_{nn}$

Ejemplos resueltos: Representan aplicaciones concretas y directas a partir del análisis de cada tema. La complejidad de los mismos guarda un orden creciente en una misma sección. Algunos de los ejemplos seleccionados tienen relación con otras ramas de las ciencias y con la vida real.

Ejemplo 5.1 Identificación de filas y columnas.

En la matriz $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

La fila 1 es $(1 \quad 2)$, *la fila 2 es* $(3 \quad 4)$, *la fila 3 es* $(5 \quad 6)$.

La columna 1 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *y la columna 2 es* $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ejercicios propuestos: Al finalizar cada capítulo se plantean ejercicios organizados por sección, los mismos que tienen diversos grados de dificultad y se presentan en forma de preguntas de tipo Verdadero/Falso, Opción Múltiple y de Desarrollo. La finalidad de estos ejercicios es promover el trabajo independiente y la autocrítica por parte del estudiante. En la parte final del texto se muestran las respuestas a los ejercicios propuestos, exceptuando aquellos que requieren demostraciones o construcción de tablas y gráficas.

5 CAPÍTULO CINCO Ejercicios propuestos

5.1 Matrices y operaciones

1. Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

a) Verdadero   b) Falso

2. Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 7 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, hallar X.

3. a) Determine la matriz $2\text{x}2$ $A=(a_{ij})$, para la cual $a_{ij}=i+j-2$.

b) Sea $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Es B una matriz diagonal?

c) Sea $C=A+B$ ¿Es C una matriz identidad?

d) Sea la matriz $3\text{x}2$ $D=(d_{ij})$, para la cual $d_{ij}=2i+3j-4$, encuentre:

(i) DA
(ii) DB
(iii) DC



Capítulo 1
Lógica y Conjuntos

Introducción

Todos estamos familiarizados con la idea de que algunas personas poseen una mentalidad lógica mientras que otras no. No siempre resulta sencillo seguir razonamientos o argumentos extensos para obtener conclusiones válidas.

Nosotros trabajamos con argumentos dentro de la lógica aristotélica, donde todo argumento debe ser o verdadero o falso, no existe una tercera posibilidad. Para poder manejar y operar entre estos argumentos, el lenguaje usual puede resultar ambiguo respecto a la validez de los argumentos.

La frase: "Pon el sobre que te sobre, sobre la mesa", sugiere que la palabra *sobre* tiene tres diferentes significados en la misma oración. Por ello, se necesita de un lenguaje que sea más preciso: la **lógica simbólica**. Su propósito consiste en establecer un nuevo lenguaje, el cual se pueda utilizar para simplificar el análisis de argumentos lógicos complicados.

La lógica simbólica es la rama de las matemáticas que nos permite reconocer la validez de una argumentación, así como también nos proporciona las herramientas de razonamiento necesarias para elaborar demostraciones irrefutables y convincentes. Una parte importante de las matemáticas son las definiciones, éstas en general no responden a la pregunta ¿qué es?, sino a la pregunta ¿qué características tiene?

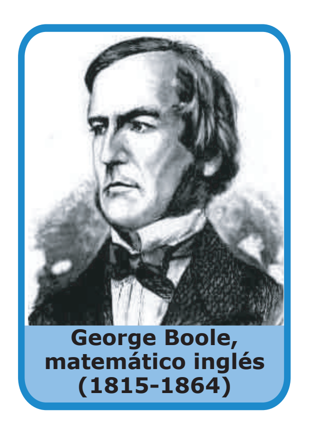

Gottfried Leibniz, matemático alemán (1646-1716)

Además, las definiciones tienen una parte conceptual (¿qué significa?) y una parte operativa (¿cómo se trabaja?).

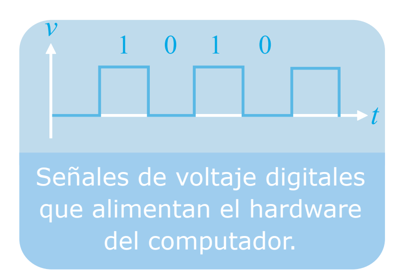
Leibniz fue el primero en concebir este planteamiento, cuando a la edad de 14 años intentó reformar la lógica clásica. En 1666, deseaba crear un método general en el cual todas las verdades de la razón serían reducidas a una especie de cálculos, llamando a la lógica simbólica "característica universal".

El sueño de Leibniz no se realizó hasta que Boole separó los símbolos presentes en las operaciones matemáticas, de los conceptos sobre los cuales operaban y estableció un sistema factible y sencillo de lógica simbólica.

En 1854, Boole expuso sus ideas en su obra "*An Investigation of the Laws of Thought*" (Investigación de las Leyes del Pensamiento). Desgraciadamente, este trabajo no recibió buena aceptación, y no fue sino hasta que los ingleses Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) utilizaron la lógica simbólica en su obra "*Principia Mathematica*" (1902), que el mundo de la matemática dio importancia a las ideas propuestas inicialmente por Leibniz alrededor de 250 años antes.



George Boole, matemático inglés (1815-1864)



Señales de voltaje digitales que alimentan el hardware del computador.

El álgebra booleana constituye un área de las matemáticas que ha pasado a ocupar un lugar prominente con el advenimiento de la computadora digital. Es usada ampliamente en el diseño de circuitos de distribución y computadoras; y, sus aplicaciones van en aumento en muchas otras áreas.

En el nivel de lógica digital de una computadora, el hardware trabaja con diferencias de voltaje, las cuales generan funciones que son calculadas por los circuitos que forman el nivel.

En este capítulo se tratará de responder a la pregunta ¿cómo podemos llegar a ser más lógicos? Se pretende aplicar la lógica no solamente en el estudio de las ciencias, sino también en la vida cotidiana. Es necesario poder comunicarse de manera inteligente con los demás; se requiere adquirir capacidad para analizar los argumentos de nuestros dirigentes y legisladores; necesitamos ser consumidores inteligentes para analizar las aseveraciones de los anunciantes. Bien sea que nos agrade o no, la lógica es una parte importante del mundo que nos rodea y en este capítulo sentaremos las bases que nos ayudarán a ser definitivamente más lógicos.

1.1 Proposiciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas varias oraciones, identificar cuáles son proposiciones y cuáles no, justificando adecuadamente su respuesta.
* Identificar oraciones que representan proposiciones.

Capítulo 1

Lógica y Conjuntos

La lógica es un método de razonamiento que no acepta conclusiones erróneas. Esto se puede lograr definiendo en forma estricta cada uno de los conceptos. Todo debe definirse de tal forma que no dé lugar a dudas o imprecisiones en la veracidad de su significado. Nada puede darse por supuesto, y las definiciones de diccionario no son normalmente suficientes. Por ejemplo, en el lenguaje ordinario, un enunciado u oración se puede definir como "una palabra o grupo de palabras que declara, pregunta, ordena, solicita o exclama algo; unidad convencional del habla o escritura coherente, que normalmente contiene un sujeto y un predicado, que empieza con letra mayúscula y termina con un punto".

Sin embargo, en lógica simbólica una oración tiene un significado mucho más específico y se llama proposición.

Definición 1.1 (Proposición)

Una proposición es una unidad semántica que, o sólo es verdadera o sólo es falsa.

Los elementos fundamentales de la lógica son las proposiciones. Por ello, las oraciones que no son falsas ni verdaderas, las que son falsas y verdaderas al mismo tiempo, o las que demuestran algún tipo de imprecisión (carecen de sentido), no son objeto de estudio de la lógica.

Ejemplo 1.1 Oraciones que son proposiciones.

5 es un número primo.
$-17+38=21$.
Todos los números enteros son positivos.
Vicente Rocafuerte fue Presidente del Ecuador.

Las oraciones anteriormente expuestas son proposiciones, ya que son verdaderas o falsas. Todas ellas pueden ser calificadas por el lector con precisión y sin ambigüedades o subjetivismo.

Usualmente, las primeras letras del alfabeto español en minúscula se usan para representar proposiciones.

Ejemplo 1.2 Representación simbólica de proposiciones.

5 es un número primo puede ser representada por la letra a, de la forma:

a: 5 es un número primo.

Ejemplo 1.3 Oraciones que no son proposiciones.

Lava el auto, por favor.
Hola, ¿cómo estás?
¡Apúrate!
La conceptualización cambia lo absurdo en azul.
$x+5=9$.
¡Mañana se acabará el mundo!

Las primeras cuatro oraciones no son proposiciones porque no se puede establecer su valor de verdad. Generalmente las oraciones imperativas, exclamativas e interrogativas no son proposiciones.

El quinto enunciado no es una proposición, ya que el valor de x no es preciso y por lo tanto no se puede establecer su valor de verdad.

La sexta oración no es una proposición porque su valor de verdad no se puede determinar.

Definición 1.2 (Valor de verdad)

El valor de verdad de una proposición es la cualidad de veracidad que describe adecuadamente la proposición. Éste puede ser verdadero o falso.

Usualmente al valor verdadero se lo asocia con: $\mathbf{1}$, V, T, $True$; mientras que el valor falso se lo asocia con: $\mathbf{0}$, F, $False$. Se podría utilizar cualquiera de ellas, pero la convención a seguir en el texto será el uso de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, tomando como referencia el sistema de numeración binario.

En el ejemplo 1.1 podemos observar que el valor de verdad de la segunda proposición es VERDADERO, mientras que el valor de verdad de la tercera proposición es FALSO.

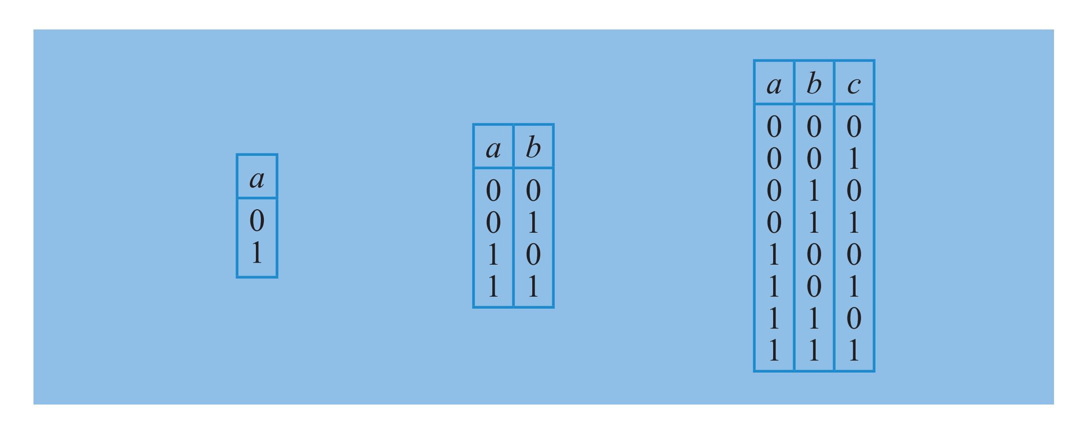
Verdad y falsedad pueden considerarse simplemente como los valores lógicos de la unidad semántica descriptiva con sentido completo. Ese valor es lo que más nos interesa sobre una proposición.

Definición 1.3 (Tabla de verdad)

Una tabla de verdad es una representación de los posibles valores de verdad que podría tomar una proposición.

Las tablas de verdad sirven para mostrar los valores, las relaciones y los resultados posibles al realizar operaciones lógicas.

Ejemplo 1.4 Construcción de tablas de verdad.



a
0
1

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1

a	b	c
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

La cantidad de combinaciones (filas de la tabla de verdad) depende de la cantidad de proposiciones presentes en la expresión lógica.

1.2 Operadores Lógicos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada la definición de los operadores lógicos, interpretar el comportamiento de estos operadores mediante su tabla de verdad.
* Dado un texto, traducirlo al lenguaje simbólico, identificando operadores lógicos y proposiciones presentes.
* Dada una proposición en el lenguaje simbólico, interpretar su mensaje en lenguaje natural.
* Dada una condicional de proposiciones, realizar parafraseos con las diferentes expresiones gramaticales existentes.
* Dada una condicional de proposiciones, determinar su recíproca, inversa y contrarrecíproca.
* Dada una proposición condicional verdadera, analizar sus condiciones necesarias y suficientes.

En nuestro lenguaje común usamos frecuentemente proposiciones más complejas, no tan simples o elementales.

Ejemplo 1.5 Proposiciones que no son simples.

- **No** te encontré en tu casa.
- Fui al banco **y** estaba cerrado.
- Tengo una moneda de cinco centavos **o** una de diez centavos.
- El carro de Juan **o** es azul **o** es negro.
- **Si** me gano la lotería, **entonces** me compro una casa.
- Estudio en la ESPOL **si y sólo si** me esfuerzo.

Surge entonces la necesidad de definir los nexos de estas proposiciones a los cuales se denominan **conectores** u **operadores lógicos**. Gramaticalmente, estos nexos, en su mayoría, son denominados partes invariables de la oración.

Definición 1.4 (Negación)

Sea a una proposición, la negación de a, representada simbólicamente por $\neg a$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	$\neg a$
0	1
1	0

Cuadro 1.1: Tabla de Verdad de la Negación.

Este operador lógico **cambia el valor de verdad de una proposición**: si a es una proposición verdadera, $\neg a$ es falsa; si a es una proposición falsa, $\neg a$ es verdadera. La negación se presenta con los términos gramaticales: "no", "ni", "no es verdad que", "no es cierto que".

Ejemplo 1.6 Negación de proposiciones.

Si se tiene la proposición:

a: Tengo un billete de cinco dólares.

La negación de a es:

$\neg a$: No tengo un billete de cinco dólares.

Ejemplo 1.7 Negación de proposiciones.

Si se tiene la proposición:

a: No quiero hacer el viaje.

La negación de a es:

$\neg a$: Quiero hacer el viaje.

Definición 1.5 (Conjunción)

Sean a y b proposiciones, la conjunción entre a y b, representada simbólicamente por $a \wedge b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cuadro 1.2: Tabla de Verdad de la Conjunción.

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual **la proposición resultante será verdadera solamente cuando el valor de verdad de ambas proposiciones es verdadero**. En español, la conjunción copulativa se presenta con los términos gramaticales: "y", "pero", "mas", y signos de puntuación como: la coma, el punto, y el punto y coma.

Ejemplo 1.8 Conjunción de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Obtengo buenas notas.
b: Gano una beca.

La conjunción entre a y b es:

$a \wedge b$: Obtengo buenas notas y gano una beca.

Ejemplo 1.9 Conjunción de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Trabajo mucho.
b: Recibo un bajo sueldo.

La conjunción entre a y b se puede expresar como:

$a \wedge b$: Trabajo mucho pero recibo un bajo sueldo.

Definición 1.6 (Disyunción)

Sean a y b proposiciones, la disyunción entre a y b, representada simbólicamente por $a \vee b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cuadro 1.3: Tabla de Verdad de la Disyunción.

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual **la proposición resultante será falsa solamente cuando el valor de verdad de ambas proposiciones es falso**.

En español, la disyunción se presenta con el término gramatical "o".

Ejemplo 1.10 Disyunción de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Tengo un libro de Trigonometría.
b: Tengo un libro de Álgebra.

La disyunción entre a y b es:

$a \vee b$: Tengo un libro de Trigonometría o uno de Álgebra.

Como se podrá notar en este ejemplo, existe la posibilidad de poseer ambos libros, razón por la cual esta disyunción recibe el nombre de **disyunción inclusiva**.

En el lenguaje español suelen presentarse situaciones que son mutuamente excluyentes entre sí. La expresión "o estoy en Quito o estoy en Guayaquil" denota la imposibilidad de estar físicamente en Quito y Guayaquil al mismo tiempo.

Definición 1.7 (Disyunción exclusiva)

Sean a y b proposiciones, la disyunción exclusiva entre a y b, representada simbólicamente por $a \veebar b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \veebar b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cuadro 1.4: Tabla de Verdad de la Disyunción Exclusiva.

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual **la proposición resultante será verdadera cuando solamente una de ellas sea verdadera**.

La disyunción exclusiva $a \veebar b$ puede expresarse como:

$$(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$$

En español, la disyunción exclusiva se presenta con el término gramatical "o", "o sólo", "o solamente", "o..., o...".

Ejemplo 1.11 Disyunción exclusiva de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Estoy en Quito.
b: Estoy en Guayaquil.

La disyunción exclusiva entre a y b es:

$a \veebar b$: O estoy en Quito o estoy en Guayaquil.

Definición 1.8 (Condicional)

Sean a y b proposiciones, la condicional entre a y b, representada simbólicamente por $a \to b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Cuadro 1.5: Tabla de Verdad de la Condicional.

Este operador lógico también se denomina enunciación hipotética o implicación. En la proposición $a \to b$, a es el antecedente, hipótesis o premisa; b es el consecuente, conclusión o tesis; y **la proposición resultante será falsa solamente cuando el valor de verdad del antecedente sea verdadero y el valor de verdad del consecuente sea falso.**

En español, la proposición $a \to b$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "si a, entonces b", "a sólo si b", "a solamente si b", "b si a", "si a, b", "b con la condición de que a", "b cuando a", "b siempre que a", "b cada vez que a", "b ya que a", "b debido a que a", "b puesto que a", "b porque a", "se tiene b si se tiene a", "sólo si b, a", "b, pues a", "cuando a, b", "los a son b", "a implica b", o cualquier expresión que denote causa y efecto.

Ejemplo 1.12 Condicional de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Juan gana el concurso.
b: Juan dona \$ 10 000.

La condicional entre a y b es:

$a \rightarrow b$: Si Juan gana el concurso, dona \$ 10 000.

Parafraseando la condicional, tenemos:

- Juan gana el concurso sólo si dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 si gana el concurso.
- Si Juan gana el concurso, entonces dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 puesto que gana el concurso.
- Juan dona \$ 10 000 debido a que gana el concurso.
- Juan dona \$ 10 000 siempre que gane el concurso.
- Cuando Juan gane el concurso, dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 porque gana el concurso.

En base a este ejemplo, nos podemos preguntar: ¿cuándo se quebrantará la promesa de Juan? Esto será únicamente cuando Juan gane el concurso y no done el dinero.

Existen otras proposiciones relacionadas con la condicional $a \rightarrow b$, las cuales se denominan: recíproca, inversa y contrarrecíproca (o contrapositiva).

La **Recíproca**, es representada simbólicamente por: $b \rightarrow a$.

La **Inversa**, es representada simbólicamente por: $\neg a \rightarrow \neg b$.

La **Contrarrecíproca**, es representada simbólicamente por: $\neg b \rightarrow \neg a$.

Ejemplo 1.13 Variaciones de la condicional.

A partir de la proposición:

"Si es un automóvil, entonces es un medio de transporte".

La Recíproca sería:

"Si es un medio de transporte, entonces es un automóvil".

La Inversa sería:

"Si no es un automóvil, entonces no es un medio de transporte".

La Contrarrecíproca sería:

"Si no es un medio de transporte, entonces no es un automóvil".

Cabe anotar que una proposición puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad, lo cual no se cumple con la recíproca o la inversa.

A continuación se verifica este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14 Variaciones de la condicional.

A partir de la proposición:

"Si un número es divisible para 6, entonces es divisible para 3".

La Recíproca sería:

"Si un número es divisible para 3, entonces es divisible para 6".

La Inversa sería:

"Si un número no es divisible para 6, entonces no es divisible para 3".

La Contrarrecíproca sería:

"Si un número no es divisible para 3, entonces no es divisible para 6".

Relacionadas a la enunciación hipotética, surgen las nociones de **condición necesaria** y **condición suficiente**, y puede afirmarse con propiedad que mucha gente tiene integrada estas nociones a su lenguaje cotidiano, tal como se ilustra en el siguiente caso.

Ejemplo 1.15 Introducción a las condiciones necesarias y suficientes.

Un profesor presenta este problema a sus estudiantes:

"Un hacendado tiene un cierto número de reses, de tal forma que: si las agrupa de 2 en 2, le sobra 1, si las agrupa de 3 en 3, le sobra 1, pero si las agrupa de 4 en 4, no le sobran. Entonces, ¿podría indicar usted el número de reses que tiene el hacendado?".

El razonamiento que presentaron los estudiantes a este problema, fue:

"Si el hacendado las agrupa de 2 en 2, sobra 1, por lo tanto no es múltiplo de 2. Si las agrupa de 3 en 3, sobra 1, por lo tanto no es múltiplo de 3. Pero si las agrupa de 4 en 4, no le sobran, por lo tanto es múltiplo de 4.
Mmmmm..., pero algo anda mal, porque si el número de reses es múltiplo de 4, también debe ser múltiplo de 2 debido a que 4 es múltiplo de 2. Luego, el problema está mal planteado".

Esto significa que las condiciones se contradicen y el problema tiene condiciones que no se pueden dar. Por lo tanto, no hay forma de determinar el número de reses del hacendado.

Analizando este problema desde el punto de vista lógico y suponiendo que n es un entero positivo bien definido, se tendrá la siguiente propiedad: "Si n es múltiplo de 4, entonces n es múltiplo de 2", la cual se puede expresar como $a \rightarrow b$, donde a: n es múltiplo de 4 y b: n es múltiplo de 2.

Al ser la proposición $a \rightarrow b$ verdadera, la condición "n es divisible para 4" es suficiente para que "n sea divisible para 2"; es decir, que basta que n sea divisible para 4 para que ese mismo n sea divisible para 2. Esto significa que a es **condición suficiente** para b.

Por otro lado, la condición "n es divisible para 2" es necesaria para que "n sea divisible para 4"; es decir, que se requiere que n sea divisible para 2 para que ese mismo n sea divisible para 4. Esto significa que b es **condición necesaria** para a.

Una misma proposición puede ser condición suficiente para varias proposiciones y viceversa. Una misma proposición puede ser condición necesaria para distintas proposiciones.

Ejemplo 1.16 Condiciones necesarias y suficientes.

Las siguientes proposiciones son verdaderas:

"Si n es divisible para 16, n es divisible para 2".

"Si n es divisible para 8, n es divisible para 2".

"Si n es divisible para 16, n es divisible para 8".

Parafraseando las proposiciones anteriores, se tiene:

"n es divisible para 16" es condición suficiente para que "n sea divisible para 2".

"n es divisible para 2" es condición necesaria para que "n sea divisible para 8".

"n es divisible para 8" es condición necesaria para que "n sea divisible para 16".

Cuando la proposición $a \rightarrow b$ es verdadera, se puede parafrasear de la siguiente manera: "basta a para que b", "se necesita b para a", "para que suceda a, es necesario que suceda b", "b con la condición de que a".

Ejemplo 1.17 Identificación de condiciones necesarias y suficientes.

Si consideramos que la siguiente proposición es verdadera:

"Si estudias, aprobarás el curso".

Podemos afirmar que es **suficiente** estudiar para aprobar el curso. Así mismo, es **necesario** aprobar el curso como consecuencia de haber estudiado.

Ejemplo 1.18 Identificación de condiciones necesarias y suficientes.

Si ahora suponemos que la siguiente proposición es verdadera:
"Aceptaré el trabajo con la condición de que me traten bien".

Podemos afirmar que es **suficiente** que me traten bien para aceptar el trabajo. Por otra parte, es **necesario** aceptar el trabajo como consecuencia de que me traten bien.

Definición 1.9 (Bicondicional)

Sean a y b proposiciones, la bicondicional entre a y b, representada simbólicamente por $a \leftrightarrow b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cuadro 1.6: Tabla de Verdad de la Bicondicional.

Este operador lógico también se denomina doble implicación. **La proposición $a \leftrightarrow b$ será verdadera cuando los valores de verdad de ambas proposiciones sean iguales.** También se puede observar que **la proposición $a \leftrightarrow b$ será falsa cuando los valores de verdad de ambas proposiciones sean diferentes**.

En español, la proposición $a \leftrightarrow b$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "a si y sólo si b", "a si y solamente si b", "a implica b y b implica a", "a cuando y sólo cuando b".

Ejemplo 1.19 Bicondicional de proposiciones.

Dadas las proposiciones:
a: Un triángulo es equilátero.
b: Un triángulo es equiángulo.

La bicondicional entre a y b es:
$a \leftrightarrow b$: Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.

1.3 Proposiciones simples y compuestas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un texto que contenga proposiciones simples y operadores lógicos, representar simbólicamente la proposición compuesta correspondiente.
* Dada una proposición compuesta, determinar su valor de verdad conociendo el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.
* Dado el valor de verdad de una proposición compuesta, determinar el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.

Definición 1.10 (Proposiciones simples y compuestas)

Proposiciones simples son aquellas que no poseen operador lógico alguno. Las proposiciones compuestas están formadas por otras proposiciones y operadores lógicos.

Ejemplo 1.20 Traducción al lenguaje simbólico.

Traduzca al lenguaje simbólico la proposición:

"**Si** la seguridad privada es efectiva, disminuyen los índices de asalto en la ciudad **y** el turismo se desarrolla. Los índices de asalto **no** disminuyen, **pero** la seguridad privada es efectiva. **Entonces**, el turismo **no** se desarrolla".

Solución:

Se pueden identificar las siguientes proposiciones simples:

a: La seguridad privada es efectiva.

b: Los índices de asalto disminuyen en la ciudad.

c: El turismo se desarrolla.

Los operadores lógicos que se encuentran presentes en esta proposición compuesta son la condicional, la conjunción y la negación.

La traducción es:

$$[(a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (\neg b \wedge a)] \rightarrow (\neg c)$$

Nótese la importancia del uso de los signos de agrupación para preservar la idea original del enunciado.

Ejemplo 1.21 Determinación de valores de verdad.

Bajo la suposición de que los valores de verdad de las proposiciones simples a, b, c y d son respectivamente 0, 0, 1, 1, indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $\neg(a \vee b) \rightarrow (c \wedge \neg d)$
b) $\neg(c \leftrightarrow a) \veebar (b \wedge d)$

Solución:
a) $\neg(0 \vee 0) \rightarrow (1 \wedge 0)$
$\neg(0) \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 0$
0
El valor de verdad de esta proposición es falso.

b) $\neg(1 \leftrightarrow 0) \veebar (0 \wedge 1)$
$\neg(0) \veebar 0$
$1 \veebar 0$
1
El valor de verdad de esta proposición es verdadero.

Ejemplo 1.22 Determinación de valores de verdad.

Determine el valor de verdad de las proposiciones a, b, c si la proposición $[(a \wedge \neg b) \rightarrow c]$ es FALSA.

Solución:

El operador principal de esta proposición compuesta es la condicional. Dado que esta implicación tiene un valor de verdad falso únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, se obtiene que: $(a \wedge \neg b)$ debe ser verdadero; y, c debe ser falso.

Estos valores lógicos se obtienen si y sólo si a es verdadero, b es falso y c es falso, con lo cual quedan determinados los valores de verdad.

1.4 Formas Proposicionales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Identificar la diferencia entre proposiciones y formas proposicionales.
* Dada una forma proposicional, construir la tabla de verdad que la describe.
* Reconocer los diferentes tipos de formas proposicionales.
* Identificar implicaciones y equivalencias lógicas.

p constituye una variable proposicional cuando puede representar a una proposición simple o compuesta. El valor de verdad de p será desconocido mientras no se especifique el valor de verdad de las proposiciones involucradas.

Usualmente las últimas letras en minúscula del alfabeto español p, q, r, etc., se usan para representar variables proposicionales.

Definición 1.11 (Formas Proposicionales)

Se denominan formas proposicionales a las estructuras constituidas por variables proposicionales y los operadores lógicos que las relacionan.

Estas formas proposicionales se representan con las letras mayúsculas del alfabeto español A, B, C, ...

Observaciones

- Las formas proposicionales no tienen valor de verdad conocido y, por lo tanto, no serán consideradas proposiciones. Si cada variable proposicional es reemplazada por una proposición simple o compuesta, la forma proposicional se convierte en una proposición.
- Si reemplazamos a las variables proposicionales por proposiciones verdaderas o falsas, el número de proposiciones que se generan es 2^n, siendo n el número de variables proposicionales.
- Las formas proposicionales pueden ser conectadas con operadores lógicos para formar nuevas formas proposicionales. Dadas A y B, los símbolos $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$ representan nuevas formas proposicionales.

Ejemplo 1.23 Tabla de verdad de una forma proposicional.

Dada la siguiente forma proposicional:

$$A: [(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p)] \wedge r$$

Debido a la presencia de las 3 variables proposicionales p, q y r, existirán 2^3 proposiciones posibles en la tabla de verdad de A.

	p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$r \vee \neg p$	$[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p)]$	A
	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	0	1	0	1	1	1	1
	0	1	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0	0	1	0
→	**1**	**0**	**1**	0	0	1	1	**1**
	1	1	0	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	1	1	1

Cuando las variables proposicionales $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$ toman los valores de verdad $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, respectivamente, se puede apreciar que la proposición resultante es verdadera.

Definición 1.12 (Tautología, Contradicción, Contingencia)

Dada la estructura lógica de una forma proposicional:

- Si se tienen solamente proposiciones verdaderas para todos los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una TAUTOLOGÍA.
- Si se tienen solamente proposiciones falsas para todos los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una CONTRADICCIÓN.
- Si se tienen algunas proposiciones verdaderas y otras falsas para los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una CONTINGENCIA.

Partiendo de estas definiciones, la forma proposicional A del ejemplo anterior constituye una contingencia, mientras que la forma proposicional B: $p \vee \neg p$ es una tautología; y, la forma proposicional C: $p \wedge \neg p$ es una contradicción. Observe:

p	$\neg p$	B $p \vee \neg p$	C $p \wedge \neg p$
0	1	1	0
1	0	1	0

En este punto, podemos resumir lo siguiente:

$a \equiv 1$, significa que la proposición a es verdadera.

$p \equiv 1$, significa que la variable proposicional p puede ser reemplazada solamente por proposiciones verdaderas.

$A \equiv 1$, significa que la forma proposicional A es tautológica.

Definición 1.13 (Implicación lógica)

Sean A y B dos formas proposicionales, se dice que A implica lógicamente a B, denotado por $A \Rightarrow B$, si y sólo si $A \rightarrow B$ es una tautología.

Ejemplo 1.24 Implicación Lógica.

La forma proposicional tautológica: $p \Rightarrow (q \rightarrow p)$, se puede traducir al lenguaje común como "si se tiene p, de cualquier manera q se seguirá teniendo p".

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Ejemplo 1.25 Implicación Lógica.

La forma proposicional tautológica: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$, se puede traducir al lenguaje común como "si cada vez que se tiene p se tiene q y cada vez que se tiene q se tiene r, entonces cada vez que se tiene p se tiene r".

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Definición 1.14 (Equivalencia lógica)

Sean A y B dos formas proposicionales, se dice que A es equivalente lógicamente a B, denotado por $A \Leftrightarrow B$, si y sólo si $A \leftrightarrow B$ es una tautología.

Cuando se requiere sustituir una estructura por otra que sea equivalente, alternativamente el símbolo $\Leftrightarrow$ se lo reemplaza por $\equiv$.

Ejemplo 1.26 Equivalencia Lógica.

La forma proposicional: $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$, se puede traducir al lenguaje común como "cada vez que se tiene p, se tiene q", y es lógicamente equivalente a "cuando no se tiene q, entonces no se tiene p".

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Ejemplo 1.27 Equivalencia Lógica.

La forma proposicional: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, se puede traducir al lenguaje común como "no es cierto que se tiene p o q", y es lógicamente equivalente a "ni se tiene p, ni se tiene q".

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

1.5 Propiedades de los operadores lógicos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Emplear propiedades de los operadores lógicos para modificar estructuras lógicas.
* Dada una propiedad de los operadores lógicos, demostrarla empleando tablas de verdad y otras propiedades.

Las operaciones lógicas definidas entre las formas proposicionales y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas Leyes del Álgebra de Proposiciones o Leyes Lógicas. A continuación se presentan las de uso más frecuente:

CONJUNCIÓN		DISYUNCIÓN
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	Conmutativa	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$	Asociativa	$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
$(p \wedge p) \equiv p$	Idempotencia	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge 1) \equiv p$	Identidad	$(p \vee 0) \equiv p$
$(p \wedge 0) \equiv 0$	Absorción	$(p \vee 1) \equiv 1$

Cuadro 1.7: Leyes de los Operadores Fundamentales Conjunción y Disyunción.

$\neg 0 \equiv 1$ $\neg 1 \equiv 0$	Negación
$\neg(\neg p) \equiv p$	Doble Negación o Involutiva
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	De Morgan
$(p \vee \neg p) \equiv 1$	Tercero Excluido
$(p \wedge \neg p) \equiv 0$	Contradicción
$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$	Contrapositiva o Contrarrecíproca
$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ $(\neg p \rightarrow q) \equiv (p \vee q)$ $\neg(p \rightarrow \neg q) \equiv (p \wedge q)$	Implicación
$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv [(p \vee q) \rightarrow r]$	
$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \wedge r)]$	
$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	Exportación
$(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \neg q) \rightarrow 0]$	Reducción al Absurdo
$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$	Equivalencia

Cuadro 1.8: Leyes de los Operadores Negación, Condicional y Bicondicional.

FORMA SIMBÓLICA	TAUTOLOGÍA
$p \Rightarrow p$	Trivial
$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adición
$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplificación
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	Modus Ponendo Ponens Suposición del Antecedente
$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	Modus Tolendo Tollens Negación del Consecuente
$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$	Silogismo Disyuntivo
$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$ $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	Dilemas Constructivos
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$ $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	Transitividad o Silogismo Hipotético

Cuadro 1.9: Leyes de las Implicaciones Lógicas.

Para demostrar estas propiedades u otras, se pueden emplear tablas de verdad o utilizar algunas de las propiedades más elementales, como se verá a continuación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.28 Demostración de propiedades de los operadores lógicos.

Si se requiere demostrar la equivalencia lógica: $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ se puede emplear tablas de verdad o propiedades de los operadores lógicos.

Solución:

Empleando **tablas de verdad**, se construyen las respectivas combinaciones para las variables proposicionales involucradas en la forma proposicional.

Para el efecto se denominará A: $[(p \wedge q) \rightarrow r]$, B: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)]$, tal como se muestra en la siguiente tabla:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Puesto que $[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$ es una tautología, se concluye que existe una equivalencia lógica entre estas dos formas proposicionales, con lo cual se obtiene la demostración requerida.

Empleando **propiedades de los operadores lógicos**, se debe transformar la estructura de una de las formas proposicionales (o de ambas) hasta establecer la equivalencia lógica requerida. En este ejemplo se trabajará sobre la forma proposicional A, hasta obtener la estructura de la segunda.

$[(p\wedge q)\rightarrow r]\equiv[\neg(p\wedge q)\vee r]$	Por la Ley de la Implicación.
$\equiv[(\neg p\vee\neg q)\vee r]$	Por la Ley de De Morgan de la Conjunción.
$\equiv[\neg p\vee(\neg q\vee r)]$	Por la Ley Asociativa de la Disyunción.
$\equiv[\neg p\vee(q\rightarrow r)]$	Por la Ley de la Implicación.
$[(p\wedge q)\rightarrow r]\equiv[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$	Por la Ley de la Implicación.

Con esto se concluye que las dos formas proposicionales son equivalentes entre sí.

Las propiedades de los operadores lógicos también son útiles cuando se requiere expresar ideas o enunciados de una forma inequívoca y precisa.

Ejemplo 1.29 Aplicación de propiedades de los operadores lógicos.

Considere las siguientes proposiciones simples:

a: El clima es propicio.
b: La tierra es fértil.
c: La flor crecerá.

Se quiere negar la proposición compuesta:

"Si el clima es propicio y la tierra es fértil, la flor crecerá".

Solución:

La traducción del enunciado original es:

$(a\wedge b)\rightarrow c$

La negación de la proposición anterior es:

$\neg[(a\wedge b)\rightarrow c]$	
$\neg[\neg(a\wedge b)\vee c]$	Por la Ley de la Implicación.
$\neg[\neg(a\wedge b)]\wedge\neg c$	Por la Ley de De Morgan de la Disyunción.
$(a\wedge b)\wedge\neg c$	Por la Ley de la Doble Negación.
$b\wedge\neg c\wedge a$	Por la Ley Conmutativa de la Conjunción.

Por lo tanto, la negación de la proposición podrá expresarse con cualquiera de las siguientes frases equivalentes:

"El clima es propicio y la tierra es fértil, pero la flor no crecerá".

"La tierra es fértil, la flor no crecerá y el clima es propicio".

Aunque al lector le agrade una de ellas más que la otra, desde el punto de vista lógico, las dos representan la negación del enunciado original.

1.6 Razonamientos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

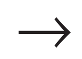
* Reconocer la estructura de un razonamiento.
* Dado un razonamiento, establecer su validez empleando tablas de verdad.
* Dado un razonamiento, establecer su validez empleando las Leyes del Álgebra de Proposiciones.

Definición 1.15 (Razonamientos)

Son proposiciones compuestas que pueden ser representadas por la conjunción de proposiciones denominadas premisas o hipótesis, la condicional como operador lógico principal; y, una proposición final denominada conclusión.

Las premisas o hipótesis corresponden al antecedente de la implicación, mientras que la conclusión es su consecuente.







$$\underbrace{[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \ldots \wedge H_n]}_{\text{Conjunción de hipótesis ANTECEDENTE}} \rightarrow \underbrace{C}_{\text{Conclusión CONSECUENTE}}$$

Conjunción de hipótesis
ANTECEDENTE

Condicional
OPERADOR
LÓGICO

Conclusión
CONSECUENTE

La lógica simbólica se ocupa de analizar la validez de los razonamientos; no nos puede decir si la información contenida en una hipótesis es verdadera o falsa. Los términos válido y no válido se refieren a la estructura del razonamiento, no a la veracidad o falsedad de las proposiciones.

El punto importante a recordar es que la veracidad o falsedad de las premisas y la conclusión, no determinan la validez del razonamiento.

Definición 1.16 (Validez de un razonamiento)

Un razonamiento es válido cuando la forma proposicional que representa su estructura lógica es una tautología. Si dicha forma proposicional es una contradicción o contingencia, entonces el razonamiento no es válido, en cuyo caso se denomina falacia.

Ejemplo 1.30 Determinación de la validez de un razonamiento.

Determine si el siguiente razonamiento es válido:

> "Si Pablo recibió el e-mail, entonces tomó el avión y estará aquí al mediodía. Pablo no tomó el avión. Luego, Pablo no recibió el e-mail".

Solución:

Se procede primero a identificar las proposiciones simples:

a: Pablo recibió el e-mail.
b: Pablo tomó el avión.
c: Pablo estará aquí al mediodía.

Luego, se identifican las hipótesis y la conclusión:

$H_1: a \rightarrow (b \wedge c)$ $\quad$ $H_2: \neg b$

$C: \neg a$

A partir de estas proposiciones pueden obtenerse las siguientes formas proposicionales:

$H_1: p \rightarrow (q \wedge r)$ $\quad$ $H_2: \neg q$

$C: \neg p$

Con lo cual, la estructura lógica del razonamiento sería:

$[H_1 \wedge H_2] \rightarrow C$

$[(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

p	q	r	$q \wedge r$	H_1 $p \rightarrow (q \wedge r)$	H_2 $\neg q$	$H_1 \wedge H_2$	C $\neg p$	$[H_1 \wedge H_2] \rightarrow C$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1

Puesto que la forma proposicional resultó tautológica, podemos concluir que el razonamiento es válido.

Otro método para determinar la validez de este razonamiento consiste en la utilización de las propiedades de los operadores lógicos:

$[(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

$\neg[(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg q] \vee \neg p$ Por la Ley de la Implicación.

$\neg[(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg q] \vee \neg p$ Por la Ley de la Implicación.

$\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \vee \neg(\neg q) \vee \neg p$ Por la Ley de De Morgan de la Conjunción.

$(\neg(\neg p) \wedge \neg(q \wedge r)) \vee \neg(\neg q) \vee \neg p$ Por la Ley de De Morgan de la Disyunción.

$(p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee q \vee \neg p$ Por la Ley de la Doble Negación.

$(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee q \vee \neg p$ Por la Ley de De Morgan de la Conjunción.

$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \vee \neg p)$ Por la Ley Distributiva de la Conjunción.

$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee \neg(p \wedge \neg q)$ Por la Ley de De Morgan de la Conjunción.

$[(p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q)] \vee (p \wedge \neg r)$ Por la Ley Asociativa de la Disyunción.

$1 \vee (p \wedge \neg r)$ Por la Ley del Tercero Excluido.

1 Por la Ley de Absorción de la Disyunción.

Ejemplo 1.31 Determinación de la validez de un razonamiento.

Determine si el siguiente razonamiento es válido:

> "Si el crimen ocurrió después de las 04h00, entonces Pepe no pudo haberlo cometido. Si el crimen ocurrió a las 04h00 o antes, entonces Carlos no pudo haberlo cometido. El crimen involucra a dos personas, si Carlos no lo cometió. Por lo tanto, el crimen involucra a dos personas".

Solución:

Se procede primero a identificar las proposiciones simples:

a: El crimen ocurrió después de las 04h00.
b: Pepe pudo haber cometido el crimen.
c: Carlos pudo haber cometido el crimen.
d: El crimen involucra a dos personas.

Luego se identifican las hipótesis y la conclusión:

$H_1: a \to (\neg b)$ $\quad$ $H_2: (\neg a) \to (\neg c)$ $\quad$ $H_3: (\neg c) \to d$

$C: d$

A partir de estas proposiciones pueden obtenerse las siguientes formas proposicionales:

$H_1: p \to (\neg q)$ $\quad$ $H_2: (\neg p) \to (\neg r)$ $\quad$ $H_3: (\neg r) \to s$

$C: s$

Con lo cual, la estructura lógica del razonamiento sería:

$$[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3] \to C$$

$$[(p \to (\neg q)) \wedge ((\neg p) \to (\neg r)) \wedge ((\neg r) \to s)] \to s$$

p	q	r	s	$\neg q$	H_1 $p \to (\neg q)$	$\neg p$	$\neg r$	H_2 $(\neg p) \to (\neg r)$	H_3 $(\neg r) \to s$	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$	$[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3] \to C$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1

Puesto que la forma proposicional resultó una contingencia, podemos concluir que el razonamiento no es válido (falacia lógica).

1.7 Demostraciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Aplicar las propiedades y el álgebra de las proposiciones para realizar demostraciones lógicas, empleando técnicas directas, técnicas de contraposición, contraejemplos y reducción al absurdo.

En matemáticas, a menudo nos ocupamos de la demostración lógica de ciertas afirmaciones. Cualquier sistema lógico debe empezar con algunos términos fundamentales, definiciones, y axiomas o postulados. A partir de ello, se pueden deducir por razonamientos válidos otras afirmaciones. Para llegar a demostrar algo, es necesario justificar cada paso de la demostración de manera lógica.

1.7.1 Demostraciones Directas

También denominadas "marcha adelante". Si queremos demostrar que $p \rightarrow q$, examinamos los elementos que aparecen en p; y, con la atención puesta en q, intentamos deducir q a partir de una secuencia de pasos lógicos que comience en p y termine en q.

Ejemplo 1.32 Demostración Directa.

Demostrar la Ley del MODUS PONENDO PONENS $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ utilizando el método de demostración directa.

Solución:

Aplicamos en dos oportunidades la Ley de la Implicación: $(a \rightarrow b) \equiv (\neg a \vee b)$

$\neg[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee q$

$\neg[(\neg p \vee q) \wedge p] \vee q$

Aplicamos la Ley de De Morgan de la Conjunción: $\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$

$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p] \vee q$

Aplicamos la Ley de De Morgan de la Disyunción: $\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$

$[(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee q$

Aplicamos la Ley Involutiva (Doble Negación): $\neg(\neg a) \equiv a$

$[(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee q$

Aplicamos la Ley Conmutativa de la Disyunción: $(a \vee b) \equiv (b \vee a)$

$[\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q$

Aplicamos la Ley Distributiva: $[a \vee (b \wedge c)] \equiv [(a \vee b) \wedge (a \vee c)]$

$[(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$

Aplicamos la Ley del Tercero Excluido: $(a \vee \neg a) \equiv 1$

$[(1) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$

Aplicamos la Ley de Identidad de la Conjunción: $(1 \wedge a) \equiv a$

$(\neg p \vee \neg q) \vee q$

Aplicamos la Ley Asociativa de la Disyunción: $[(a \vee b) \vee c] \equiv [a \vee (b \vee c)]$

$\neg p \vee (\neg q \vee q)$

Aplicamos la Ley del Tercero Excluido: $(a \vee \neg a) \equiv 1$

$\neg p \vee (1)$

Aplicamos la Ley de Absorción de la Disyunción: $a \vee 1 \equiv 1$

1

Con lo cual queda demostrado que la forma proposicional es tautológica, independientemente del valor de verdad que tomen las variables proposicionales.

1.7.2 Demostraciones por contraposición (o contrarrecíproca)

Este tipo de demostración es conocido como "supongamos que no". Está basada en la equivalencia que vimos entre $(p \rightarrow q)$ y $(\neg q \rightarrow \neg p)$.

Ejemplo 1.33 Demostración por contrarrecíproca.

Demostrar la Ley del SILOGISMO DISYUNTIVO $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$ utilizando el método de demostración por contrarrecíproca.

Solución:

Aplicamos la Ley Contrarrecíproca: $(a \rightarrow b) \equiv (\neg b \rightarrow \neg a)$

$\neg q \rightarrow \neg [(p \vee q) \wedge \neg p]$

Aplicamos la Ley de la Implicación: $(a \rightarrow b) \equiv (\neg a \vee b)$

$\neg(\neg q) \vee \{\neg [(p \vee q) \wedge \neg p]\}$

Aplicamos la Ley Involutiva (Doble Negación): $\neg(\neg a) \equiv a$

$q \vee \{\neg [(p \vee q) \wedge \neg p]\}$

Aplicamos la Ley de De Morgan de la Conjunción: $\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$

$q \vee [\neg (p \vee q) \vee \neg (\neg p)]$

Aplicamos la Ley Involutiva (Doble Negación): $\neg(\neg a) \equiv a$

$q \vee [\neg (p \vee q) \vee p]$

Aplicamos la Ley de De Morgan de la Disyunción: $\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$

$q \vee [(\neg p \wedge \neg q) \vee p]$

Aplicamos la Ley Conmutativa de la Disyunción: $(a \vee b) \equiv (b \vee a)$

$q \vee [p \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

Aplicamos la Ley Distributiva: $[a \vee (b \wedge c)] \equiv [(a \vee b) \wedge (a \vee c)]$

$q \vee [(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)]$

Aplicamos la Ley del Tercero Excluido: $(a \vee \neg a) \equiv 1$

$q \vee [1 \wedge (p \vee \neg q)]$

Aplicamos la Ley de Identidad de la Conjunción: $(1 \wedge a) \equiv a$

$q \vee (p \vee \neg q)$

Aplicamos la Ley Conmutativa de la Disyunción: $(a \vee b) \equiv (b \vee a)$

$q \vee (\neg q \vee p)$

Aplicamos la Ley Asociativa de la Disyunción: $[(a \vee b) \vee c] \equiv [a \vee (b \vee c)]$

$(q \vee \neg q) \vee p$

Aplicamos la Ley del Tercero Excluido: $(a \vee \neg a) \equiv 1$

$(1) \vee p$

Aplicamos la Ley de Absorción de la Disyunción: $a \vee 1 \equiv 1$

1

Con lo que se demuestra que la contrarrecíproca de la forma proposicional dada resultó tautológica. Como la contrarrecíproca es equivalente a la forma proposicional original, ésta también es una tautología.

1.7.3 Demostraciones por contraejemplo

El dar un ejemplo o mil, que ilustren una proposición, no demuestra que ésta sea verdadera. Sin embargo, sí podemos demostrar el hecho de que la proposición sea falsa, aportando por lo menos un ejemplo que lo confirme. Dicho ejemplo recibe el nombre de contraejemplo.

El contraejemplo pone en evidencia que existe al menos un caso en el cual la proposición no es verdadera.

Ejemplo 1.34 Demostración por contraejemplo.

Verifique si la siguiente proposición es verdadera:

"Si un número impar es mayor que dos, es primo".

Solución:

A partir de esta proposición se podrá suponer, erróneamente y en base a una observación limitada, que los números 3, 5 y 7 cumplen esta proposición. Sin embargo, podemos notar que el número 9 representa un contraejemplo para esta proposición que es falsa. Es más, no es el único, ya que aunque el 11 y el 13 vuelven a cumplir tal proposición, existen otros contraejemplos, como el 15, 21, 25, 27, 33.

Ejemplo 1.35 Demostración por contraejemplo.

Verifique si la siguiente proposición es verdadera:

"Las ciudades del Ecuador son capitales de provincias".

Solución:

Si leemos rápidamente y sin mayor análisis la referida proposición, podríamos concluir que su valor de verdad es verdadero, ya que Guayaquil, Portoviejo, Machala, Quito, entre otras, son ciudades y capitales de provincias. Mientras que Quevedo es una ciudad y no es capital de provincia alguna de nuestro país, lo mismo ocurre con ciudades como Manta, Atacames y Milagro, constituyendo por ende contraejemplos para la proposición objeto de estudio, la cual definitivamente es falsa.

1.7.4 Demostraciones por reducción al absurdo

En este método se supone que la estructura del razonamiento $p \to q$ no es tautológica. Debido a que el operador principal de un razonamiento es la implicación, la estructura no es tautológica si existe al menos un caso $1 \to 0$, es decir, partimos de p y q e intentamos llegar a un disparate o contradicción. Como p no puede ser falsa, pues constituye la hipótesis, se concluye que lo que es falso es q.

Ejemplo 1.36 Demostración por reducción al absurdo.

Utilizando el método de reducción al absurdo, demostrar la Ley del MODUS PONENDO PONENS $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Solución:

Debe procurarse partir de la situación en la que la condicional resulte con valor de verdad falso $(1 \to 0)$, ya que si esto se cumple, estaremos seguros de que la forma proposicional no será una tautología.

Como debemos buscar que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, planteamos:

$$\underbrace{[(p \to q) \wedge p]}_{1} \to \underbrace{q}_{0}$$

Ahora, como la conjunción $(p \to q) \wedge p$ es verdadera, entonces $(p \to q)$ es verdadera y p es verdadera:

$$\underbrace{[\underbrace{(p \to q)}_{1} \wedge \underbrace{p}_{1}]}_{1} \to \underbrace{q}_{0}$$

Analizando la segunda hipótesis y la conclusión, p debe ser verdadera y q debe ser falsa. Con estos valores de verdad para p y q, no es posible conseguir que la primera hipótesis $p \to q$ sea verdadera. Por lo tanto, no es factible el suceso de que $[(p \to q) \wedge p]$ sea verdadera y que q sea falsa.

A partir del análisis anterior, concluimos que la forma proposicional $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$ es tautológica.

Se sugiere que este método sea utilizado para demostrar la validez de un razonamiento, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.37 Demostración por reducción al absurdo.

Determine la validez del razonamiento:

> "Si llueve, hay producción; si hay granizo, no hay producción; hay granizo o no hay nevada. Por lo tanto, no llueve".

Solución:

Al identificar las proposiciones simples se obtiene:

a: Llueve.
b: Hay producción.
c: Hay granizo.
d: Hay nevada.

Las hipótesis y la conclusión son:

$H_1: a \rightarrow b$

$H_2: c \rightarrow \neg b$

$H_3: c \vee \neg d$

$C : \neg a$

La estructura lógica del razonamiento será:

$$[(a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow \neg b) \wedge (c \vee \neg d)] \rightarrow \neg a$$

A partir de esta proposición puede obtenerse la siguiente forma proposicional:

$$A \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q) \wedge (r \vee \neg s)] \rightarrow \neg p$$

Si quisiéramos construir su tabla de verdad, tendríamos que elaborar 16 combinaciones para las variables proposicionales involucradas p, q, r y s. Luego, es preferible utilizar el método de reducción al absurdo para simplificar nuestro trabajo y analizar la validez del razonamiento.

Determinamos los valores de verdad, comenzando con el consecuente del razonamiento, el cual se supone que es falso; y, para que el antecedente sea verdadero, debe cumplirse que $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$ sea verdadera. La conjunción de hipótesis es verdadera siempre y cuando cada hipótesis sea verdadera.

$$[\underbrace{(p \rightarrow q)}_{1} \wedge \underbrace{(r \rightarrow \neg q)}_{1} \wedge \underbrace{(r \vee \neg s)}_{1}] \rightarrow \underbrace{\neg p}_{0}$$

$\neg p \equiv 0$

$p \equiv 1$

$p \rightarrow q \equiv 1$

$1 \rightarrow q \equiv 1$

$q \equiv 1$

$r \rightarrow \neg q \equiv 1$

$r \rightarrow 0 \equiv 1$

$r \equiv 0$

$r \vee \neg s \equiv 1$

$0 \vee \neg s \equiv 1$

$\neg s \equiv 1$

$s \equiv 0$

Si a partir del supuesto valor de verdad de la conclusión, que es falso, se determinó que el valor de verdad del antecedente es verdadero, la forma proposicional no es tautológica. Por lo tanto, el razonamiento no es válido.

1.8 Conjuntos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una agrupación cualquiera, reconocer si es o no un conjunto.
* Definir con sus propias palabras los diferentes tipos de conjuntos.
* Expresar un conjunto por comprensión o extensión.
* Determinar la cardinalidad de un conjunto dado.

La noción de conjunto es una idea básica en las matemáticas. El profundizar rigurosamente en la teoría de conjuntos es una tarea más compleja de lo que se intenta en este texto.

Definición 1.17 (Conjunto)

Un conjunto es una colección, reunión o agrupación de objetos que poseen una característica o propiedad común bien definida.

Para establecer si un objeto pertenece o no a un conjunto, debe verificarse que posea la característica o propiedad declarada por el conjunto. De aquí que es importante que esta característica no sea ambigua.

Los conjuntos usualmente se denotan con letras mayúsculas del alfabeto español.

Ejemplo 1.38 Conjuntos.

Algunas agrupaciones que representan conjuntos son:

- Los números enteros.
- Los habitantes de la Luna.
- Los animales en extinción.
- Los números primos.
- Los paquetes de software.
- Los operadores de telefonía celular.

Todas estas agrupaciones poseen una característica que puede ser verificable con precisión.

Para decir que x es un elemento del conjunto A, escribiremos $x \in \mathrm{A}$. Para decir que x no está en A, escribiremos $x \notin \mathrm{A}$.

La descripción de un conjunto se puede realizar de las siguientes maneras:

- Por COMPRENSIÓN, para referirnos a alguna característica de los elementos.
- Por EXTENSIÓN o TABULACIÓN, cuando se listan todos los elementos.
- Por medio de DIAGRAMAS DE VENN, cuando se desea representarlo gráficamente.

Ejemplo 1.39 Descripción de conjuntos.

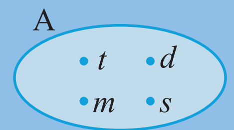
Por COMPRENSIÓN:

$A = \{x/x$ es consonante de la palabra amistad$\}$

Por EXTENSIÓN o TABULACIÓN:

$A = \{d, m, s, t\}$

Por DIAGRAMAS DE VENN:



Note que:

$d \in A$

$b \notin A$

Para algunas operaciones que se realizan entre conjuntos, es de mucha utilidad conocer la cantidad de elementos que posee el conjunto. Dicha cantidad recibe el nombre de cardinalidad, la cual se define a continuación.

Definición 1.18 (Cardinalidad)

Es la cantidad de elementos de un conjunto A. Se denota por el símbolo $N(A)$.

Ejemplo 1.40 Cardinalidad de conjuntos.

$A = \{x/x$ es un dígito impar en el sistema de numeración decimal$\}$

$N(A) = 5$, porque $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1.8.1 Conjuntos relevantes

Sea A un conjunto, se pueden dar los siguientes casos:

- A es VACÍO si no tiene elementos. El símbolo que se utiliza para representar al conjunto vacío es $\varnothing$. $N(A) = 0$
- A es UNITARIO si tiene un único elemento. $N(A) = 1$
- A es FINITO si tiene una cantidad finita de elementos.
- A es INFINITO si no tiene una cantidad finita de elementos.
- A es REFERENCIAL o UNIVERSO cuando contiene todos los elementos que deseen considerarse en un problema, discurso o tema, sin pretender contener todo lo que no interesa al problema. El símbolo que se utiliza para representar a este conjunto es Re o U.

Ejemplo 1.41 Conjuntos relevantes.

Conjunto VACÍO:
$A = \{x/x$ es un número par e impar a la vez$\}$
Conjunto UNITARIO:
$A = \{*\}$
Conjunto FINITO:
$A = \{x/x$ es habitante del Ecuador$\}$
Conjunto INFINITO:
$A = \{x/x$ es número entero$\}$
Conjunto REFERENCIAL o UNIVERSO:
$A = \{x/x$ es una letra del alfabeto español$\}$

1.9 Cuantificadores

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una expresión en lenguaje natural, identificar los dos tipos de cuantificadores que existen.
* Dada una proposición en términos de cuantificadores, reconocer su valor de verdad.
* Realizar operaciones con cuantificadores dado un conjunto referencial.
* Dado un conjunto finito, hallar su conjunto potencia.

Hasta ahora hemos considerado solamente la inferencia lógica de la estructura de proposiciones que son clasificadas como verdaderas o falsas. Sin embargo, en matemáticas se pueden considerar tres tipos de frases o expresiones: (1) verdaderas, (2) falsas y (3) indistintas o abiertas. A continuación se proporcionan ejemplos de cada uno de estos tipos:

1. Expresiones que son proposiciones verdaderas

$5 + 3 = 8$

$2 < 6$

2. Expresiones que son proposiciones falsas

$5 + 3 = 10$

$2 > 6$

3. Expresiones indistintas o abiertas

$5x + 3y = 8$

$2x < 6$

Vemos que estas expresiones indistintas o abiertas pueden ser verdaderas o falsas, dependiendo de las sustituciones que se hagan para x o y.

Se desea aplicar ahora el estudio de la lógica a las expresiones abiertas. Para este fin, debemos restringir o cuantificar la variable, diciendo que la expresión es verdadera para todos o algunos de sus valores posibles.

De aquí que, se hace necesario contar con una simbología especial, que permita obtener proposiciones a partir de expresiones abiertas.

A continuación se definirán los denominados cuantificadores, los cuales permitirán lograr este propósito.

Definición 1.19 (Cuantificador Universal)

Cualquier expresión de la forma: "para todo", "todo", "para cada", "cada", constituye en el lenguaje formal un cuantificador universal y se simboliza por medio de $\forall$.

Definición 1.20 (Cuantificador Existencial)

Cualquier expresión de la forma: "existe", "algún", "algunos", "por lo menos uno", "basta que uno", constituye en el lenguaje formal un cuantificador existencial y se simboliza por medio de $\exists$.

Ejemplo 1.42 Cuantificadores.

$\forall x, 2x+3x = 5x$ Se lee "Para todo número x se cumple que $2x+3x=5x$".

$\exists x, 2x+2 = 4$ Se lee "Existe al menos un número x, para el cual $2x+2=4$".

Como el lector podrá apreciar, estas dos expresiones sí pueden ser calificadas como verdaderas o falsas, lo cual las convierte en proposiciones de acuerdo a la definición 1.1.

Vemos que en el caso de una expresión abierta con cuantificadores, se sugiere o se supone algún conjunto referencial, del cual se obtienen los valores posibles de la variable.

Definición 1.21 (Subconjunto)

El conjunto A es subconjunto de B si y sólo si los elementos de A están contenidos en B. Simbólicamente, este concepto se representa por:

$$(\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}) \Leftrightarrow \forall x[(x \in \mathrm{A}) \rightarrow (x \in \mathrm{B})]$$

Si A es subconjunto de B $(\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B})$ pero B no es subconjunto de A $(\mathrm{B} \not\subseteq \mathrm{A})$, se dice que A es SUBCONJUNTO PROPIO de B, lo cual se representa por:

$$(\mathrm{A} \subset \mathrm{B}) \Leftrightarrow [(\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}) \wedge \neg(\mathrm{A} = \mathrm{B})]$$

La proposición $(x \in \varnothing)$ es falsa, porque no existen elementos que pertenezcan al conjunto vacío. Adicionalmente, la proposición $0 \rightarrow p$ es siempre verdadera, sin importar el valor de verdad de la proposición p, con lo que podemos concluir que: $[(x \in \varnothing) \rightarrow (x \in A)] \equiv 1$, es decir que $\varnothing \subseteq A$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Si realizáramos un análisis similar, podríamos concluir también que todo conjunto es subconjunto de sí mismo: $A \subseteq A$.

Definición 1.22 (Conjunto Potencia)

Dado un conjunto A, su conjunto potencia es aquel que está formado por todos los subconjuntos posibles de A. El símbolo que se utiliza para este conjunto es P(A).

$$P(A) = \{B / B \subseteq A\}$$

La cardinalidad del conjunto potencia de A se denota como $N(P(A))$ y es igual a $2^{N(A)}$.

Ejemplo 1.43 Conjunto Potencia.

Si $A = \{*, +, a\}$, entonces $P(A) = \{\varnothing, \{*\}, \{+\}, \{a\}, \{*, +\}, \{*, a\}, \{+, a\}, A\}$.

A partir de este resultado, las siguientes proposiciones son verdaderas:

$$\{*, +\} \subset A$$

$$\{*, +\} \in P(A)$$

$$\varnothing \in P(A)$$

Observe que $N(P(A)) = 2^3 = 8$.

Ejemplo 1.44 Conjunto Potencia.

Dado el conjunto $B = \{1, \{*, \Omega\}\}$, construya P(B).

Solución:

Los subconjuntos posibles de B son: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{\{*, \Omega\}\}$, B

entonces $P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{*, \Omega\}\}, B\}$.

Observe que $N(P(B)) = 2^2 = 4$.

1.9.1 Relaciones entre conjuntos

Definición 1.23 (Igualdad entre conjuntos)

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Es decir, ambos conjuntos se contienen mutuamente. Simbólicamente, este concepto se representa por:

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

Usando las definiciones y las propiedades de la lógica proposicional, se tiene:

$$(A = B) \Leftrightarrow \forall x[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

Definición 1.24 (Conjuntos disjuntos e intersecantes)

Los conjuntos A y B son DISJUNTOS si y sólo si A y B no tienen elementos en común. Los conjuntos A y B son INTERSECANTES si y sólo si A y B tienen al menos un elemento común.

1.10 Operaciones entre conjuntos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras las diferentes operaciones entre conjuntos.
* Dada una operación entre conjuntos, representarla con el lenguaje simbólico respectivo.
* Dada una operación entre conjuntos, representarla gráficamente mediante diagramas de Venn.
* Reconocer la operación de conjuntos que representa una región sombreada dada.

Es posible realizar operaciones entre conjuntos para formar otros nuevos. Las operaciones más utilizadas son: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complementación.

Definición 1.25 (Unión entre conjuntos)

La unión entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B. Se denota por A∪B y se define como:

$$A \cup B = \{x/(x \in A) \vee (x \in B)\}$$

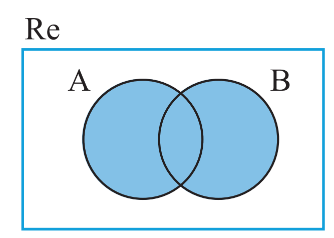


Figura 1.1: Diagrama de Venn de la Unión entre Conjuntos.

Definición 1.26 (Intersección entre conjuntos)

La intersección entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B. Se denota por A∩B y se define como:

$$A \cap B = \{x/(x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

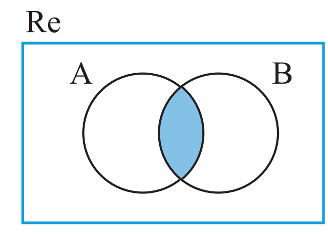


Figura 1.2: Diagrama de Venn de la Intersección entre Conjuntos.

Definición 1.27 (Diferencia entre conjuntos)

La diferencia entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A, pero no pertenecen al conjunto B. Se denota por A–B y se define como:

$$A - B = \{x/(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$$

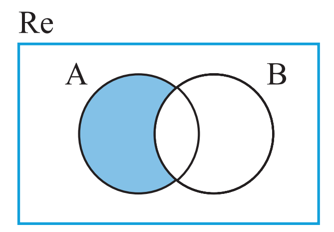


Figura 1.3: Diagrama de Venn de la Diferencia entre Conjuntos.

Definición 1.28 (Diferencia simétrica entre conjuntos)

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen o al conjunto A o al conjunto B. Se denota por $A \Delta B$ y se define como: $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$, o también:

$$A \Delta B = \{x / [(x \in A) \wedge \neg (x \in B)] \vee [(x \in B) \wedge \neg (x \in A)]\}$$

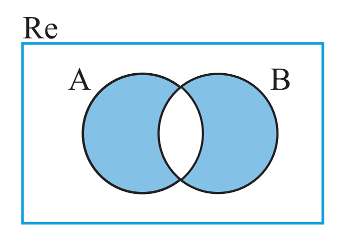


Figura 1.4: Diagrama de Venn de la Diferencia Simétrica entre Conjuntos.

Definición 1.29 (Complementación de conjuntos)

La complementación de un conjunto A es un nuevo conjunto formado por los elementos del referencial que no pertenecen al conjunto A. Se denota por A^C y se define como:

$$A^C = \{x / (x \in Re) \wedge \neg (x \in A)\}$$

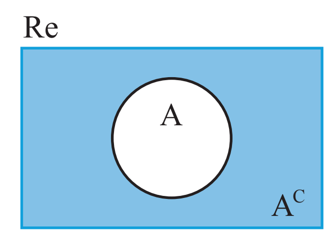


Figura 1.5: Diagrama de Venn de la Complementación de Conjuntos.

1.11 Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Emplear propiedades de las operaciones entre conjuntos para establecer igualdad entre ellos.
* Dada una propiedad de las operaciones entre conjuntos, demostrarla empleando lógica proposicional.
* Plantear y resolver problemas de cardinalidad empleando álgebra de conjuntos.

Las operaciones entre conjuntos y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas Leyes del Álgebra de Conjuntos. A continuación se presentan las de uso más frecuente:

UNIÓN		INTERSECCIÓN
$A \cup B = B \cup A$	Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Asociativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup A = A$	Idempotencia	$A \cap A = A$
$A \cup \varnothing = A$	Identidad	$A \cap Re = A$
$A \cup Re = Re$	Absorción	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Cuadro 1.10: Leyes de las Operaciones Fundamentales Unión e Intersección.

$\varnothing^C = Re$ $(Re)^C = \varnothing$	Complementación
$(A^C)^C = A$	Doble Complementación o Involutiva
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivas
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	De Morgan
$A \cup A^C = Re$	
$A \cap A^C = \varnothing$	

$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^C \subseteq A^C)$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A^C \cup B = Re)$	
$(A \cup B = Re) \Leftrightarrow (A^C \subseteq B)$	
$(A \cap B = \varnothing) \Leftrightarrow A \subseteq B^C$	
$[(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)] \Leftrightarrow [(A \cup B) \subseteq C]$	
$[(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cap C)]$	Transitividad
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow [(A \cap B^C) \subseteq \varnothing]$	Reducción al absurdo
$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$ $(A = B) \Leftrightarrow (B = A)$	Equivalencia
$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow (A \neq \varnothing) \wedge (B \neq \varnothing)$ $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing) \wedge (B = \varnothing)$	
$(A \cap B = Re) \Leftrightarrow (A = Re) \wedge (B = Re)$	
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	
$\varnothing \subseteq A$	
$A \subseteq A$	
$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$	Transitividad
$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow [(A \cap C) \subseteq (B \cap D)]$	
$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow [(A \cup C) \subseteq (B \cup D)]$	

Cuadro 1.11: Otras Leyes.

Estas propiedades pueden ser demostradas usando las propiedades del álgebra de proposiciones.

Ejemplo 1.45 Demostración de propiedades del álgebra de conjuntos.

- p.d. $A \cup B = B \cup A$ (Conmutatividad)

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$	Definición de Unión.
$\Leftrightarrow (x \in B) \vee (x \in A)$	Ley Conmutativa de la Disyunción.
$\Leftrightarrow x \in (B \cup A)$	Definición de Unión.

Ejemplo 1.46 Demostración de propiedades del álgebra de conjuntos.

- p.d. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (Primera ley de De Morgan)

$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow (x \in Re) \wedge \neg(x \in (A \cup B))$	Definición de Complementación.
$\Leftrightarrow (x \in Re) \wedge \neg[(x \in A) \vee (x \in B)]$	Definición de Unión.
$\Leftrightarrow (x \in Re) \wedge [\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)]$	Ley de De Morgan de la Disyunción.
$\Leftrightarrow [(x \in Re) \wedge \neg(x \in A)] \wedge [(x \in Re) \wedge \neg(x \in B)]$	Ley de Idempotencia.
$\Leftrightarrow x \in (Re - A) \wedge x \in (Re - B)$	Definición de Diferencia.
$\Leftrightarrow x \in (A^C \cap B^C)$	Definición de Complementación.

Ejemplo 1.47 Demostración de propiedades del álgebra de conjuntos.

- p.d. $N(A\cup B) = N(A) + N(B) - N(A\cap B)$

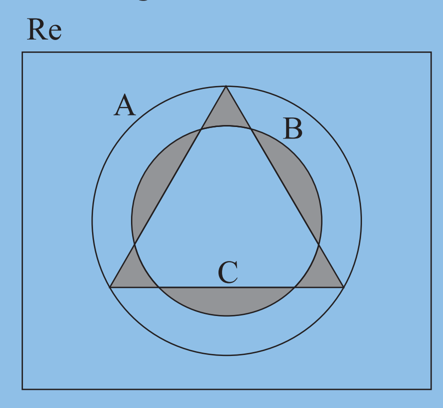
$A = (A-B)\cup(A\cap B)$	Expresado mediante conjuntos disjuntos.
$N(A) = N(A-B)+N(A\cap B)$	Su cardinalidad es la suma.
$N(A-B) = N(A)-N(A\cap B)$	Se obtiene esta expresión útil.
$A\cup B = (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$	Expresado mediante conjuntos disjuntos.
$N(A\cup B) = N(A-B)+N(A\cap B)+N(B-A)$	Su cardinalidad es la suma.
$N(A\cup B) = N(A)-N(A\cap B)+N(A\cap B)+N(B)-N(B\cap A)$	Cardinalidad de la diferencia.
$N(A\cup B) = N(A)+N(B)-N(A\cap B)$	Se completa la demostración.

Se puede demostrar que:

$$N(A\cup B\cup C) = N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(A\cap C)-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)$$

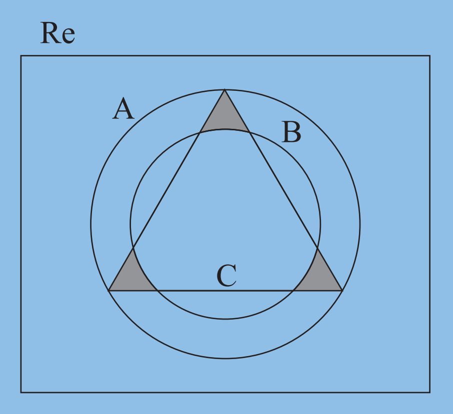
Ejemplo 1.48 Operaciones entre conjuntos.

Si en el diagrama de Venn que se muestra a continuación el conjunto A está dado por el círculo externo, el conjunto B está dado por el círculo interno y el conjunto C está dado por el triángulo, determine el conjunto que representa la región sombreada.

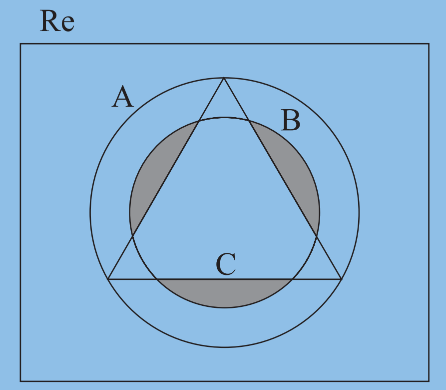


Solución:

La primera parte del conjunto solicitado la constituye el conjunto $(A\cap B^C)\cap C$, tal como se muestra en el diagrama siguiente:



La segunda parte del conjunto solicitado la constituye el conjunto $(B \cap C^C)$, el cual se representa en el siguiente diagrama:



A partir de estos diagramas de Venn, podemos deducir que la región sombreada requerida puede ser representada por el conjunto:

$$[(A \cap B^C) \cap C] \cup (B \cap C^C)$$

Ejemplo 1.49 Cardinalidad de conjuntos.

Determine el porcentaje de alumnos que practican fútbol y básquet, si al entrevistar a 1000 estudiantes se obtuvieron los siguientes resultados:

- 600 practican fútbol.
- 500 practican básquet.
- 150 no practican fútbol ni básquet.

Solución:

A partir de la información dada, tenemos que:

$N(Re) = 1000$

$N(B) = 500$

$N(F) = 600$

$N[Re - (B \cup F)] = 150$

Como se plantea en líneas anteriores:

$N(B \cup F) = N(B) + N(F) - N(B \cap F)$

Y como: $N(B \cup F) = 1000 - 150$

$N(B \cup F) = 850$

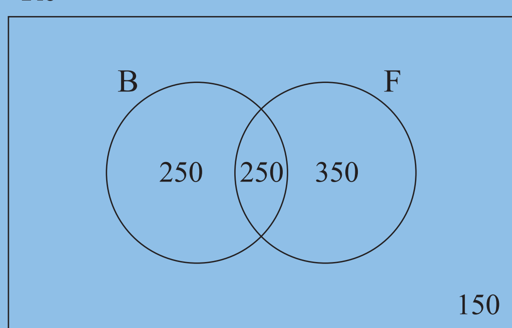
Luego:

$N(B \cap F) = 600 + 500 - 850$

$N(B \cap F) = 250$

El siguiente diagrama de Venn, ilustra el análisis previamente desarrollado:





Con lo que se concluye que el número de estudiantes que practican fútbol y básquet es 250, el cual representa el 25% del total de estudiantes.

Ejemplo 1.50 Cardinalidad de conjuntos.

Se hizo una encuesta a 1000 personas acerca del canal de televisión donde preferían ver programas documentales y se obtuvieron los siguientes resultados:

620 veían Teleamazonas; 400 veían Canal Uno; 590 veían Ecuavisa; 195 veían Teleamazonas y Canal Uno; 190 preferían ver Canal Uno y Ecuavisa; 400 veían Teleamazonas y Ecuavisa; 300 preferían ver Teleamazonas y Ecuavisa, pero no Canal Uno.

Determine el número de personas que no ven estos canales.

Solución:

A partir de la información obtenida se deduce que:

$N(Re) = 1000$

$N(T) = 620$

$N(C) = 400$

$N(E) = 590$

$N(T \cap C) = 195$

$N(C \cap E) = 190$

$N(T \cap E) = 400$

$N[(T \cap E) - C] = 300$

Si $N(T \cap E) = 400$ y $N[(T \cap E) - C] = 300$, entonces $N(T \cap C \cap E) = 100$.

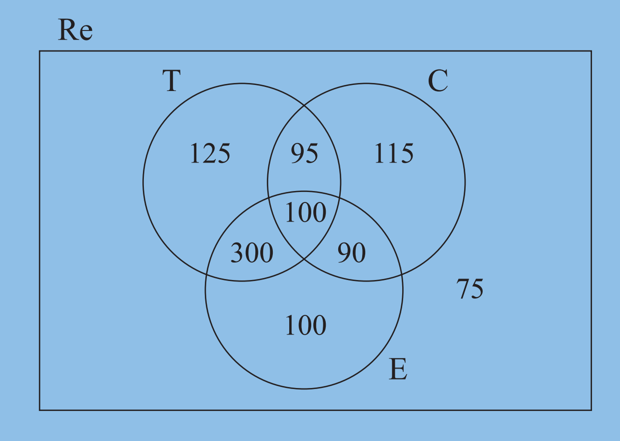
Luego:

$$N(T \cup C \cup E) = N(T)+N(C)+N(E)-N(T \cap C)-N(C \cap E)-N(T \cap E)+N(T \cap C \cap E)$$

$$N(T \cup C \cup E) = 620 + 400 + 590 - 195 - 190 - 400 + 100$$

$$N(T \cup C \cup E) = 925$$

$$N(T \cup C \cup E)^C = N(Re)-N(T \cup C \cup E) = 1000 - 925 = 75$$



$\therefore$ 75 personas no ven estos canales.

1.12 Predicados

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una expresión en lenguaje común, reconocer si es un predicado.
* Dado un predicado, identificar su variable y sugerir un conjunto referencial para la misma.
* Dado un predicado y un conjunto referencial, determinar su conjunto de verdad.
* Dado un predicado compuesto, encontrar su conjunto de verdad empleando propiedades de los conjuntos de verdad.
* Demostrar las leyes de los cuantificadores.

En la sección 1.9, se explicó la diferencia de las expresiones abiertas con respecto a las proposiciones. A partir de ahora, dichas expresiones en las que se manifiesta una acción o un estado para una variable, recibirán el nombre de predicados.

Definición 1.30 (Predicados de una variable)

Son expresiones en términos de una variable que al ser reemplazadas por los elementos de un conjunto referencial, se convierten en proposiciones. Si x representa a cualquier elemento de Re, entonces la expresión $p(x)$ se definirá como predicado.

La notación para los predicados será: $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, etc.

Ejemplo 1.51 Predicados.

Dado $\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $p(x)$: x es impar.

Si $x = 3$, $p(3)$: 3 es impar, es una proposición verdadera.
Si $x = 6$, $p(6)$: 6 es impar, es una proposición falsa.

Por lo tanto, $p(x)$ es un predicado.

Se pueden definir varios predicados con un mismo Re y se pueden realizar operaciones lógicas entre ellos para formar predicados compuestos.

Ejemplo 1.52 Predicados compuestos.

Para el Re y $p(x)$ dados en el ejemplo anterior, considere:

$q(x)$: $x < 5$

La expresión: $\neg p(x) \wedge q(x)$ también es un predicado.

Si $x = 2$: $[\neg p(2) \wedge q(2)] \Leftrightarrow 1$

Si $x = 3$: $[\neg p(3) \wedge q(3)] \Leftrightarrow 0$

Ejemplo 1.53 Predicados compuestos.

Para el Re y $p(x)$ dados anteriormente, considere:

$r(x)$: $x - 2 = 0$

La expresión: $p(x) \vee \neg r(x)$ también es un predicado.

Si $x = 2$: $[p(2) \vee \neg r(2)] \Leftrightarrow 0$

Si $x = 3$: $[p(3) \vee \neg r(3)] \Leftrightarrow 1$

Como el lector habrá observado en los ejemplos anteriores, existen elementos del referencial para los cuales el predicado puede convertirse en una proposición falsa o verdadera. Estas últimas son de especial interés, y los elementos del referencial que las conforman constituyen lo que a continuación se definirá como conjunto de verdad del predicado.

Definición 1.31 (Conjunto de verdad de un predicado)

Es el conjunto formado por todos los elementos de Re para los cuales el predicado se convierte en una proposición verdadera. La notación a utilizar para este conjunto es $\mathrm{A}p(x)$, y se define como:

$$\mathrm{A}p(x) = \{x/(x \in \mathrm{Re}) \wedge (p(x) \Leftrightarrow 1)\}$$

Ejemplo 1.54 Conjuntos de verdad.

Con referencia a los tres ejemplos anteriores:

$\mathrm{A}p(x) = \{1, 3, 5\}$

$\mathrm{A}q(x) = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathrm{A}r(x) = \{2\}$

Todos los elementos que no pertenezcan al conjunto de verdad de un predicado pero que sean parte del referencial considerado para el análisis, estarán contenidos en el complemento del conjunto de verdad de dicho predicado, lo cual puede expresarse así: $\mathrm{A}\neg p(x) = \mathrm{A}^{C}p(x)$.

Ejemplo 1.55 Complementos de conjuntos de verdad.

Partiendo de los mismos ejemplos ya citados anteriormente, se puede concluir que:

$A\neg p(x) = \{2, 4, 6\}$
$A\neg q(x) = \{5, 6\}$
$A\neg r(x) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

En relación a los conjuntos de verdad de predicados compuestos, se cumplen las siguientes propiedades:

$A\neg p(x)$	$=$	$A^C p(x)$
$A[p(x)\vee q(x)]$	$=$	$Ap(x)\cup Aq(x)$
$A[p(x)\wedge q(x)]$	$=$	$Ap(x)\cap Aq(x)$
$A[p(x)\rightarrow q(x)]$	$=$	$A^C p(x)\cup Aq(x)$

Cuadro 1.12: Leyes de los Conjuntos de Verdad de Predicados.

Ejemplo 1.56 Aplicación de las propiedades de los conjuntos de verdad.

Se pueden obtener conjuntos de verdad de predicados compuestos a partir de los conjuntos de verdad de los predicados que lo constituyen.

De esta forma, si se requiere hallar $A[p(x)\rightarrow(q(x)\wedge\neg r(x))]$, se pueden emplear las propiedades anteriormente citadas de la siguiente forma:

$$A[p(x)\rightarrow(q(x)\wedge\neg r(x))] = A[\neg p(x)\vee(q(x)\wedge\neg r(x))]$$
$$= A^C p(x)\cup(Aq(x)\cap A\neg r(x))$$
$$A[p(x)\rightarrow(q(x)\wedge\neg r(x))] = A^C p(x)\cup(Aq(x)\cap A^C r(x))$$

De esta manera, conociendo los conjuntos de verdad de $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y el referencial de estos predicados, se puede obtener el conjunto de verdad resultante de esta operación.

En referencia a los ejemplos 1.51, 1.52, 1.53 y 1.54 se tiene que:

$A^C p(x) = \{2, 4, 6\}$

$Aq(x) = \{1, 2, 3, 4\}$

$A^C r(x) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

Realizando las operaciones indicadas en $A^C p(x)\cup(Aq(x)\cap A^C r(x))$, se obtiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, el cual constituye el conjunto de verdad del predicado compuesto requerido.

Dado que ya se ha definido a los predicados y en la sección 1.9 se describieron los dos tipos de cuantificadores que se utilizan en la lógica simbólica, se pueden traducir expresiones del lenguaje natural que combinan predicados y cuantificadores.

Para el efecto, si se tiene un predicado $p(x)$ y un conjunto referencial Re, los siguientes enunciados son proposiciones con cuantificadores:

$$\forall x p(x)$$
$$\exists x p(x)$$

Ya que el primero de ellos se lee "para todo x elemento del Re, se cumple $p(x)$", y el segundo de ellos se lee "existe al menos un x elemento de Re que cumple con $p(x)$", ambos pueden ser calificados como proposiciones verdaderas o falsas.

De aquí que, si un predicado es cuantificado con alguno de los dos cuantificadores definidos, se obtiene una proposición, tal como se define a continuación.

Definición 1.32 (Valor de verdad de proposiciones con cuantificadores)

Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera si y sólo si el conjunto de verdad del predicado es igual al conjunto referencial de la expresión abierta.

$$\forall x p(x) \Leftrightarrow (\mathrm{A}p(x) = \mathrm{Re})$$

Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el conjunto de verdad del predicado no es vacío.

$$\exists x p(x) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{A}p(x) = \varnothing)$$

Obsérvese que si $a \in \mathrm{Re}$, los siguientes enunciados hipotéticos:

$$\forall x p(x) \Rightarrow p(a)$$
$$p(a) \Rightarrow \exists x p(x)$$

son verdaderos.

Considerando a como elemento de Re, el primer enunciado quiere decir: "Si todos los elementos del referencial satisfacen un predicado dado, entonces necesariamente a satisface el predicado". El segundo enunciado quiere decir: "Si a satisface el predicado, entonces necesariamente existirá por lo menos un elemento del referencial que satisface el predicado".

Resulta interesante estudiar los valores de verdad de $\forall x p(x)$ y $\exists x p(x)$, en función del conjunto referencial escogido. Consideremos 3 casos.

Caso 1: Conjunto Vacío

Si $Re = \emptyset$, entonces $\forall x p(x) \Leftrightarrow 1$, debido a que $Ap(x) = Re = \emptyset$ y $\exists x p(x) \Leftrightarrow 0$, por lo tanto: $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$ es una proposición verdadera.

Caso 2: Conjunto Unitario

Si $Re = \{a\}$ y $p(a) \Leftrightarrow 1$, $\forall x p(x) \Leftrightarrow 1$ y $\exists x p(x) \Leftrightarrow 1$, por lo tanto $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$ es una proposición verdadera y $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$ también lo es. Luego, se puede concluir que $\exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x p(x)$.

Caso 3: $N(Re) > 1$

En este caso siempre se cumple que: $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$. De aquí en adelante, vamos a considerar en la mayoría de los problemas este tipo de conjunto, como referencial para los predicados.

1.12.1 Leyes de los Cuantificadores

DE MORGAN	$\neg \forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x \neg p(x)$
	$\neg \exists x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall x \neg p(x)$
DISTRIBUTIVAS	$\forall x [p(x) \wedge q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$
	$\exists x [p(x) \vee q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\exists x p(x)] \vee [\exists x q(x)]$
	$[\forall x p(x) \vee \forall x q(x)]$	$\Rightarrow$	$\forall x [p(x) \vee q(x)]$
	$\exists x [p(x) \wedge q(x)]$	$\Rightarrow$	$[\exists x p(x)] \wedge [\exists x q(x)]$

Cuadro 1.13: Leyes de los Cuantificadores.

Ejemplo 1.57 Demostración de leyes de cuantificadores.

Demuestre formalmente la primera Ley de De Morgan de Cuantificadores.

$\forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$(Ap(x) = Re)$	Definición de cuantificador universal.
$\forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$[(A^C p(x)) = \emptyset]$	Complementación de Re.
$\forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$(A \neg p(x) = \emptyset)$	Propiedad de conjuntos de verdad.
$\neg \forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$\neg (A \neg p(x) = \emptyset)$	Negación de la proposición previa.
$\neg \forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x \neg p(x)$	Definición de cuantificador existencial.

Ejemplo 1.58 Demostración de leyes de cuantificadores.

Demuestre formalmente:

$$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$$

Solución:

$\forall x[p(x) \wedge q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$A[p(x) \wedge q(x)] = \mathrm{Re}$	Definición de cuantificador universal.
	$\Leftrightarrow$	$Ap(x) \cap Aq(x) = \mathrm{Re}$	Propiedad de conjuntos de verdad.
	$\Leftrightarrow$	$(Ap(x)=\mathrm{Re}) \wedge (Aq(x)=\mathrm{Re})$	Álgebra de conjuntos.
$\forall x[p(x) \wedge q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$	Definición de cuantificador universal.

Ejemplo 1.59 Demostración de leyes de cuantificadores.

Por contraejemplo se puede demostrar que las dos últimas leyes de cuantificadores no son válidas si se consideran las implicaciones recíprocas.

Sean:

$\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$p(x)$: x es par

$q(x)$: x es impar

Se puede comprobar que:

$\forall x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow 1$, $\forall x p(x) \Leftrightarrow 0$, $\forall x q(x) \Leftrightarrow 0$

$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow 0$, $\exists x p(x) \Leftrightarrow 1$, $\exists x q(x) \Leftrightarrow 1$

Es evidente entonces que, en este caso, las implicaciones:

$\forall x[p(x) \vee q(x)] \Rightarrow [\forall x p(x) \vee \forall x q(x)]$; y,

$[\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)] \Rightarrow \exists x[p(x) \wedge q(x)]$

son falsas.

1.13 Pares Ordenados y Producto Cartesiano

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dados dos conjuntos, construir el producto cartesiano entre ellos.
* Dados varios conjuntos, determinar la cardinalidad del producto cartesiano entre ellos.
* Demostrar las leyes del producto cartesiano.

Sabemos por la teoría de conjuntos que no hay diferencia entre los conjuntos $\{m, n\}$ y $\{n, m\}$, ya que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, sin importar el orden. Sin embargo, cuando queremos hablar de un par de elementos sobre los cuales nos interesa un orden específico, debemos referirnos al concepto de par ordenado.

Definición 1.33 (Par ordenado)

Un par ordenado es un conjunto de dos elementos, a y b, que tiene un orden; al elemento a se lo denomina primera componente y al elemento b se lo denomina segunda componente. Se representa simbólicamente por: (a, b).

Como el par es ordenado, no es lo mismo (a, b) que (b, a).

Una terna ordenada sería un conjunto de tres elementos ordenados y su representación es: (a, b, c).

Es importante anotar que existen conjuntos ordenados que pueden formarse con más de tres componentes.

Definición 1.34 (Producto cartesiano)

Sean dos conjuntos A y B, no vacíos, denominaremos producto cartesiano entre A y B, al conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto A, y la segunda al conjunto B. Simbólicamente, lo representaremos como: $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(x, y)/(x \in \mathrm{A}) \wedge (y \in \mathrm{B})\}$$

La representación gráfica de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ constituye el **plano cartesiano**, en el cual tanto los elementos de A como los de B se alinean en dos segmentos de recta. Un segmento representará al conjunto A y el otro al conjunto B.

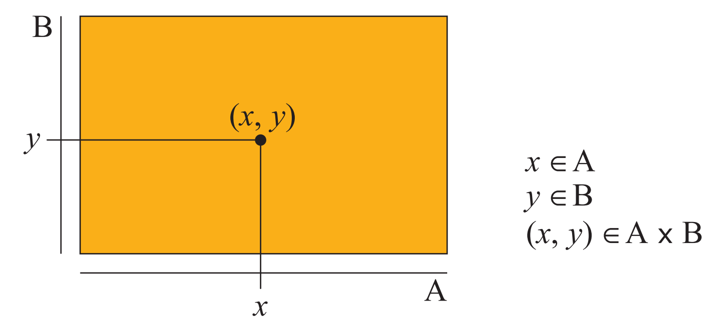


Figura 1.6: Plano Cartesiano.

Ejemplo 1.60 Producto cartesiano entre dos conjuntos.

$A = \{*, \&, \#\}$

$B = \{@, \$, \clubsuit\}$

$A \times B = \{(*,@), (*,\$), (*,\clubsuit), (\&,@), (\&,\$), (\&,\clubsuit), (\#,@), (\#,\$), (\#,\clubsuit)\}$

En este ejemplo la cardinalidad del conjunto resultante es $N(A \times B) = 9$.

Generalizando, la cardinalidad de $A \times B$ es:

$$N(A \times B) = N(A)\,N(B)$$

Ejemplo 1.61 Producto cartesiano entre tres conjuntos.

$A = \{m, n\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$C = \{\oplus, \clubsuit\}$

$A \times B \times C = \{(m,1,\oplus), (m,1,\clubsuit), (m,2,\oplus), (m,2,\clubsuit), (m,3,\oplus), (m,3,\clubsuit),$
$(n,1,\oplus), (n,1,\clubsuit), (n,2,\oplus), (n,2,\clubsuit), (n,3,\oplus), (n,3,\clubsuit)\}$

En este ejemplo la cardinalidad del conjunto resultante es $N(A \times B \times C) = 12$.

Generalizando, la cardinalidad de $A \times B \times C$ es:

$$N(A \times B \times C) = N(A)\,N(B)\,N(C)$$

Con esto se puede concluir que la **cardinalidad del producto cartesiano** es el producto de las cardinalidades de los conjuntos que intervienen en la operación.

Ejemplo 1.62 Cardinalidad del producto cartesiano.

Si A, B, C son conjuntos tales que: $N(A) = 2$, $N(B) = 3$, $N(C) = 4$ y $N(B \cap C) = 2$, determine $N[A \times (B \cup C)]$.

Solución:

En base a la definición de $N(A \times B)$, tenemos que:

$N[A \times (B \cup C)] = N(A)N(B \cup C)$

Por otra parte:

$N(B \cup C) = N(B) + N(C) - N(B \cap C) = 3 + 4 - 2 = 5$

Luego:

$N[A \times (B \cup C)] = (2)(5) = 10$

El producto cartesiano tiene las siguientes propiedades:

$A \times (B \cup C)$	$=$	$(A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \cap C)$	$=$	$(A \times B) \cap (A \times C)$
$A \times (B - C)$	$=$	$(A \times B) - (A \times C)$
$(A \cup B) \times C$	$=$	$(A \times C) \cup (B \times C)$
$(A \cap B) \times C$	$=$	$(A \times C) \cap (B \times C)$
$(A - B) \times C$	$=$	$(A \times C) - (B \times C)$

Cuadro 1.14: Propiedades del Producto Cartesiano.

Ejemplo 1.63 Demostración de propiedades del producto cartesiano.

Demuestre formalmente:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Solución:

$(x, y) \in [A \times (B \cup C)]$

$\equiv (x \in A) \wedge [y \in (B \cup C)]$	Definición de producto cartesiano.
$\equiv (x \in A) \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)]$	Definición de unión entre conjuntos.
$\equiv [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)]$	Aplicación de propiedad distributiva.
$\equiv [(x, y) \in (A \times B)] \vee [(x, y) \in (A \times C)]$	Definición de producto cartesiano.
$\equiv (x, y) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]$	Definición de unión entre conjuntos.

1.14 Relaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dados dos conjuntos, crear una relación entre ellos.
* Dada una relación, identificar su dominio y rango.
* Dada una relación, representarla mediante diagramas sagitales.

En lenguaje común, decimos que la tarifa del agua potable depende del número de metros cúbicos consumido en un período de tiempo, o bien decimos que el valor de una casa depende del número de metros cuadrados construidos. Aparece en estas frases el concepto de dependencia o relación. Cuando se formula una expresión que liga dos o más objetos entre sí, postulamos una relación (no necesariamente matemática). Las relaciones, en un sentido más general, se fundamentan en conjuntos arbitrarios.

Definición 1.35 (Relación)

Una relación establece la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos no vacíos A y B. Usualmente, al conjunto A se lo denomina conjunto de partida, y al conjunto B, de llegada. Simbólicamente, la relación se representa por R y se cumple que:

$$R \subseteq A \times B$$

Es decir, todos los subconjuntos de $A \times B$ constituyen una relación.

La cantidad máxima de relaciones que se pueden obtener a partir de dos conjuntos no vacíos A y B es: $2^{N(A)N(B)}$.

Ejemplo 1.64 Relaciones.

Al decir que Samuel es padre de Irma, se está construyendo una relación entre ambos.

Si Samuel es un elemento del conjunto $A = \{$Samuel, José, César$\}$, e Irma es un elemento del conjunto $B = \{$Janeth, Irma, Pedro$\}$, el par ordenado (Samuel, Irma) constituye un elemento del producto cartesiano $A \times B$ y es parte de la relación R: "x es padre de y", construida entre A y B, siendo $x \in A$, $y \in B$.

Se pueden construir relaciones entre TODOS o ALGUNOS elementos del primer conjunto con UNO o MÁS del segundo conjunto; esto incluye la posibilidad de que NINGÚN elemento del primer conjunto se relacione con NINGÚN elemento del segundo conjunto, estableciéndose una relación vacía.

Ejemplo 1.65 Relación vacía.

Basados en el ejemplo anterior, podría darse el caso que Samuel, José o César no sean padres de Janeth, Irma o Pedro, lo cual correspondería a una relación sin elementos.

Ejemplo 1.66 Cantidad de relaciones.

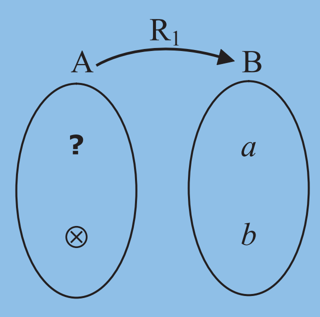
Dados los conjuntos $A = \{?, \otimes\}$ y $B = \{a, b\}$, determine analíticamente el número de relaciones posibles que se pueden obtener de A en B, y realice los diagramas sagitales correspondientes a todas las relaciones posibles.

Solución:

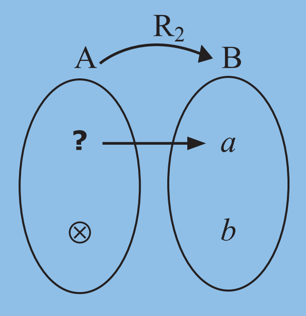
El número de relaciones de A en B es $2^{N(A)N(B)} = 2^{(2)(2)} = 2^4 = 16$

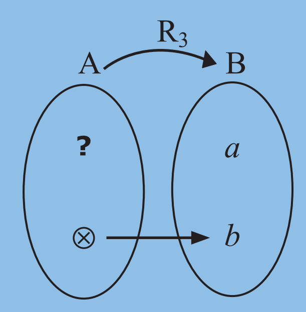
Diagramas sagitales:

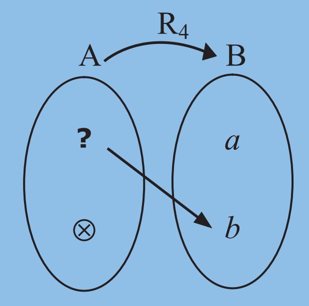
Caso 1: Ningún elemento del conjunto de partida está relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada (relación vacía).

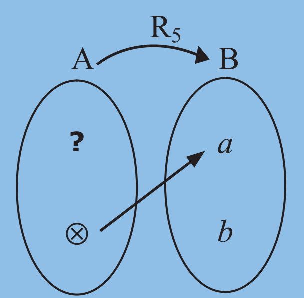


Caso 2: Relaciones de un solo elemento del conjunto de partida con uno solo del conjunto de llegada.

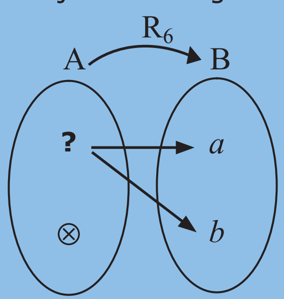


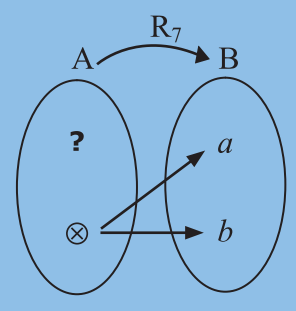




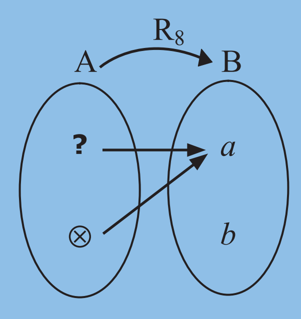


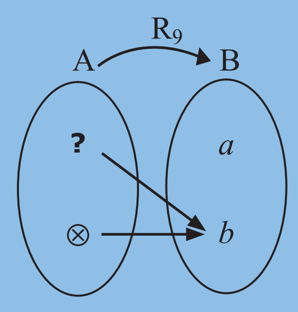
Caso 3: Relaciones de un solo elemento del conjunto de partida con dos del conjunto de llegada.



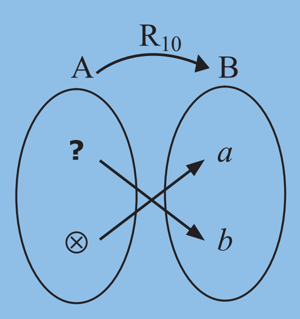


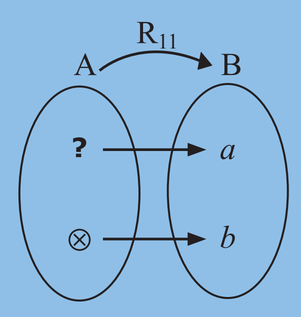
Caso 4: Relación de dos elementos del conjunto de partida con uno solo del conjunto de llegada.



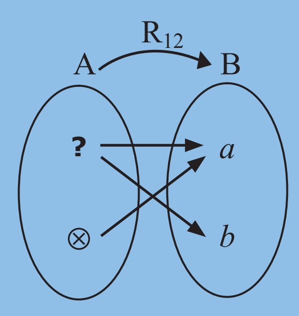


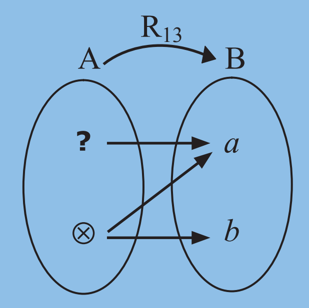
Caso 5: Relaciones de un elemento del conjunto de partida con uno solo del conjunto de llegada.

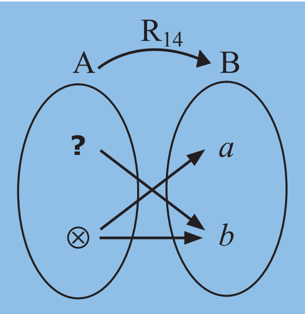


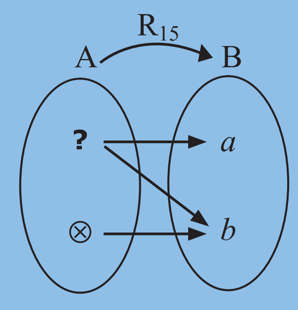


Caso 6: Relaciones de un elemento del conjunto de partida con dos del conjunto de llegada y el otro elemento del conjunto de partida con otro del conjunto de llegada.

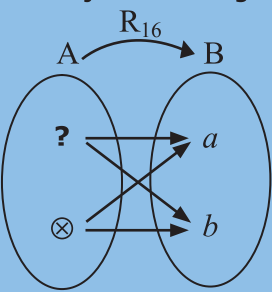








Caso 7: Todos los elementos del conjunto de partida están relacionados con todos los elementos del conjunto de llegada (producto cartesiano).



Definición 1.36 (Dominio de una Relación)

Dada una relación R, construida a partir de los conjuntos A y B, los elementos del conjunto A que establecen correspondencia constituyen el dominio de la relación. Se representa simbólicamente por: *dom* R.

No necesariamente todos los elementos del conjunto de partida forman parte del dominio de una relación.

Definición 1.37 (Rango de una Relación)

Dada una relación R, construida a partir de los conjuntos A y B, los elementos del conjunto B que se relacionan con elementos del dominio de R constituyen el rango de la relación. Se representa simbólicamente por: *rg* R.

Es común también denominar al rango de la relación como el recorrido, imagen o codominio de la misma.

No necesariamente todos los elementos del conjunto de llegada forman parte del rango de una relación.

Ejemplo 1.67 Dominio y rango de una relación.

A = {2, 4, 5}
B = {1, 3, 5}
R = {$(x, y)/x+y$ es un número primo}

R = {(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3)}
dom R = {2, 4}
rg R = {1, 3, 5}

Una relación puede ser representada mediante el uso de planos cartesianos o diagramas sagitales.

Ejemplo 1.68 Representación sagital de una relación.

A = {0, 2, 4, 6}
B = {1, 3, 5}

R = {$(x, y)/x>y$}
R = {(2,1), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3), (6,5)}

R
A B
0 1
2 3
4 5
6

Podemos observar que *dom* R = {2, 4, 6} y *rg* R = {1, 3, 5}.

Ejemplo 1.69 Relaciones.

Sean A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, B = {(0,0), (3,1), (4,2), (6,3), (8,4)} y R la relación de A en B definida por:

$$R = \{(a, (b, c))/a = b + c \wedge (a \in A) \wedge ((b, c) \in B)\}$$

Establezca los elementos de R.

Solución:

Partiendo de la condición:

$$a = b + c$$

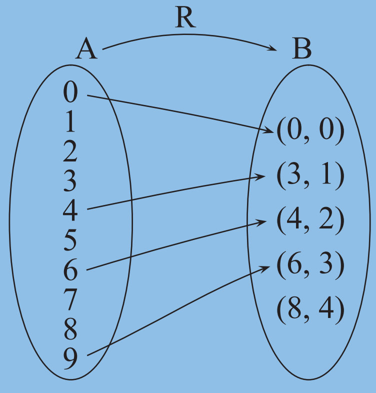
Tenemos que:

$(b, c) = (0,0) \Rightarrow a = 0 + 0 = 0$
$(b, c) = (3,1) \Rightarrow a = 3 + 1 = 4$
$(b, c) = (4,2) \Rightarrow a = 4 + 2 = 6$
$(b, c) = (6,3) \Rightarrow a = 6 + 3 = 9$

Note que la pareja restante $(8, 4)$ del conjunto B no satisface la condición dada.

De donde:

$R = \{(0, (0,0)), (4, (3,1)), (6, (4,2)), (9, (6,3))\}$



Adicionalmente, se puede concluir que: $dom\ R = \{0, 4, 6, 9\}$ y $N(dom\ R) = 4$; $rg\ R = \{(0,0), (3,1), (4,2), (6,3)\}$ y $N(rg\ R) = 4$.

1.15 Funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una relación entre dos conjuntos, identificar si es función.
* Dada una función entre conjuntos, determinar su tipo.
* Dadas dos funciones, construir de ser posible la composición entre ellas.
* Dada una función, analizar la existencia de su inversa.

Las funciones juegan papeles importantes en nuestras vidas. Como este capítulo está dedicado a conjuntos, y dado que el concepto de función aparecerá continuamente, se ha considerado conveniente desarrollar estas definiciones en la presente sección.

A Gottfried Leibniz se le adjudica haber utilizado por primera vez la palabra función (del latín ***functo***, que significa acto de realizar). La definición formal se le atribuye al alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Definición 1.38 (Función)

Una relación de A en B es una función si y sólo si el dominio de la relación es todo el conjunto de partida, y si a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el rango. Simbólicamente, esta definición se representa por:

1. $dom\ \mathrm{R} = \mathrm{A}$
2. $\forall x \in \mathrm{A} \forall y_1, y_2 \in \mathrm{B}[(x \mathrm{R} y_1) \wedge (x \mathrm{R} y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)]$

Para denotar funciones usualmente se utiliza la letra f.

De esta definición, se concluye que en una función no pueden existir dos elementos del conjunto de llegada relacionados con un mismo elemento del dominio, o lo que es igual, un elemento del dominio no puede estar relacionado con dos elementos diferentes del conjunto de llegada.

Cabe anotar que toda función es una relación, pero no toda relación representa una función.

Es posible que las funciones también sean representadas con las letras g, h...

En la expresión $y = f(x)$:

- x se conoce como la **variable independiente**.
- y se conoce como la **variable dependiente**.

Ejemplo 1.70 Relaciones y funciones.

Dados los conjuntos $\mathrm{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \rho\}$ y $\mathrm{B} = \{a, e, i, o, u\}$, se definen las siguientes relaciones:

R_1: $\mathrm{A} \to \mathrm{A}$, $\mathrm{R}_1 = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\delta, \delta), (\rho, \rho)\}$

R_2: $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $\mathrm{R}_2 = \{(\alpha, a), (\beta, e), (\delta, i), (\rho, o), (\rho, u)\}$

R_3: $\mathrm{B} \to \mathrm{B}$, $\mathrm{R}_3 = \{(a, e), (e, i), (i, o), (o, u)\}$

Determine si R_1, R_2 o R_3 representan funciones.

Solución:

R_1 es una función, puesto que $dom\ \mathrm{R}_1 = \mathrm{A}$, y a cada elemento del dominio de R_1 le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada.

R_2 no es una función, puesto que al elemento ρ del conjunto de partida le corresponde más de un elemento en el conjunto de llegada.

R_3 no es una función, puesto que $dom\ \mathrm{R}_3 \neq \mathrm{B}$.

Ejemplo 1.71 Relaciones y funciones.

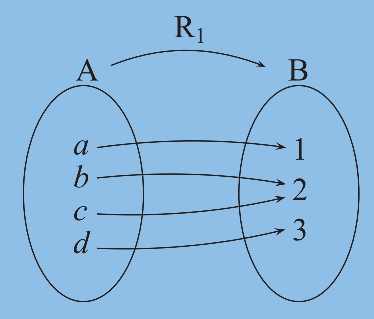
Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, y las relaciones:

$R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$
$R_2 = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 1)\}$

Determine si R_1 o R_2 constituyen funciones de A en B.

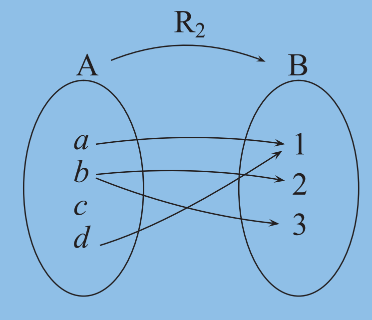
Solución:

$R_1: A \to B$



Sí constituye una función, ya que el dominio de R_1 es todo el conjunto de partida A, y a cada elemento del dominio le corresponde uno del conjunto de llegada.

$R_2: A \to B$



No es una función, porque el dominio no constituye todo el conjunto de partida A. También se puede observar que no se cumple la segunda condición de función para el elemento b.

Ejemplo 1.72 Funciones.

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$

$$f : A \to B$$
$$f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$$

$dom\ f = A$
$rg\ f = \{a, b\}$

En este caso, se dice que b es imagen de 2 y de 3, y que a es imagen de 1.

1.15.1 Tipos de funciones

Las funciones presentan diversas características, las cuales deben ser tipificadas para posteriores análisis. Estas características dependen de la cardinalidad de los conjuntos de partida y de llegada, así como de la relación que se establezca entre ellos.

De acuerdo a las características de las funciones, es posible realizar diferentes representaciones gráficas.

Definición 1.39 (Función Inyectiva)

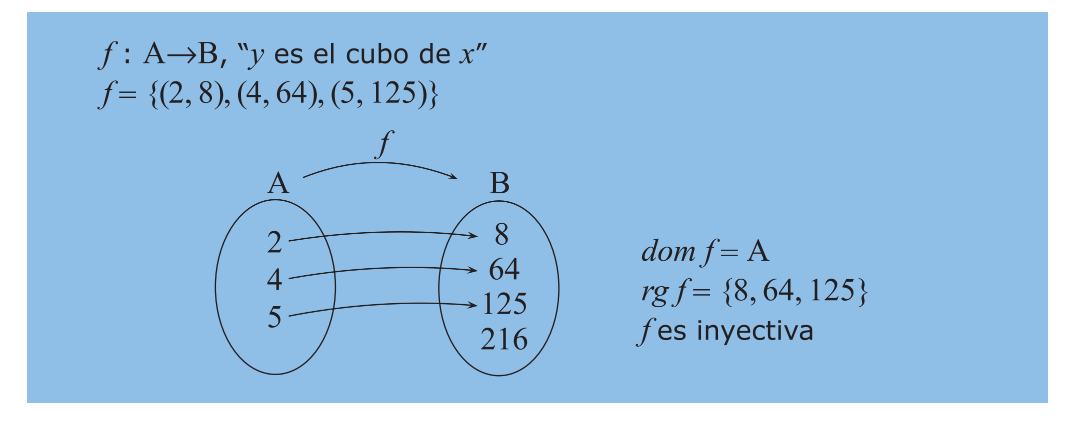
$f : A \to B$ es inyectiva $\Leftrightarrow \{\forall x_1, x_2 \in A[\neg(x_1 = x_2) \Rightarrow \neg(f(x_1) = f(x_2))]\}$

f es inyectiva si cada elemento del rango es imagen exclusiva de un único elemento del dominio.

Es necesario que $N(A) \leq N(B)$ para poder construir funciones inyectivas.

Ejemplo 1.73 Función Inyectiva.

$$A = \{2, 4, 5\}$$
$$B = \{8, 64, 125, 216\}$$



Si f es inyectiva, podemos regresar de $f(x)$ a x por un solo camino, con lo cual se garantiza que, dado un elemento del rango de f, se puede encontrar un solo elemento de su dominio que le corresponda.

Definición 1.40 (Función Sobreyectiva)

$f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow \{\forall y \in B\ \exists x \in A[y = f(x)]\}$

f es sobreyectiva si $rg\, f = B$.

Es necesario que $N(A) \geq N(B)$ para poder construir funciones sobreyectivas.

Ejemplo 1.74 Función Sobreyectiva.

$A = \{-1, 0, 1\}$
$B = \{0, 1\}$

$f: A \rightarrow B$, "y es el cuadrado de x"
$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

f
A
B
−1
0
1
0
1

$dom\, f = A$
$rg\, f = B$
f es sobreyectiva

Observaciones

En base a las definiciones anteriores, es importante anotar que:

- Las funciones que son sobreyectivas no necesariamente son inyectivas.
- Las funciones que son inyectivas no necesariamente son sobreyectivas.
- Es posible que una función no sea inyectiva, ni sobreyectiva.

Así mismo, existen funciones que poseen las dos características anteriormente señaladas, las cuales se definen a continuación.

Definición 1.41 (Función Biyectiva)

$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ es biyectiva si y sólo si f es inyectiva y f es sobreyectiva.

Ejemplo 1.75 Función Biyectiva.

A = {Guayas, El Oro, Los Ríos}
B = {Machala, Guayaquil, Babahoyo}

$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$, "$y$ es capital de x"
f = {(Guayas, Guayaquil), (El Oro, Machala), (Los Ríos, Babahoyo)}

$dom\ f = \mathrm{A}$
$rg\ f = \mathrm{B}$
f es biyectiva

Las funciones biyectivas tienen propiedades importantes, una de las cuales se explicará a continuación.

Definición 1.42 (Función Inversible)

$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ es inversible si y sólo si su relación inversa es una función de B en A.

A partir de esta definición, el lector podrá verificar el siguiente teorema.

Teorema 1.1

f es una función inversible si y sólo si es biyectiva.

Definición 1.43 (Función Inversa)

Si f : A→B es biyectiva, es posible construir la inversa f^{-1}: B→A. Esta nueva función permite invertir el sentido de la correspondencia, tal que a cada $y \in$ B se lo asocia con un único $x \in$ A.

La función inversa es f^{-1}: B→A, lo cual indica que el orden de los conjuntos cambia. Adicionalmente, se puede notar que el dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Ejemplo 1.76 Función Inversa.

En el ejemplo anterior la función f es biyectiva, entonces existe f^{-1}:

f^{-1}: B→A, "x es capital de y"

f^{-1} = {(Guayaquil, Guayas), (Machala, El Oro), (Babahoyo, Los Ríos)}

Podemos observar que $dom\ f = rg\ f^{-1}$ y $dom\ f^{-1} = rg\ f$.

Definición 1.44 (Función Compuesta)

Sean las funciones f: A→B y g : C→D, la función compuesta denotada por $g \circ f$ es una función que relaciona A con D, es decir, que a partir de un elemento x de A, se obtiene un elemento $g(f(x))$ de D.

La composición de funciones $g \circ f$ se ilustra en el siguiente gráfico, suponiendo que B = C:

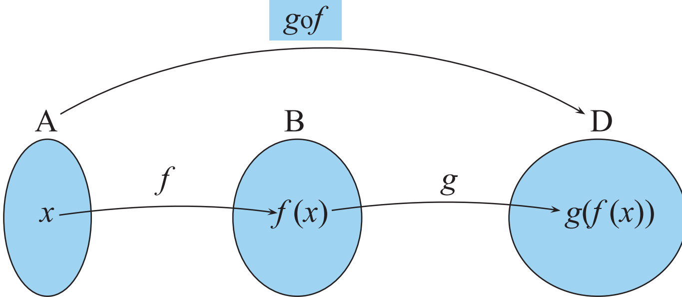


Figura 1.7: Composición de funciones $g \circ f$.

Es importante anotar que $g \circ f$ existe, si y sólo si: $rg\ f \subseteq dom\ g$.

Dadas dos funciones f y g:

$g \circ f$ es el conjunto de parejas de la forma $(x, g(f(x)))$. Considerando el gráfico anterior, si f y g son procesos, entonces $h = g \circ f$ es el resultado del proceso siguiente:

1. h recibe un elemento x y lo introduce en el proceso f para obtener $b = f(x)$
2. h introduce a b en el proceso g para obtener $g(b) = g(f(x))$
3. En resumen, h ha transformado a x en $h(x) = g(f(x))$

Lo anterior nos permite concluir que $dom(g \circ f) = \text{A}$, y que $rg(g \circ f) \subseteq rg\ g \subseteq \text{D}$.

La composición de funciones $f \circ g$, siendo g:B→C y f: C→A, se ilustra en el siguiente gráfico:

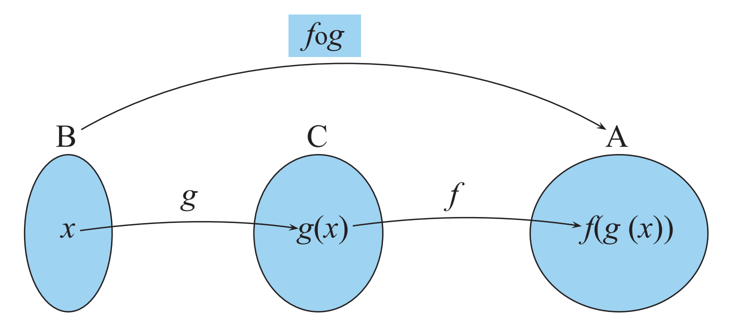


Figura 1.8: Composición de funciones $f \circ g$.

La función compuesta $f \circ g$ existe, si y sólo si: $rg\ g \subseteq dom\ f$.

Se cumple que $dom\ (f \circ g) = \text{B}$, y que $rg\ (f \circ g) \subseteq rg\ f \subseteq \text{A}$.

La composición de funciones, en general, no es conmutativa.

Ejemplo 1.77 Composición de funciones.

Considere los conjuntos $\text{A} = \{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit\}$ y $\text{B} = \{a, b, c, d, e\}$. Se tienen las funciones:

f : A→B dada por $f = \{(\clubsuit, b), (\blacklozenge, a), (\heartsuit, d), (\spadesuit, c)\}$

g : B→A dada por $g = \{(a, \clubsuit), (b, \clubsuit), (c, \blacklozenge), (d, \heartsuit), (e, \spadesuit)\}$

Es posible construir las funciones:

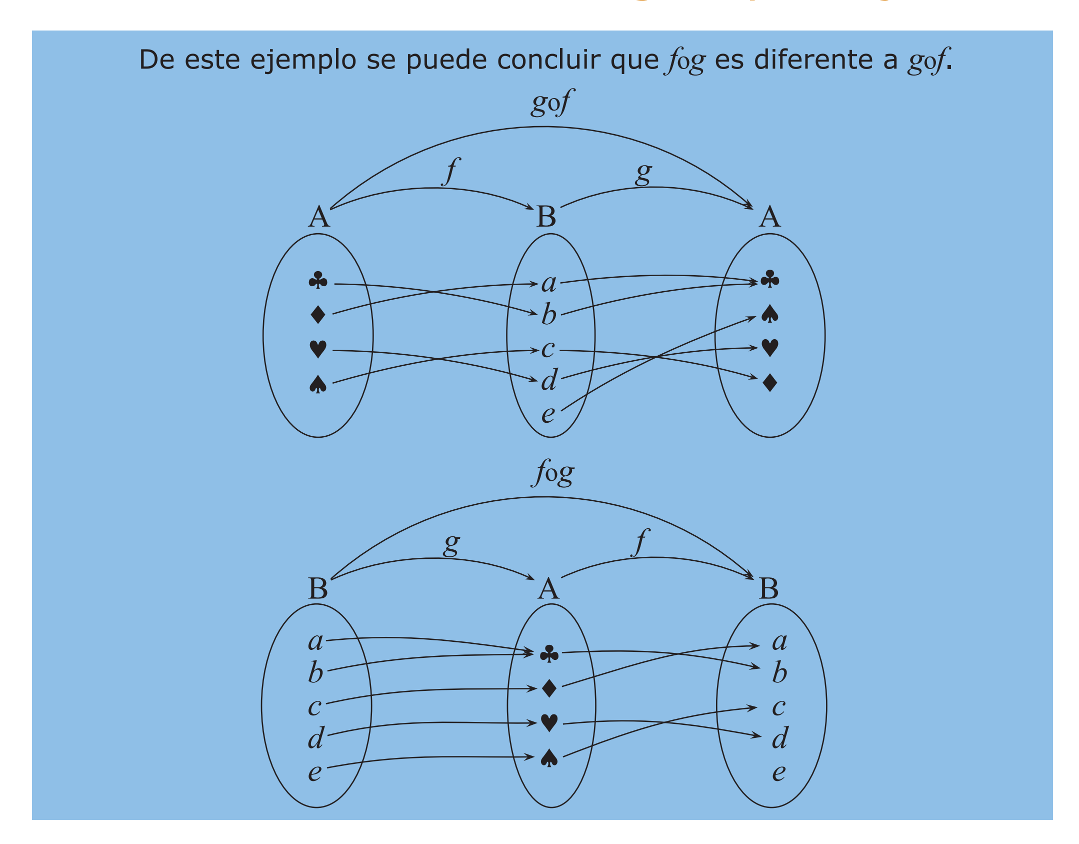
$g \circ f$: A →A

$g \circ f = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\blacklozenge, \clubsuit), (\heartsuit, \heartsuit), (\spadesuit, \blacklozenge)\}$

$f \circ g$: B →B

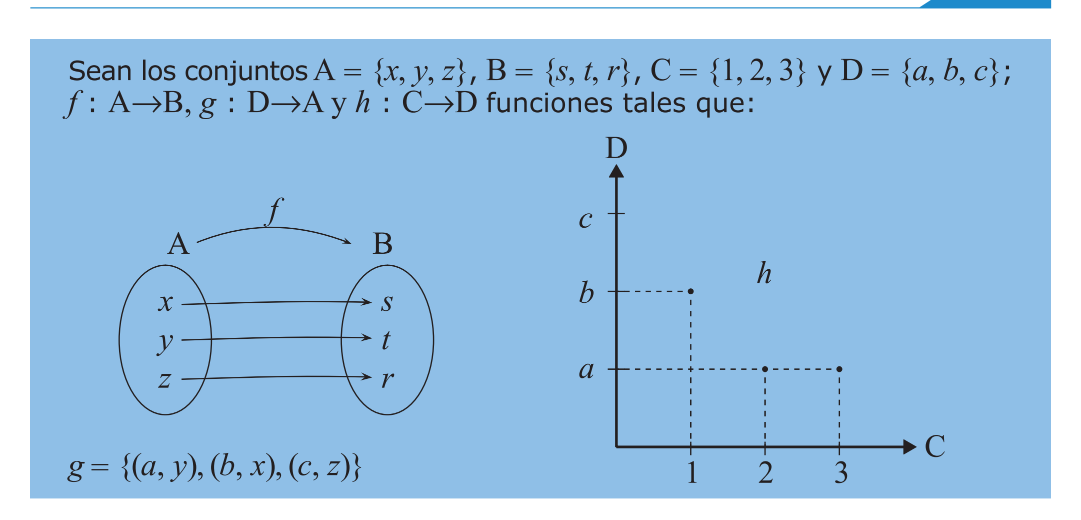
$f \circ g = \{(a, b), (b, b), (c, a), (d, d), (e, c)\}$

De este ejemplo se puede concluir que $f \circ g$ es diferente a $g \circ f$.



Ejemplo 1.78 Composición de funciones.

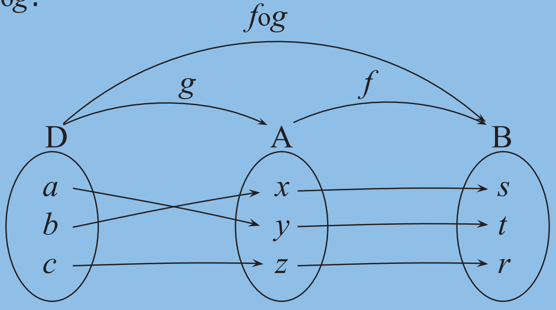
Sean los conjuntos $A = \{x, y, z\}$, $B = \{s, t, r\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ y $D = \{a, b, c\}$; $f : A \to B$, $g : D \to A$ y $h : C \to D$ funciones tales que:



Determine $((fog)oh)$

Solución:

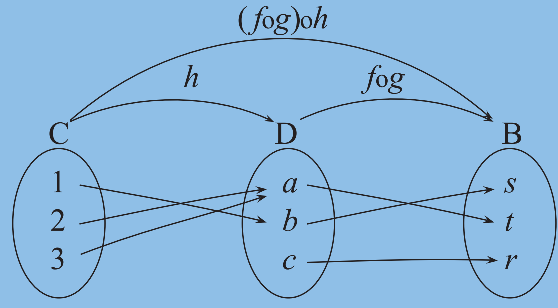
Planteamos fog:



$fog : D \rightarrow B$

$fog = \{(a, t), (b, s), (c, r)\}$, la cual es una función de D en B.

Ahora planteamos $((fog)oh)$:



$(fog)oh : C \rightarrow B$

$((fog)oh) = \{(1, s), (2, t), (3, t)\}$, la cual es una función de C en B.

Adicionalmente, se cumple que:

$$dom\ ((fog)oh) = dom\ h$$
$$rg\ ((fog)oh) \subseteq rg\ (fog)$$

Es posible construir las funciones compuestas $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$.

Ejemplo 1.79 Composición de funciones.

Considere los conjuntos $A = \{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. Se tienen las funciones:

$f : A \rightarrow B$ dada por $f = \{(\clubsuit, b), (\blacklozenge, a), (\heartsuit, d), (\spadesuit, c)\}$

$f^{-1} : B \rightarrow A$ dada por $f^{-1} = \{(a, \blacklozenge), (b, \clubsuit), (c, \spadesuit), (d, \heartsuit)\}$

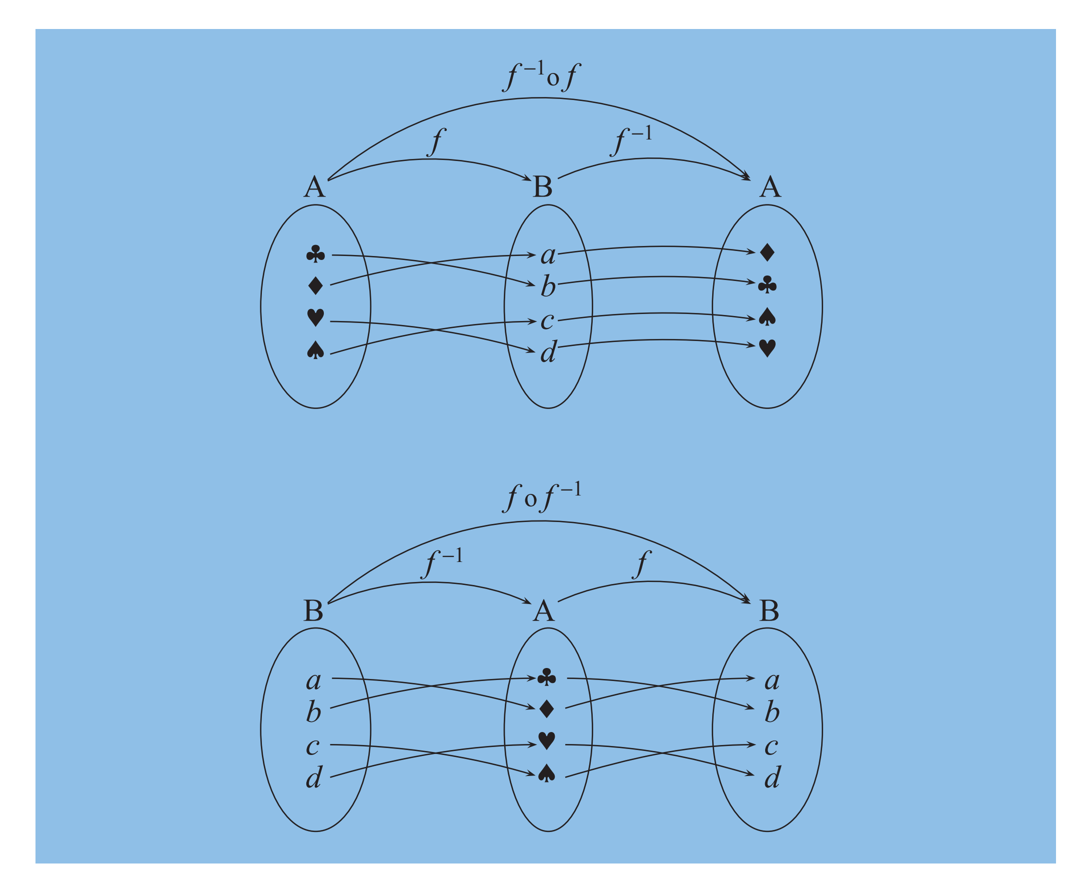
Es posible construir las funciones:

$f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$

$f^{-1} \circ f = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\blacklozenge, \blacklozenge), (\heartsuit, \heartsuit), (\spadesuit, \spadesuit)\}$

$f \circ f^{-1} : B \rightarrow B$

$f \circ f^{-1} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$



Las parejas que resultan en las dos composiciones tienen las mismas componentes. Una función con esta característica se conoce como función IDENTIDAD, la cual se denota por I. Como $x \in \mathrm{A}$, $y \in \mathrm{B}$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}(x)$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}(y)$, para que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$, es necesario que los conjuntos de partida y de llegada sean los mismos.

Ejemplo 1.80 Composición de funciones.

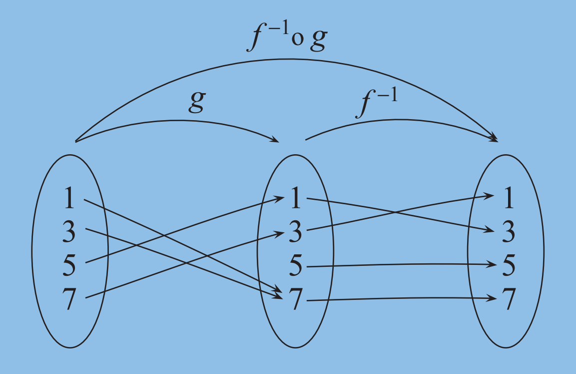
Dados los conjuntos A y B tales que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \{1, 3, 5, 7\}$ y la función f y g de A en B:

$$f = \{(1, 3), (3, 1), (5, 5), (7, 7)\}$$
$$g = \{(1, 7), (3, 7), (5, 1), (7, 3)\}$$

Determine $f^{-1} \circ g$.

Solución:

$$f^{-1} = \{(3, 1), (1, 3), (5, 5), (7, 7)\}$$



$$f^{-1} \circ g = \{(1, 7), (3, 7), (5, 3), (7, 1)\}$$

Adicionalmente, se cumple que:

$$dom\ (f^{-1} \circ g) = dom\ g$$
$$rg\ (f^{-1} \circ g) \subseteq rg\ f^{-1}$$

1.1 Proposiciones

1. Indique si cada enunciado es o no una proposición:

   a) 7415 es un número par.
   b) ¿Qué hora es?
   c) Los números divisibles para 8 son divisibles para 2.
   d) ¡Pare, por favor!
   e) El atardecer en la playa es romántico.
   f) La edad de Gloria es 17 años.
   g) Guayaquil es la capital económica de Ecuador.
   h) Galápagos es considerado Patrimonio Cultural de la Humanidad.
   i) Mi familia y yo viajaremos a la Sierra en fin de año.
   j) Ayer estuvo soleado pero hoy llueve torrencialmente.
   k) Mi palabra se siente levantada por un caballo lírico que salta.
   l) El mejor gobierno es el que gobierna menos.

2. Indique cuál de los siguientes enunciados no es una proposición:

   a) Hubo escasez de lluvias.
   b) Mi correo electrónico es turista@espol.edu.ec
   c) $5(3+4)=36$.
   d) 3 es un número par.
   e) Turismo.

3. Indique cuál de los siguientes enunciados es una proposición:

   a) ¿Qué estás haciendo?
   b) $3-x=7$.
   c) ¡Márchate!
   d) $3+x>7$.
   e) Neil Armstrong caminó sobre la Luna.

4. Indique cuál de los siguientes enunciados es una proposición:

   a) El sabor del color azul es dulce.
   b) 314159 es un número primo.
   c) $x^2+2x+1=0$.
   d) Disparen al ladrón.
   e) La edad del universo es de unos 15 mil millones de años.

5. Indique cuál de los siguientes enunciados es una proposición:

   a) Las rosas me cautivan.
   b) El amanecer es bello.
   c) 4 es divisible para 2.
   d) $45+18$.
   e) La Química es complicada.

6. Dados los siguientes enunciados:

   I: Disminuya la velocidad.
   II: $10-8=1$.
   III: Mi banca es gris.
   IV: Hola, ¿cómo estás?.

   Es verdad que:

   a) I y II son proposiciones.
   b) I y III son proposiciones.
   c) I y IV son proposiciones.
   d) II y III son proposiciones.
   e) Todos son proposiciones.

1.2 Operadores lógicos

7. Dadas las siguientes proposiciones:

   a: Elizabeth cumple con sus obligaciones.
   b: Elizabeth aprueba el examen.
   c: Elizabeth se va de vacaciones.
   d: Elizabeth trabaja.
   e: Elizabeth come.

   Traduzca literalmente las siguientes proposiciones:

   I) $a \rightarrow \neg [b \rightarrow (\neg c \vee d)]$
   II) $[b \wedge \neg (d \leftrightarrow \neg a)] \vee [(c \vee d) \rightarrow (d \wedge e)]$
   III) $c \rightarrow [(a \leftrightarrow d) \wedge (b \leftrightarrow \neg e)]$
   IV) $(a \wedge b) \leftrightarrow [c \vee (d \rightarrow \neg e)]$

8. Sean las proposiciones:

   a: Como espinaca. b: La Lógica es fácil. c: Me divierto con este deber.

   Parafrasee las siguientes proposiciones:
   a) $(a \wedge b) \leftrightarrow c$ b) $(b \wedge c) \rightarrow a$ c) $\neg a \rightarrow (\neg b \vee \neg c)$

9. Si la disyunción entre dos proposiciones es falsa, entonces la enunciación hipotética entre ellas también es falsa.

   a) Verdadero b) Falso

10. Si la negación de la disyunción entre dos proposiciones es verdadera, entonces la enunciación hipotética entre ellas también es verdadera.

    a) Verdadero b) Falso

11. Una contrarrecíproca de la proposición "Si estudio conscientemente, apruebo el curso de nivel cero" es "Si no estudio conscientemente, no apruebo el curso de nivel cero".

    a) Verdadero b) Falso

12. Defina simbólicamente las proposiciones e indique la traducción al lenguaje formal:
    a) La decisión depende del juicio o la intuición, pero no del dinero.
    b) Iré al estadio o al cine, en caso de que consiga dinero.
    c) El Sol brilla porque es el día del amor.
    d) A Juan no le agrada este ejercicio, pues no lo puede resolver.

13. Considerando las proposiciones:
    a: La información es correcta.
    b: Existe un incremento en los costos de producción.
    c: El analista tiene un error de apreciación.

    Traduzca al lenguaje formal la proposición: La información es incorrecta, sólo si existe un incremento en los costos de producción o el analista tiene un error de apreciación.

14. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   a) Quito es capital de Argentina o Buenos Aires es capital de Ecuador.
   b) 5 es menor que 10 y 8 no es un número primo.
   c) $[9 - 16 = (3 - 4)(3 + 4)] \vee [(-5)(-2) > 0]$

15. Indique cuál de las siguientes proposiciones es falsa:
   a) Si $2(3 + 5) = 16$ entonces $5(6 + 1) = 35$.
   b) Si $(4 + 5) = 20$ entonces $(6 + 7) = 12$.
   c) Si $(9 + 5) = 14$ entonces $(6 + 5) = 11$.
   d) Si $9(4 + 2) = 54$ entonces $9(4 + 1) = 14$.
   e) Si $3(4 + 5) = 28$ entonces $7(6 + 5) = 37$.

16. Una recíproca de la proposición "Carlos llega impuntual, siempre que se levanta tarde" es:
   a) Si Carlos se levanta tarde, entonces llega impuntual.
   b) Si Carlos llega impuntual, entonces se levanta tarde.
   c) Si Carlos no llega impuntual, entonces no se levanta tarde.
   d) Carlos llega impuntual, si no se levanta tarde.
   e) Si Carlos no llega impuntual, entonces se levanta tarde.

17. La traducción en el lenguaje formal de la proposición "Si tu eres inteligente y no actúas con prudencia, eres un ignorante en la materia", siendo las proposiciones:

   m: Tú eres inteligente.
   n: Tú actúas con prudencia.
   p: Tú eres un ignorante en la materia.

   es:
   a) $(m \wedge \neg n) \rightarrow p$
   b) $m \vee (n \vee p)$
   c) $p \rightarrow (m \wedge \neg n)$
   d) $(m \wedge \neg p) \rightarrow n$
   e) $m \rightarrow \neg(n \wedge \neg p)$

18. Empleando tablas de verdad, identifique una contrarrecíproca de la proposición "Siempre que tengo hambre y no tengo tiempo para comer, no me siento bien y no puedo estudiar".
   a) Si no tengo tiempo para comer y tengo hambre, me siento bien y puedo estudiar.
   b) Si no me siento bien ni puedo estudiar, tengo hambre o no tengo tiempo para comer.
   c) Si me siento bien y puedo estudiar, tengo hambre o no tengo tiempo para comer.
   d) Si no tengo hambre ni tengo tiempo para comer, me siento bien o puedo estudiar.
   e) Si me siento bien o puedo estudiar, no tengo hambre o tengo tiempo para comer.

19. Siendo la proposición "Si el país está bien económicamente, yo tengo empleo" verdadera, entonces la condición necesaria de la proposición es:

a) El país no está bien económicamente.
b) Yo tengo empleo.
c) Yo no tengo empleo.
d) El país está bien económicamente y yo tengo empleo.
e) Ni tengo empleo ni el país está bien económicamente.

20. "Si una función es diferenciable, es continua" es una proposición verdadera, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) Una función es diferenciable sólo si es continua.
b) Una función es continua sólo si es diferenciable.
c) La diferenciabilidad de una función es condición necesaria para la continuidad de la misma.
d) La diferenciabilidad de una función es condición suficiente para la continuidad de la misma.
e) La diferenciabilidad de una función es condición suficiente y necesaria para que sea continua.

21. Considere la proposición "Compro y uso el traje gris, si me pagan". Empleando tablas de verdad, identifique:

I) Una recíproca de la proposición dada.
a) Si compro y uso el traje gris, entonces me pagan.
b) Si no compro y no uso el traje gris, entonces no me pagan.
c) Si no compro o no uso el traje gris, entonces me pagan.
d) Si no me pagan, entonces no compro o no uso el traje gris.
e) Si me pagan, entonces compro y uso el traje gris.

II) Una inversa de la proposición dada.
a) Si compro y uso el traje gris, entonces me pagan.
b) Si no compro o no uso el traje gris, entonces no me pagan.
c) Si no compro o no uso el traje gris, entonces me pagan.
d) Si no me pagan, entonces no compro o no uso el traje gris.
e) Si me pagan, entonces compro y uso el traje gris.

III) Una contrarrecíproca de la proposición dada.
a) Si compro y uso el traje gris, entonces me pagan.
b) Si no compro o no uso el traje gris, entonces no me pagan.
c) Si no compro o no uso el traje gris, entonces me pagan.
d) Si no me pagan, entonces no compro o no uso el traje gris.
e) Si me pagan, entonces compro y uso el traje gris.

22. Considere las proposiciones:
a: Hoy es lunes. b: Obtengo un buen resultado.

La traducción de la proposición "Es suficiente que hoy sea lunes para que obtenga un buen resultado" es $b \rightarrow a$.

a) Verdadero b) Falso

1.3 Proposiciones simples y compuestas

23. Una traducción al lenguaje formal de "Guayaquil mejora su imagen, si la Municipalidad realiza obras o los ciudadanos colaboran en el aseo de las calles", siendo las proposiciones simples:
m: La Municipalidad realiza obras.
n: Los ciudadanos colaboran en el aseo de las calles.
p: Guayaquil mejora su imagen.

es: $p \to (m \vee n)$

a) Verdadero b) Falso

24. Considere las proposiciones simples:
a: Utilizo mis habilidades matemáticas.
b: Resuelvo bien los ejercicios.
c: Hago un buen deber.

La traducción de la proposición compuesta "Es necesario que utilice mis habilidades matemáticas para que resuelva bien los ejercicios y haga un buen deber", es $a \to (b \wedge c)$.

a) Verdadero b) Falso

25. Una traducción al lenguaje formal de "Mis padres me compran un carro sólo si me porto bien y apruebo este curso", siendo las proposiciones simples:
m: Mis padres me compran un carro.
n: Yo me porto bien.
p: Yo apruebo este curso.

es: $(n \wedge p) \to m$

a) Verdadero b) Falso

26. Si la proposición $\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ es falsa, entonces la proposición $p \to (q \wedge r)$ es:

a) Verdadera b) Falsa

27. Si se consideran las siguientes proposiciones simples:
m: Viajo al exterior.
n: Apruebo el curso de nivel cero.
p: Obtengo una beca.

Una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Viajo al exterior sólo si apruebo el curso de nivel cero y obtengo una beca", es:

a) $\neg p \to (m \wedge n)$
b) $\neg m \to \neg(n \wedge p)$
c) $\neg(n \wedge \neg p) \vee m$
d) $m \to (n \wedge p)$
e) $(n \wedge \neg p) \to m$

28. Si la proposición $[(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)] \wedge [p \wedge (\neg r \wedge s)]$ es verdadera, entonces es cierto que:

a) $(p \vee q)$ es falsa.

b) $(q \wedge s)$ es verdadera.

c) $[(r \vee s) \wedge q]$ es falsa.

d) q es falsa.

e) $(p \wedge \neg r)$ es falsa.

29. Sean las proposiciones simples:
a: Te gustan las matemáticas. b: Te gusta este deber.

Traduzca las siguientes proposiciones compuestas al lenguaje común:

a) $\neg a \vee b$ b) $a \wedge \neg b$ c) $a \rightarrow b$ d) $\neg b \rightarrow \neg a$ e) $(a \vee \neg a) \rightarrow b$

30. Dadas las proposiciones simples:

p: Necesito un doctor.
q: Necesito un abogado.
r: Tengo un accidente.
s: Estoy enfermo.

Una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Si estoy enfermo, necesito un doctor; y si tengo un accidente, necesito un abogado", es:

a) $(s \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow q)$

b) $(s \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q)$

c) $(s \wedge p) \wedge (\neg r \rightarrow q)$

d) $(s \vee p) \wedge (r \rightarrow q)$

e) $(s \rightarrow p) \wedge (r \wedge q)$

31. Dadas las proposiciones simples:
p: La guerra se detiene. q: Sigo estudiando. r: Sigo trabajando.

Una negación de la proposición compuesta "Si la guerra se detiene, entonces podré seguir estudiando o trabajando", es:

a) $(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$

b) $\neg (p \wedge q \wedge r)$

c) $\neg (p \wedge q) \wedge \neg r$

d) $(\neg p \vee q) \wedge \neg r$

e) $\neg [p \rightarrow (q \vee r)]$

32. Dadas las proposiciones simples:
p: Pedro realizó un paseo en grupo.
q: Pedro preparó el mejor informe de la clase.
r: Encontré a Pedro visitando el Centro Comercial San Marino.

Una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Pedro realizó un paseo en grupo y preparó el mejor informe de la clase, puesto que lo encontré visitando el Centro Comercial San Marino", es:

a) $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

b) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

c) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$

d) $r \rightarrow (\neg p \wedge q)$

e) $r \rightarrow (p \wedge q)$

33. Dadas las proposiciones simples:

p: Hoy es domingo.
q: Tengo que estudiar teorías de aprendizaje.
r: Aprobaré el curso.

Una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Hoy es domingo pero tengo que estudiar teorías de aprendizaje, o no aprobaré el curso", es:

a) $(p \wedge q) \vee r$
b) $p \wedge q \wedge r$
c) $(p \vee q) \vee r$
d) $(p \wedge q) \vee \neg r$
e) $(p \wedge q) \rightarrow r$

34. Dadas las proposiciones simples:

a: Luis llega a tiempo.
b: Luis se levanta temprano.
c: Luis desayuna.

Una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Para que Luis desayune y llegue a tiempo es necesario que se levante temprano", es:

a) $c \rightarrow (a \wedge b)$
b) $(a \wedge b) \rightarrow c$
c) $a \rightarrow (b \wedge c)$
d) $(c \wedge a) \rightarrow b$
e) $(c \rightarrow b) \wedge a$

35. Dadas las proposiciones simples:

m: Se realiza una gran fiesta.
n: Hago bien este deber.
p: Mis amigos están de acuerdo.

Una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Se realiza una gran fiesta sólo si hago bien este deber y mis amigos están de acuerdo", es:

a) $(n \wedge \neg p) \rightarrow m$
b) $\neg p \rightarrow (m \wedge n)$
c) $\neg(n \wedge \neg p) \vee m$
d) $m \rightarrow (n \wedge p)$
e) $\neg m \rightarrow \neg(n \wedge p)$

36. Dadas las proposiciones simples:

p: Estudio Historia.
q: Estudio Geografía.
r: Estudio Matemáticas.

Empleando tablas de verdad, identifique una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Si estudio Historia o Geografía, entonces estudio Matemáticas".

a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
b) $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$
c) $(p \rightarrow r) \wedge \neg q$
d) $\neg r \rightarrow (p \wedge q)$
e) $q \rightarrow (\neg p \wedge r)$

37. Si la proposición $[(a \wedge \neg b) \rightarrow d] \vee \neg(d \vee e)$ es falsa, entonces es verdad que:

a) $(b \vee a)$ es falsa.

b) $(\neg e \vee \neg d)$ es falsa.

c) $(d \vee a)$ es falsa.

d) $(a \rightarrow d)$ es falsa.

e) $(e \rightarrow a)$ es falsa.

38. Si $p \rightarrow q$ representa una proposición falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p \vee \neg(\neg q \wedge \neg p)$

b) $\neg q \wedge \neg p$

c) $(p \wedge q) \vee (\neg p \rightarrow q)$

d) $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)$

e) $(p \wedge \neg q) \vee \neg(q \wedge \neg p)$

39. Identifique las proposiciones simples, los operadores lógicos presentes y traduzca al lenguaje formal las proposiciones dadas:

a) Si un número es divisible para dos, no es primo.
b) Si estudias, aprenderás, si no estudias te arrepentirás.
c) Si x satisface la ecuación $x^2+9=25$, el triángulo es rectángulo y la longitud de la hipotenusa es 4; por el contrario, si x no satisface la ecuación dada, no hay manera de calcular el área de la superficie del triángulo.
d) Si me quieres, te quiero; si no me quieres, te quiero igual.

40. Si $\neg p \wedge q$ es una proposición verdadera, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$

b) $q \vee (\neg p \leftrightarrow r)$

c) $q \rightarrow (p \wedge q)$

d) $\neg p \veebar q$

e) $p \vee (q \vee r)$

41. Si $\neg(p \wedge q)$ es una proposición falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p \vee \neg(\neg q \wedge \neg p)$

b) $\neg q \wedge \neg p$

c) $(p \wedge q) \vee (\neg p \rightarrow q)$

d) $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)$

e) $(p \wedge \neg q) \vee \neg(q \wedge \neg p)$

1.4 Formas proposicionales

Para los dos ejercicios siguientes, considere que $f(p, q, r)$ representa una forma proposicional de tres variables.

42. Si la forma proposicional $f(p, q, r)$ es tautológica, entonces $f(0, 0, 0)$ es una proposición falsa.

a) Verdadero

b) Falso

43. Si la forma proposicional $f(p, q, r)$ es una contradicción, entonces $f(1, 1, 1)$ es una proposición verdadera.

a) Verdadero

b) Falso

Para el siguiente ejercicio considere que $f(p, q, r, s)$ representa una forma proposicional de cuatro variables.

44. Si la forma proposicional $f(p, q, r, s)$ es una contradicción, entonces $[f(1,0,1,1) \rightarrow f(0,1,0,0)] \equiv 0$.

a) Verdadero
b) Falso

45. Si p, q y r son variables proposicionales, entonces $\neg p \rightarrow (q \vee \neg r)$ es una contradicción.

a) Verdadero
b) Falso

46. Si p, q y r son variables proposicionales, entonces $[(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una forma proposicional tautológica.

a) Verdadero
b) Falso

47. Identifique cuál de las siguientes formas proposicionales NO es tautológica:

a) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \vee q)$
b) $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
c) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
e) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

48. Identifique cuál de las siguientes formas proposicionales es tautológica:

a) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$
b) $\neg(\neg p \wedge q)$
c) $p \vee (p \wedge q)$
d) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
e) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

49. Una expresión M, para que la forma proposicional $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \mathrm{M}$ sea tautológica, es:

a) $p \wedge q$
b) $\neg p \wedge q$
c) $p \rightarrow \neg q$
d) $\neg p$
e) $\neg q$

50. Identifique cuál de las siguientes formas proposicionales NO es tautológica:

a) $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
b) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$
c) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$
d) $[(\neg q \rightarrow \neg p)] \rightarrow \neg q$
e) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

51. Si p y q son dos formas proposicionales tautológicas, entonces es verdad que:

a) $p \rightarrow q$ no es una forma proposicional tautológica
b) $p \vee \neg p$ es una contradicción
c) $q \rightarrow \neg p$ es una contingencia
d) $p \wedge q$ es una forma proposicional tautológica
e) $q \rightarrow \neg p$ no es una contradicción

1.5 Propiedades de los operadores lógicos

52. Empleando álgebra proposicional, identifique cuál de las siguientes formas proposicionales NO es tautológica.

    a) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \to [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$
    b) $[p \wedge (p \to q)] \to q$
    c) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \wedge r)$
    d) $[(p \to q) \wedge p] \to q$
    e) $(p \to 0) \to \neg p$

53. Dada la proposición: "No estoy satisfecho, puesto que no me dieron el aumento de sueldo", identifique cuál de las siguientes proposiciones no es equivalente.
    a) Si me dan aumento de sueldo, estoy satisfecho.
    b) Si no me dan aumento de sueldo, no estoy satisfecho.
    c) Si estoy satisfecho, me dan aumento de sueldo.
    d) Me dieron aumento de sueldo o no estoy satisfecho.
    e) No me dieron aumento de sueldo sólo si no estoy satisfecho.

54. Empleando álgebra proposicional, identifique cuál de las siguientes formas proposicionales NO es una tautología.

    a) $\neg(p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$
    b) $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$
    c) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q$
    d) $[\neg p \wedge (\neg p \vee q)] \vee p$
    e) $[p \wedge (p \vee q)] \to q$

55. Considere las variables proposicionales p, q y r. Empleando álgebra proposicional, determine si la forma proposicional $(p \to q) \wedge \neg(q \to r)$ es tautología, contradicción o contingencia.

56. Demuestre que la siguiente forma proposicional es tautológica.
    $[(p \to q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$

57. Empleando álgebra proposicional, determine si las siguientes formas proposicionales son tautología, contradicción o contingencia.

    a) $(r \wedge s) \vee \neg s$
    b) $(p \to q) \to (q \to \neg p)$
    c) $\neg p \to (p \wedge q)$
    d) $(p \wedge q) \wedge (p \to \neg q)$
    e) $(p \vee q) \to [p \vee (\neg p \wedge q)]$

58. Empleando álgebra proposicional, determine si las siguientes formas proposicionales son: tautología, contradicción o contingencia.

    I) $\neg p \wedge (p \leftrightarrow q)$
    II) $(p \wedge q) \wedge (p \to \neg q)$
    III) $(p \wedge q) \wedge \neg r$
    IV) $[(p \to q) \wedge \neg r] \to \neg r$

59. Una negación de la proposición "Me comporto bien en mi hogar sólo si soy un buen hijo" es la proposición "Me comporto bien y no soy un buen hijo".

    a) Verdadero
    b) Falso

60. La Ley de la Contradicción establece que una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo.

a) Verdadero b) Falso

61. La Ley del Tercero Excluido establece que una proposición o sólo puede ser falsa o sólo puede ser verdadera, pero no puede tomar un tercer valor de verdad.

a) Verdadero b) Falso

62. La Ley de la Doble Negación establece que una proposición negada dos veces vuelve a tomar su valor de verdad original.

a) Verdadero b) Falso

63. Enuncie y luego demuestre mediante una tabla de verdad:

a) Una de las leyes distributivas. b) Una de las leyes de De Morgan.

64. La proposición: "Si se es inteligente o estudioso, entonces se es aplicado"; es lógicamente equivalente a:

a) Si no se es inteligente, entonces no se es ni estudioso ni aplicado.
b) Si se es inteligente, entonces se es aplicado y si se es estudioso entonces se es aplicado.
c) Si se es inteligente, entonces se es estudioso y aplicado.
d) Si se es inteligente, entonces se es aplicado pero no se es estudioso.

1.6 Razonamientos

65. Un razonamiento es válido si y sólo si su estructura lógica es una forma proposicional tautológica.

a) Verdadero b) Falso

66. El razonamiento: "Si te gustan las Matemáticas, entonces eres hábil para la Geometría. Luego, no te gustan las Matemáticas", es válido.

a) Verdadero b) Falso

67. El razonamiento "Si trabajo arduamente gano un buen sueldo, pero no gano un buen sueldo. Por lo tanto, no trabajo arduamente", es válido.

a) Verdadero b) Falso

68. Dado el razonamiento $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow C$, donde:

H_1: Si lo intento con ahínco y tengo talento, entonces me convierto en músico.

H_2: Si me convierto en músico, seré feliz.

Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:

a) Voy a ser feliz.
b) Si me convierto en músico, entonces lo intento con ahínco.
c) No me convierto en músico.
d) No tengo talento.
e) Si no voy a ser feliz, entonces no lo intento con ahínco o no tengo talento.

69. Dado el razonamiento $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow C$, donde:

H_1: Si apruebo todas las materias entonces me voy de vacaciones por un mes.

H_2: Me voy de vacaciones por un mes y compraré muchos recuerdos.

Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:

a) No me voy de vacaciones por un mes.
b) Apruebo todas las materias y compraré muchos recuerdos.
c) No apruebo todas las materias y no me voy de vacaciones por un mes.
d) Me voy de vacaciones por un mes.
e) Apruebo todas las materias.

70. Dadas las siguientes hipótesis:

H_1: Si el Gobierno no realiza las gestiones apropiadas, entonces el evento no se realizará en nuestro país.

H_2: El turismo se reactiva en nuestro país.

H_3: El evento se realizará en nuestro país.

Una conclusión que puede inferirse a partir de ellas es:

a) El evento no se realizará en nuestro país.
b) El turismo no se reactiva en nuestro país.
c) El turismo se reactiva en nuestro país y el Gobierno no realiza las gestiones apropiadas.
d) El Gobierno no realiza las gestiones apropiadas.
e) Si el Gobierno realiza las gestiones apropiadas, el turismo se reactiva en nuestro país.

71. Para que el razonamiento $[p \wedge (p \to q)] \to \mathrm{C}$ sea válido, la conclusión C puede ser reemplazada por una de las siguientes formas proposicionales:

a) $\neg q$ b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \wedge \neg q$ d) $p \wedge q$ e) $\neg p$

72. Dado el razonamiento $(\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2) \to \mathrm{C}$, donde:

H_1: Si estudio, apruebo el curso de nivel cero.

H_2: Apruebo el curso de nivel cero y viajo a Galápagos.

Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:

a) No apruebo el curso de nivel cero.
b) No estudio y no apruebo el curso de nivel cero.
c) Estudio y viajo a Galápagos.
d) Apruebo el curso de nivel cero.
e) Estudio y no viajo a Galápagos.

73. Dadas las siguientes hipótesis de un razonamiento.

H_1: $\neg p \to q$ H_2: $p \wedge \neg r$ H_3: $\neg p \to r$

Una conclusión para que el razonamiento sea válido es:

a) $p \wedge q$ b) $p \to q$ c) $\neg p \to r$ d) $p \to r$ e) $p \to (q \wedge r)$

74. Dado el razonamiento $(\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2) \to \mathrm{C}$, donde:

H_1: Si se concluye con éxito la construcción del nuevo parque en el Barrio del Centenario, se cooperará para el embellecimiento de la urbe.

H_2: Se cooperará para el embellecimiento de la urbe y se incrementará la captación de más turistas.

Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:

a) No se cooperará para el embellecimiento de la urbe.
b) Se cooperará para el embellecimiento de la urbe.
c) Se concluye con éxito la construcción del nuevo parque en el Barrio del Centenario y se incrementará la captación de más turistas.
d) No se incrementará la captación de más turistas y no se cooperará para el embellecimiento de la urbe.
e) Se concluye con éxito la construcción del nuevo parque en el Barrio del Centenario.

75. Dado el razonamiento $[\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2 \wedge \mathrm{H}_3 \wedge \mathrm{H}_4] \to \mathrm{C}$, donde:

H_1: Si $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ entonces $m(\widehat{\beta}) = 45^{\circ}$

H_2: Si $m(\widehat{\beta}) = 45^{\circ}$ entonces $m(\widehat{\alpha}) = 90^{\circ}$

H_3: O $\widehat{\beta}$ es recto o $m(\widehat{\beta})$ no es igual a 90°

H_4: $\widehat{\theta}$ no es recto

Una conclusión C que hace el razonamiento válido es:

a) $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ b) $\neg(\hat{\alpha} = \hat{\beta})$ c) $m(\hat{\theta}) = 90^o$ d) $m(\hat{\beta}) = 45^o$
e) Marque esta opción si todas las anteriores NO hacen válido el razonamiento.

76. Dadas las siguientes proposiciones:

H_1: Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vio partir el coche de Andrés.

H_2: Si Andrés no dice la verdad, entonces Juan no vio partir el coche de Andrés.

H_3: Andrés dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen.

H_4: El reloj está adelantado.

Se puede inferir que:

a) Juan no llegó antes de las diez.
b) Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen.
c) Juan no vio partir el coche de Andrés o éste estaba en el edificio en el momento del crimen.
d) Andrés dice la verdad.
e) Marque esta opción si ninguna de las anteriores es una conclusión válida.

77. Determine si el siguiente razonamiento es o no válido: "Si estudio o si soy un genio, aprobaré el nivel 0. Me permitirán tomar el nivel 100 si apruebo el nivel 0. Por lo tanto, no me permiten tomar el nivel 100 sólo si no soy un genio".

78. Sin usar tablas de verdad, determine la validez del siguiente razonamiento: "Si el Congreso asigna los fondos, el proyecto será ejecutado. El Congreso asigna los fondos sólo si hay consenso entre los diputados. No hay consenso entre los diputados. Por lo tanto, el proyecto no será ejecutado".

79. Demuestre que el siguiente razonamiento es válido: "Esta ley será aprobada en esta sesión del Congreso si y sólo si es apoyada por la mayoría legislativa. Es apoyada por la mayoría legislativa o el Presidente de la República se opone a ella. Si el primer mandatario se opone a ella, entonces será pospuesta en las deliberaciones del Congreso Nacional. Por lo tanto, esta ley será aprobada en esta sesión o será pospuesta en las deliberaciones del Congreso Nacional".

80. Si se tiene un razonamiento con las siguientes hipótesis:

H_1: La dolarización es difícil o no les gusta a muchas personas.

H_2: Si las medidas económicas son viables, entonces la dolarización no es difícil.

Determine si la siguiente conclusión: "Si las medidas económicas no son viables, a muchas personas no les gusta la dolarización", hace válido el razonamiento.

1.7 Demostraciones

81. Para demostrar que $p \rightarrow q$ es verdadero, por el método de reducción al absurdo, suponemos que $\neg p$ es verdadero y obtenemos una contradicción con q.

a) Verdadero   b) Falso

82. Utilice el método directo para demostrar que:

a) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ b) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

83. Utilice el método de reducción al absurdo para demostrar las siguientes proposiciones:
a) Si $(p \rightarrow q)$ y p, entonces q.
b) Si $(p \vee q)$ y $\neg q$, entonces p.
c) Si p se cumple, entonces $(p \vee q)$ se cumple.

1.8 Conjuntos

84. Determine cuál de los siguientes conjuntos es vacío:
a) $A=\{\{\varnothing\}\}$ b) $D=\{\varnothing\}$ c) $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ d) $C=\{\varnothing,\varnothing\}$ e) $M=\{x/x \neq x\}$

85. Sean A, B, C, D y M como en el ejercicio anterior.
Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
a) $N(A) = N(D)$ d) $N(C) = 1$
b) $N(D) = N(C)$ e) $N(B) = N(C) + 1$
c) $N(C) = N(M)$

1.9. Cuantificadores

86. Identifique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:
a) $5 = \{5\}$ d) $\{4, 8, 2^3, 3\} = \{(-2)^2, 8, 3\}$
b) $\{\} \notin \varnothing$ e) $\{2, 4\} = \{\{2\}, \{4\}\}$
c) $1 \in \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$

87. Siendo $A = \{a, \{b\}, c, \{d, e\}\}$ y $B = \{b, c\}$, encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\neg(b \in a)$ b) $B \subseteq A$ c) $B \in A$ d) $A \cap B = \{c\}$ e) $\{b\} \in B$

88. Dado el referencial $Re = \{x/x$ es una letra del alfabeto castellano$\}$ y los conjuntos A, B, C y D definidos por:

$A = \{x/x$ es vocal de la palabra COMPUTACION$\}$

$B = \{x/x$ es vocal de la palabra ELECTRONICA$\}$

$C = \{x/x$ es consonante de la palabra BARCELONA$\}$

$D = \{x/x$ es consonante de la palabra ENUMERACION$\}$

a) Tabule A, B, C y D.
b) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $N(A) = N(B)$
II) $A = B$
III) $E \in A$

89. ¿Cuál de las siguientes agrupaciones define un conjunto?
Si define un conjunto, identifique si es vacío, unitario, finito o infinito.

a) Los números con más suerte en la lotería
b) Los números pares mayores que tres
c) Los libros más interesantes de matemáticas
d) Un número primo par

90. Sea el conjunto $Re=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces es verdad que:

a) $\exists x\,(x + 3 < 1)$
b) $\forall x\,(x + 3 < 5)$
c) $\forall x\,(x > 1)$
d) $\exists x\,(x + 3 < 5)$
e) $\forall x\,(x^2 - 4x + 3 = 0)$

91. Sea $Re = \{x/x$ es ser humano$\}$. Traduzca al lenguaje común las siguientes proposiciones.

a) $\forall x\,[(x$ es vegetariano$) \wedge (x$ come zanahorias$)]$
b) $\exists x\,[(x$ es vegetariano$) \vee (x$ come zanahorias$)]$
c) $\forall x\,[(x$ es vegetariano$) \wedge \neg(x$ come zanahorias$)]$

92. Determine el conjunto potencia de los siguientes conjuntos dados.

a) $A=\{1, 2, 3, 4\}$ b) $B=\{\square, \bigcirc, \triangle\}$ c) $C=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

93. Sea $A = \{a, \{b\}\}$. Entonces es verdad que:

a) $\emptyset \in A$ b) $a \subseteq A$ c) $\{\{b\}\} \in A$ d) $N(P(P(A))) = 8$ e) $\{\{b\}\} \in P(A)$

94. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(A \subseteq B) \leftrightarrow \forall x\,[(x \in A) \to (x \in B)]$

b) $(A \subseteq B) \to [(A \subseteq B) \wedge \neg(B \subseteq A)]$

c) $(A \subset B) \to [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

d) $(x \in \varnothing) \to (x \notin A)$

e) $(x \in \varnothing) \to (x \in A)$

f) $(A \subseteq B) \leftrightarrow \exists x\,[(x \in A) \to (x \in B)]$

g) $(A = B) \to [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$

95. Parafrasee los literales del ejercicio anterior.

96. Sea $B = \{*, \alpha\}$, entonces es verdad que:

a) $N\big(P(P(B))\big) = 8$

b) $* \in P(B)$

c) $\varnothing \in P(B)$

d) $\{*, \alpha\} \notin P(B)$

e) $\{*, \alpha\} \subset B$

97. Escriba las siguientes proposiciones en lenguaje simbólico e indique su valor de verdad.

I) Todo número es impar.

II) Existe un x perteneciente a los enteros tal que $3x^2 - 5 = 0$.

III) Si existe un x perteneciente a los enteros tal que $x + 1 < 0$, entonces para todo x perteneciente a los naturales se cumple que x es un entero.

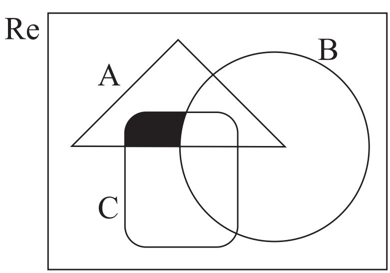
1.10 Operaciones entre conjuntos

98. Si $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, entonces $\{\varnothing\} \in A \cap P(A)$.

a) Verdadero

b) Falso

99. Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Respecto del siguiente diagrama de Venn.



La región sombreada corresponde a:

a) $(A \cap B) - C$

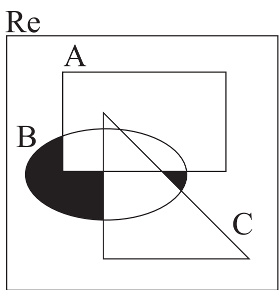
b) $(A \cap B) - A$

c) $(A \cup B) - C$

d) $(A - B) \cap C$

e) $(B - A) \cup C$

100. Sean A, B y C conjuntos no vacíos. Respecto del siguiente diagrama de Venn:



La región sombreada corresponde a:

a) $A^C \cup (B \cap C)$
b) $B - (A \cup C)$
c) $A \cap (B \cup C)$
d) $A - (B \cup C)$
e) $B \cap (A \cup C^C)$

101. Dado un conjunto referencial Re con 3 subconjuntos no vacíos, A, B y C, encuentre los elementos de dichos conjuntos, tales que se cumplan las siguientes características:

a) $Re = \{*, ?, \#, \Omega, \exists, \forall, \Psi, \pi, e\}$
b) $C \subseteq B$
c) A y C son disjuntos
d) $B \cap C^C = \{\#, \exists, \Psi, \pi\}$
e) $(A \cap B) \cup C = \{\#, \Omega, \pi, e\}$
f) $(A \cup B \cup C)^C = \{\forall\}$

102. Sea el conjunto referencial Re y los conjuntos no vacíos A, B y C definidos así:

$Re = \{*, !, \#, \$, \%, \&, ?\}$

$A = \{*, !, \#, \$\}$

$B = \{!, \%, \&, ?\}$

$C = \{\%, \&, ?\}$

Entonces el conjunto $[(A - B)^C \cup C]^C$ es:

a) Re
b) $\varnothing$
c) $\{\%, \&, ?\}$
d) $\{!\}$
e) $A - B$

103. Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos de un referencial Re. Represente en un diagrama de Venn las siguientes operaciones:

a) $A \cup B \cup C^C$
b) $B - (A \cup C)$
c) $(A \cap B)^C \cap C$
d) $A \,\Delta\, (B - C)$

104. Empleando diagramas de Venn, califique cada proposición como verdadera o falsa. Considere A, B y C tres conjuntos no vacíos de un referencial Re.

* Si $A \subseteq (B \cap C)$, se cumple que $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)$.
* Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $N(P(A \cap B)) = 0$.
* Si A es un conjunto tal que $N(A) = 2$, entonces $N(P(A)) = 16$.
* $A - (B \cup C)^C = (A - B^C)$.
* $N(A) = 4$, $N(B) = 3$ y $N(A \cap B) = 2$, entonces $N(P(A \cup B)) = 16$.
* Si $C \subset (A \cap B)$, entonces $[C^C \cap (A \cup B)] = \varnothing$.

105. Sean A, B, C subconjuntos del referencial Re, tales que:

$A \cap B = \{a, \delta, f\}$; $Re = \{a, \Delta, ?, f, \delta, +, \pi, e, \theta, \alpha, *\}$;

$A - B = \{\theta, \pi, e\}$; $B - (A \cup C) = \{*, ?, \Delta\}$; $(A \cup B \cup C)^C = \{\alpha\}$;

$A \cap C = C \cap B = \{f\}$; $C - (A \cap B \cap C) = \{+\}$;

a) Halle los elementos de A, B y C.
b) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $N(C) = N(B) - N(A)$ II) $A \cup B = \{\theta, \pi, e, *, ?, \delta\}$

106. Dados los conjuntos no vacíos A y B, tales que $A \cup B = B$, entonces es verdad que:

a) $A \cap B = A$ b) $A - B = A$ c) $B - A = A$ d) $B^C = A$ e) $B \subseteq A$

107. Dados tres conjuntos A, B y C, no vacíos y diferentes, tal que $C \subset (A \cap B)$, entonces es verdad que:

a) $(A \cup C) \subset (B \cap C)$
b) $(A - B) = \varnothing$
c) $(A - B) \subset C$
d) $(A - B) \cup (B - A) = C$
e) $(C - A) = \varnothing$

108. Sean A, B, C subconjuntos del referencial Re, tales que:

$A \cap B = \{a, f\}$; $Re = \{a, \Delta, *, ?, f, \delta, +, \pi, e, \theta, \alpha\}$;

$A - B = \{\theta, \pi, e\}$; $B - (A \cup C) = \{*, ?, \Delta\}$; $(A \cup B \cup C)^C = \{+\}$;

$A \cap C = \{f, e\}$; $B \cap C = \{f, \delta\}$; $C - (A \cup B) = \{\alpha\}$

a) Halle los elementos de A, B y C.
b) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) $A \cup B = \{\theta, \pi, e, *, ?, \delta, \Delta, f, a\}$

2) $(B \cap C) - (A \cap B \cap C) = \varnothing$

109. Siendo $A=\{\varnothing, \{1, 2\}, \{1\}, \{\varnothing\}, 1, \{2\}\}$, identifique la proposición falsa.

a) $(\{1\} \cup A = A) \vee (\{1\} \in A)$

b) $(\varnothing \subseteq A) \wedge (\varnothing \in A)$

c) $(1 \in A) \rightarrow (\{2\} \in A)$

d) $(\{1, 2\} \in A) \vee (\varnothing \subseteq A)$

e) $(1 \in A) \rightarrow (2 \in A)$

110. Determine los elementos de A, B y C, si se conoce que:

$Re = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad (A \cap B) \cup (B \cap C) = \{4, 8\}$

$B - (A \cup C) = \{6, 7\}$ $\quad A - (B \cup C) = \{1, 3\}$ $\quad C - A = \{8, 9\}$

$(B \cup C)^C = \{1, 3, 5\}$ $\quad B^C \cup A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$

A y C no son intersecantes.

111. Determine los elementos de A, B y C, si:

$Re = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$(A \cup C) \cap B^C = \{6, 10, 11, 12, 14\}$

$B \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15\}$

$(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3, 4, 5, 7, 8, 15\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 4, 6, 7, 8, 12\}$

$(B^C \cap C^C)^C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$

$B \cap C^C = \{1, 2, 3, 9, 13\}$

112. Sean los conjuntos A, B y C, tales que:
C y A no son intersecantes, B y C son disjuntos, A y B no son disjuntos.

$(A \cup B)^C = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$C^C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15\}$

$B - A = \{8, 9\}$; $\quad A \cap B^C = \{2, 3, 4, 5\}$

Halle los elementos de A, B y C.

113. Dado el referencial $Re = \{x/x$ es letra del alfabeto$\}$ y los conjuntos A, B, C definidos por:

$A = \{x/x$ es vocal de la palabra computación$\}$

$B = \{x/x$ es vocal de la palabra básica$\}$

$P(B) =$ Conjunto potencia de B

$C = \{x/x$ es vocal de la palabra onu$\}$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $N(C) = 3$

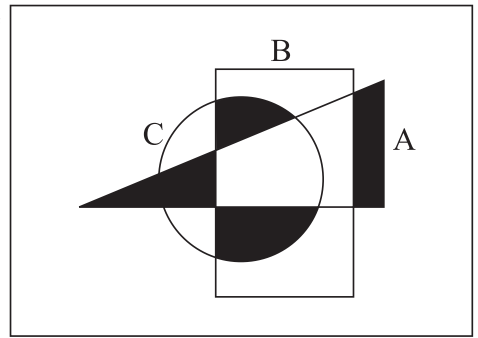
b) $C - A = \{o, u\}$

c) $N[P(B)] = 32$

d) $A \cup C = B$

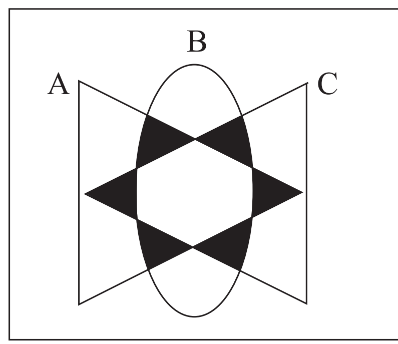
e) $A - B = \varnothing$

114. Dados los conjuntos no vacíos A, B y C, entonces la región sombreada del gráfico adjunto corresponde a:



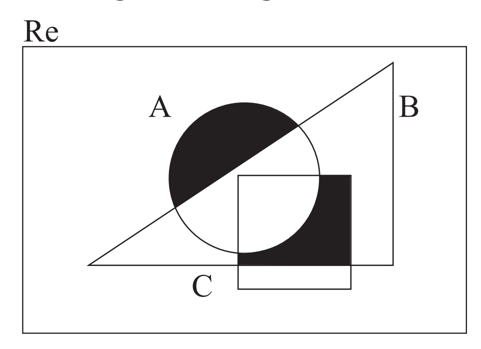
a) $(A - B) \cap (C \cap B)$
b) $(A \cap B \cap C)^C$
c) $[(C - A) \cap B] \cup (A - B)$
d) $(C^C \cap A) - B$
e) $[(A - C) \cap (B - C)] \cup (B \cap C)$

115. Dados los conjuntos no vacíos A, B y C, entonces la región sombreada del gráfico adjunto corresponde a:



a) $[(A - B) \cup (B - A)] \cup [(A - B) \cup (B - A) - C]$
b) $[(A \cap B) - C] \cup [(A - B) \cap C] \cup [(B - A) \cap C]$
c) $[(A \cap B) \cap C^C] \cup [(A \cap B)^C \cap C]$
d) $[(A^C \cup B^C) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap C^C]$
e) $[(A - B) \cup (B - A) - C] \cup [C - (A \cap B)]$

116. Escriba una expresión con operaciones entre conjuntos que represente la región sombreada del siguiente diagrama de Venn:



117. Si $Re=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y A y B son conjuntos no vacíos, tales que:

* $(A \cap B)^C = \{1, 2, 6, 7, 8\}$
* $Re - (A \cup B) = \{8\}$
* $B - A = \{6, 7\}$

Entonces es verdad que:

a) $A - B = \{3, 4, 5\}$
b) $B = \{3, 4, 6, 7\}$
c) $(A - B) \cap (B \cup A) = \{1, 2\}$
d) $A = \{1, 2, 4, 5\}$
e) $A \cap (A - B) = \varnothing$

118. Si A, B y C son tres subconjuntos del conjunto referencial Re, donde:

* $N(Re) = 20$
* $N[A - (B \cup C)] = 5$
* $N[B - (A \cup C)] = 4$
* $N[C - (A \cup B)] = 3$
* $N(A - B) = 7$
* $N[(A \cup B \cup C)^C] = 2$

Entonces $N[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$ es igual a:

a) 4 b) 6 c) 3 d)5 e) 2

119. Si $Re = \{i, \Delta, a, \square, \varnothing, o, *, \nabla\}$, A y B son conjuntos no vacíos, tales que $A \cup B = \{i, \Delta, a, \square, \varnothing\}$, $A \cap B = \{a\}$ y $B - A = \{\square, \varnothing\}$:

Entonces es verdad que:

a) $A - B = \{o, *, \nabla\}$
b) $B = \{*, \nabla, \square, \varnothing\}$
c) $(A - B) \cap (A \cup B) = \{i, \Delta\}$
d) $A = \{i, \Delta, \nabla, o\}$
e) $A \cap (A - B) = \{o, i, \Delta\}$

1.11 Propiedades de las Operaciones entre conjuntos

120. Si $(A \subseteq B)$, entonces $(A \cup B) = B$.
a) Verdadero b) Falso

121. Dado un conjunto A, los elementos de P(A) son subconjuntos del conjunto A.
a) Verdadero b) Falso

122. Sea Re un conjunto referencial, A y B subconjuntos de Re.
Entonces: $[A \cap (B \cup A)] \cap A^C = Re$
a) Verdadero b) Falso

123. Si A y B son conjuntos, tales que $A \cup B = \varnothing$, entonces $(A = \varnothing) \wedge (B = \varnothing)$.
a) Verdadero b) Falso

124. Para los conjuntos A, B, C, no vacíos, se cumple que:
$A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$.

a) Verdadero   b) Falso

125. Para los conjuntos A, B, C, no vacíos, se cumple que:
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

a) Verdadero   b) Falso

126. En una encuesta realizada por Pacifictel a un grupo de 26 abonados que han realizado al menos una llamada, sea ésta local, nacional o internacional, se obtuvo la siguiente información:

* 23 abonados han realizado llamadas nacionales o internacionales.
* 5 abonados han hecho llamadas locales y nacionales.
* 12 abonados han hecho llamadas internacionales pero no locales.
* El número de personas que han hecho sólo llamadas nacionales es igual al doble de personas que han hecho sólo llamadas internacionales y locales pero no nacionales.

Entonces, el número de abonados que han hecho llamadas locales es:

a) 10 b) 4 c) 6 d) 2 e) 14

127. En un concurso de cocineros en el que se preparan tres comidas criollas: guatita, seco de chivo y chugchucaras, se obtuvieron los siguientes resultados:

* 2% de cocineros fracasó en las tres comidas.
* 6% de cocineros fracasó en guatita y seco de chivo.
* 5% de cocineros fracasó en seco de chivo y chugchucaras.
* 8% de cocineros fracasó en guatita y chugchucaras.
* 29% de cocineros fracasó en guatita.
* 32% de cocineros fracasó en seco de chivo.
* 36% de cocineros fracasó en chugchucaras.

a) Construya un diagrama de Venn con los datos.
b) Proporcione una expresión con operaciones de conjuntos para indicar el porcentaje de cocineros que tuvo éxito.
c) ¿Qué porcentaje de los cocineros no tuvo éxito en las tres comidas?
d) ¿Cuántos cocineros tuvieron éxito en las tres comidas si concursaron 200 personas?

128. En una encuesta a 100 inversionistas, se observa lo siguiente:

* 5 sólo poseen acciones.
* 15 poseen solamente valores.
* 70 son propietarios de bonos.
* 13 poseen acciones y valores.
* 23 tienen valores y bonos.
* 10 son propietarios sólo de acciones y bonos.

Cada uno de los 100 invierte por lo menos en algo. Halle el número de inversionistas que:

a) Tienen valores, bonos y acciones.
b) Tienen sólo una de ellas.
c) Tienen al menos una.
d) Tienen, cuanto mucho, dos de ellas.

129. Para los votantes de una cierta comunidad de 300 personas, se tiene que:

* 110 son mayores de 20 años.
* 120 son mujeres y 50 mujeres son mayores de 20 años.

Determine el número de votantes que:

a) Son hombres.
b) Son hombres mayores de 20 años.
c) Son mujeres con 20 o menos años.
d) Son hombres con 20 o menos años.
e) Tienen 20 o menos años.

130. En una encuesta a 40 estudiantes del nivel cero, 27 son hombres y 20 son bachilleres técnicos; de estos últimos 8 son bachilleres (técnicos) en comercio, 6 de las mujeres no son bachilleres técnicos y 22 de los hombres no son bachilleres en comercio.

* Determine cuántas mujeres son bachilleres técnicos pero no en comercio.
* Halle además cuántos hombres no son bachilleres técnicos.

131. Sean A, B y C subconjuntos de un referencial, si se conoce que:

* $C \subseteq B$
* A y C no son intersecantes.
* $Re = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
* $B - C = \{3, 5, 7, 8\}$
* $(A \cap B) \cup C = \{3, 4, 8, 9\}$
* $(A \cup B \cup C)^C = 6$

Halle los elementos de A, B y C.

132. Empleando álgebra proposicional, demuestre:

a) $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $(A^C \cap B)^C = A \cup B^C$
d) $A \cap A^C = \varnothing$
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
f) $A - B = A \cap B^C$
g) $A - B = (A^C \cup B)^C$

133. En cierta comunidad, 70% de las personas fuman, 40% tienen cáncer pulmonar, y 25% fuma y tiene cáncer pulmonar. Si F y C denotan los conjuntos de fumar y tener cáncer pulmonar, determine la cantidad de personas que:

a) No fume y no tenga cáncer pulmonar.
b) Fume pero no tenga cáncer pulmonar.
c) No fume ni tenga cáncer pulmonar.
d) Fume o no tenga cáncer pulmonar.
e) No fume o no tenga cáncer pulmonar.
f) No fume o tenga cáncer pulmonar.

134. Sea $Re = \{a, b, c, d, e, f\}$ y los conjuntos A y B no vacíos que cumplen las siguientes condiciones:

$A - B = \{b, c\}$
$A \cup B^C = \{b, c, e\}$
$A^C = \{a, d, e, f\}$

Identifique cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

a) $N(B - A) = 1$
b) $N(A \cap B)^C = 1$
c) $A = \{b, c, d\}$
d) $N(B) = 1$
e) $N(A^C \cup B) = 4$

135. Empleando álgebra proposicional, demuestre:

a) $A \Delta B = B \Delta A$
b) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

136. Empleando álgebra proposicional, demuestre:

a) $A \Delta A = \varnothing$
b) $A \Delta \varnothing = A$
c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

137. De 335 maestros de una institución educativa se tienen los siguientes datos: 215 son de tiempo completo, 190 hablan inglés, 225 tienen por lo menos maestría, 70 son de tiempo completo y hablan inglés, 110 hablan el inglés y tienen por lo menos una maestría, 145 son de tiempo completo y tienen por lo menos maestría; y todos tienen al menos una de las características.

Halle el número de maestros que tengan las tres características anteriores.

138. En una encuesta aplicada a 100 estudiantes se determinó que 50 practican básquet, 40 practican fútbol, 45 practican atletismo, 20 practican básquet y fútbol, 20 básquet y atletismo, 15 fútbol y atletismo, y 5 practican los tres deportes. Entonces es falso que:

a) 15 no practican estos tres deportes.
b) 15 sólo practican básquet.
c) 75 practican básquet o atletismo.
d) 35 practican fútbol o atletismo pero no básquet.
e) 10 practican básquet y fútbol pero no atletismo.

1.12 Predicados

139. Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ y los predicados:
$p(x)$: x es un número impar, $q(x)$: x es un número par.

Identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) $A(p(x) \rightarrow q(x)) \subseteq Aq(x)$
b) $\mathrm{Re} = Ap(x) \cup Aq(x)$
c) $Ap(x) = A^C q(x)$
d) $Aq(x) - Ap(x) = \emptyset$
e) $A(q(x) \rightarrow p(x)) = Ap(x)$

140. Sea $\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $p(x)$: x es divisor de 12; $q(x)$: x es primo. Encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $\forall x\, [p(x) \vee q(x)]$
b) $\exists x\, [p(x) \wedge q(x)]$
c) $\exists x\, [\neg p(x) \wedge q(x)]$

141. Dado el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ y los predicados: $p(x)$: $x(x + 2) = 0$, $q(x)$: $x^2 > 0$. Entonces es verdad que:

a) $-1 \in A\,[p(x) \wedge q(x)]$
b) $A\,[p(x) \vee q(x)] = \emptyset$
c) $A\,[p(x) \rightarrow q(x)] = \mathrm{Re}$
d) $A\,\neg q(x) = \{-3, -2, -1\}$
e) $A\,[q(x) \rightarrow p(x)] = \emptyset$

142. Dado el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los predicados:

$p(x)$: x es un número par.

$q(x)$: x es mayor que siete.

$r(x)$: x es menor que diez.

$s(x)$: x es un número impar.

Determine cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\mathrm{A}p(x) \cup \mathrm{A}q(x)$

b) $\mathrm{A}s(x) \cap \mathrm{A}r(x)$

c) $\mathrm{A}p(x) \cup \mathrm{A}s(x)$

d) $\mathrm{A}(p(x) \rightarrow q(x))$

e) $\mathrm{A}[(p(x) \rightarrow s(x)) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x))]$

f) $\mathrm{A}^{\mathrm{C}} r(x) \cap \mathrm{A}s(x)$

g) $(\mathrm{Re} - \mathrm{A}p(x)) \cap (\mathrm{A}q(x) \cup \mathrm{A}s(x))$

143. Para $\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $p(x)$: $x^2 - x + 41$ es primo.

a) Determine $\mathrm{A}p(x)$.

b) Determine el valor de verdad de:

$$\exists x \neg p(x)$$
$$\forall x \; p(x)$$

144. Sea $\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los predicados:

$p(x)$: x es divisor de 284.

$q(x)$: $x + 3 < 9$

$r(x)$: $x + 2 = 8$

$m(x)$: x es primo

Encuentre:

a) $\mathrm{A}p(x)$

b) $\mathrm{A}q(x)$

c) $\mathrm{A}r(x)$

d) $\mathrm{A}m(x)$

e) $\mathrm{A}[p(x) \vee r(x)]$

f) $\mathrm{A}[q(x) \wedge m(x)]$

g) $\mathrm{A}[m(x) \rightarrow \neg r(x)]$

h) $\mathrm{A}[\neg r(x) \wedge q(x)]$

145. La negación de la proposición "Para todo número natural n, $n + 2 > 8$" , es:

a) Para algunos naturales n, $n + 2 < 8$.

b) Existe un natural n tal que $n + 2 \leq 8$.

c) Ningún natural n cumple con $n + 2 > 8$.

d) Existe un natural n tal que $n + 2 > 8$.

e) Existe un natural n tal que $n + 2 \geq 8$.

146. La negación de la expresión: $\forall x\ (x + 2 = 5 \wedge x - 1 \leq 3)$, es:

a) $\exists x\ (x + 2 \neq 5) \vee \exists x(x - 1 > 3)$
b) $\exists x\ (x + 2 \neq 5 \wedge x - 1 > 3)$
c) $\exists x\ (x + 2 \neq 5) \wedge \exists x\ (x - 1 > 3)$
d) $\exists x\ (x + 2 \neq 5 \wedge x - 1 \geq 3)$
e) $\exists x\ (x + 2 \neq 5 \vee x - 1 \geq 3)$

147. Al negar y simplificar la expresión $\forall x\ [\ a(x) \wedge (\neg\, a(x) \rightarrow \neg\, b(x))]$, se obtiene:

a) $\exists x\ [\neg\, b(x)]$
b) $\forall x\ [\neg\, a(x)]$
c) $\exists x\ [\neg\, a(x)]$
d) $\exists x\ [\ a(x) \wedge b(x)]$
e) $\exists x\ [\ a(x)]$

148. Sea el conjunto $\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces es verdad que:

a) $\exists x\ (x - 3 = 1)$
b) $\forall x\ (x + 3 < 5)$
c) $\forall x\ (x > 1)$
d) $\exists x\ (x + 3 < 4)$
e) $\forall x\ (x^2 + 4x + 3 = 0)$

1.13 Pares ordenados y producto cartesiano

149. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, si $N(A) = 2$ y $N(B) = 1$, entonces $N(P(A \times B)) = 8$.

a) Verdadero
b) Falso

150. Si A, B y C son conjuntos no vacíos, entonces $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

a) Verdadero
b) Falso

151. Dado el conjunto $A = \{1, \{1\}, \emptyset\}$, entonces $N(A \times A) = 2$.

a) Verdadero
b) Falso

152. Sean (a, b) y (c, d) dos pares ordenados, $[(a, b) = (c, d)] \Leftrightarrow [(a = c) \wedge (b = d)]$.

a) Verdadero
b) Falso

153. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, entonces $A \times B = B \times A$.

a) Verdadero
b) Falso

154. Si $(a, b) = (b, a)$, ¿qué condición debe cumplirse para que la igualdad sea verdadera?

155. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, si $N(A) = 2$ y $N(B) = 4$, entonces $N(A \times B) + N[P(A \times B)] = 20$.

a) Verdadero
b) Falso

156. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{♣, □, ♠\}$ y $C = \{◊, ♣, ●, \nabla\}$, entonces el número de pares ordenados diferentes que se pueden definir de $A \times (C - B)$ es 256.

a) Verdadero   b) Falso

157. Si A, B y C son conjuntos no vacíos, entonces una de las siguientes proposiciones es falsa. Identifíquela.

a) $N(A \times B) = N(A)\, N(B)$
b) $N[P(A \times B)] = 2^{N(A)N(B)}$
c) $N(A) + N(B) = N(A \cup B) + N(A \cap B)$
d) $N(A \times B \times C) = N(A)\, N(B)\, N(C)$
e) $N(A \times B) \neq N(B \times A)$

158. Si A, B, C son conjuntos tales que: $N(A) = 2$, $N(B) = 3$ y $N(C) = 3$, entonces $N[A \times (B \times C)]$ es:

a) 14   b) 18   c) 11   d) 10   e) 9

1.14 Relaciones

159. En una relación, el dominio siempre es igual al conjunto de partida.

a) Verdadero   b) Falso

160. En una relación, el rango siempre es igual al conjunto de llegada.

a) Verdadero   b) Falso

161. En una relación, el conjunto de partida debe ser distinto del conjunto de llegada.

a) Verdadero   b) Falso

162. En una relación, el dominio es un subconjunto del conjunto de partida.

a) Verdadero   b) Falso

163. Sea $A=\{1, 2, 3\}$ y $R=\{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$, entonces R es una relación en A.

a) Verdadero   b) Falso

164. Sean $A=\{2, 3, 4\}$, $B =\{4, 5, 7\}$ y la relación $R: A \rightarrow B$, R: x es divisor de y, entonces $N(R) = 3$.

a) Verdadero   b) Falso

1.15 Funciones

165. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\nabla, \square\}$. Si R_1 y R_2 son dos relaciones de A en B, tales que $R_1 = \{(a, \nabla), (c, \nabla)\}$ y $R_2 = \{(b, \square)\}$, entonces $R_1 \cup R_2$ es una función.

a) Verdadero b) Falso

166. En los siguientes ejercicios se dan varias relaciones de D a E. Para cada relación, identifique si se trata de una función o no.

a)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,c),(5,d)\}$
b)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(1,e),(2,e),(3,a),(2,b),(5,d)\}$
c)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(1,a),(2,b),(1,c),(3,d),(4,e),(5,d)\}$
d)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(1,e),(2,a),(3,e),(4,a),(5,b)\}$
e)	$D=\{1,2,3,4\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(2,a),(1,b),(3,e),(4,c)\}$
f)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d\}$	$\{(1,a),(2,a),(3,d),(4,c),(5,b)\}$
g)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d\}$	$\{(1,a),(3,b),(2,c),(4,d)\}$
h)	$D=\{1,2,3,4,5\}$	$E=\{a,b,c,d\}$	$\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,d),(5,d)\}$
i)	$D=\{1,2,3,4\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(1,a),(2,b),(3,c),(1,d),(4,e)\}$
j)	$D=\{1,2,3,4\}$	$E=\{a,b,c,d,e\}$	$\{(1,b),(2,c),(3,d),(4,b)\}$

167. Para cada función del ejercicio anterior, escriba si es uno a uno, sobreyectiva, o biyectiva.

168. Si A y B son dos conjuntos finitos no vacíos donde $N(A) \leq N(B)$, entonces cualquier función de A en B es inyectiva.

a) Verdadero b) Falso

169. Dados los conjuntos: $A=\{\Omega, \Delta, \pi, O\}$, $B=\{?, *, +\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones que se muestran a continuación, definidas entre ellos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $R_1 = \{(\Omega, 1), (\Delta, 2), (\pi, 4), (O, 5)\}$; $rg\, R_1 = C$

b) $R_2 = \{(1, *), (3, +), (4, ?)\}$; $dom\, R_2 = C$

c) $R_3 = \{(\Omega, ?), (\Delta, *), (\pi, *), (O, +)\}$ es una función biyectiva.

d) Si $R_4 = \{(\Omega,1),(\Delta,2),(\pi, 3), (O, 5)\}$ y $R_5 = \{(1, ?), (2, *),(3, *),(4, *),(5, +)\}$, entonces R_5 o R_4 es función sobreyectiva.

170. Dados los conjuntos: $A=\{p, q, r, s\}$ y $B=\{m, n, o, p\}$ y las funciones de A en B $f=\{(p, m), (q, p), (r, m), (s, n)\}$ y $g=\{(p, p), (q, m), (r, n), (s, o)\}$, entonces es cierto que:

a) $f \cup g$ es una función inyectiva.
b) g es sobreyectiva pero no inyectiva.
c) f es inyectiva pero no sobreyectiva.
d) g es una función biyectiva.
e) f es una función biyectiva.

171. Sea el conjunto $A=\{$Elena, Hessel, Elsi, Ángel, Juan$\}$ y f una función tal que f: $A \to A$ con la siguiente definición: f(Elena) = Hessel, f(Hessel) = Elsi, f(Elsi) = Ángel, f(Ángel) = Elena, f(Juan) = Elena, entonces es verdad que:

a) $(f \circ f)$ es inyectiva.
b) $(f \circ f)$ (Juan) = Hessel.
c) f es sobreyectiva.
d) $rg\, f = dom(f \circ f)$
e) Todas las proposiciones anteriores son falsas.

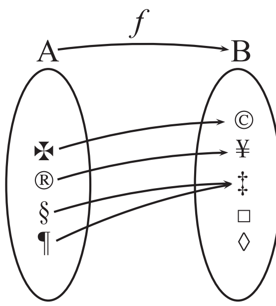
172. Sean f: $A \to B$ y g: $B \to A$ dos funciones, tales que:
$f=\{(\beta, a), (b, \partial), (\bullet, a), (?, *)\}$, $g=\{(\partial, \beta), (a, ?), (*, \beta), (!, ?)\}$
Entonces es verdad que:

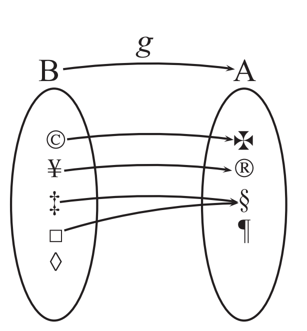
a) $f\circ g = \{(\beta, ?), (b, \beta), (*, ?), (?, \beta)\}$
b) $f\circ g = \{(\partial, a), (a, *), (*, a), (!, *)\}$
c) $f\circ g = \{(\beta, a), (b, \partial), (*, a), (?, \rho)\}$
d) $f\circ g = \{(\partial, \beta), (a, ?), (*, \beta), (!, ?)\}$
e) $f\circ g = \{(\partial, a), (a, ?), (*, a), (!, ?)\}$

173. Sea $V=\{a, e, i, o, u\}$ y se define una función $f: V \to V$ tal que: $f(a)=u$; $f(e)=i$; $f(i)=a$; $f(o)=o$ y $f(u)=i$. El rango de $f \circ f$ es:

a) $\{a, e, i, o, u\}$
b) $\{a, i, o, u\}$
c) $\{a, o, u\}$
d) $\{a, i, o\}$
e) $\{a, e, i, u\}$

174. Dadas las relaciones:





Entonces es verdad que:

a) f y g son funciones.
b) $f\circ g$ es inyectiva.
c) $g\circ f$ es biyectiva.
d) El rango de $f\circ g$ es igual a B.
e) El rango de $g\circ f$ es igual al rango de g.

175. Si f es una función de A en B y g es una función de B en C, entonces es verdad que:
a) $dom(f \circ g) = dom\ g$
b) Si f es inyectiva, entonces $g \circ f$ también lo es.
c) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f también lo es.
e) El rango de $g \circ f$ es igual al rango de f.

176. Si $f = \{(?,1), (\$, *), (1, *), (*, 1)\}$ y $g = \{(1, ?), (2, \$), (*, 1), (3, *)\}$, determine la proposición falsa.
a) g es una función inyectiva pero f no lo es.
b) El dominio de $g \circ f$ es $\{?, \$, 1, *\}$.
c) El rango de $f \circ g$ es $\{1, *\}$.
d) $(1, 1) \in (f \circ g)$.
e) El rango de $g \circ f$ es igual al rango de g.

177. Sean las funciones $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ y $h = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$. Entonces el valor de $(h \circ g)(1)$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

178. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las funciones $f: A \to A$ y $g: A \to A$, tales que $f(1) = 3$; $f(2) = 5$; $f(3) = 3$; $f(4) = 1$; $f(5) = 2$; $g(1) = 4$; $g(2) = 1$; $g(3) = 1$; $g(4) = 2$; $g(5) = 3$.

Identifique la proposición falsa:
a) $(f \circ g)(2) = 3$
b) $(g \circ f)(5) = 1$
c) (f es inyectiva) $\vee$ (g es inyectiva)
d) $[(f \circ g)(1) = 3] \vee [(f \circ g)(3) = 3]$
e) $[(g \circ f)(4) = 5] \vee [(f \circ g)(1) = 2] \vee [(g \circ f)(1) = 1]$

179. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y las funciones biyectivas $f: A \to A$ y $g: A \to A$, donde $f = \{(a, d), (b, c), (c, b), (d, a)\}$ y $g \circ f = \{(a, d), (b, c), (c, b), (d, a)\}$, la función g es:
a) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
b) $\{(a, d), (b, c), (c, d), (d, a)\}$
c) $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$
d) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b)\}$
e) $\{(a, a), (b, d), (c, c), (d, b)\}$

180. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{r, s, t\}$, f es una función de B en A y g es una función de A en B, donde:

$f = \{(r, 2), (s, 3), (t, 1)\}$ $g = \{(1, r), (2, s), (3, t), (4, t)\}$

Entonces es verdad que:

a) $f \circ g$ es una función inyectiva.
b) $rg(f \circ g) = A$
c) $(s, r) \in g \circ f$
d) $(g \circ f)^{-1} = \{(s, r), (t, s), (r, t)\}$
e) $g \circ f$ no es una función inversible.



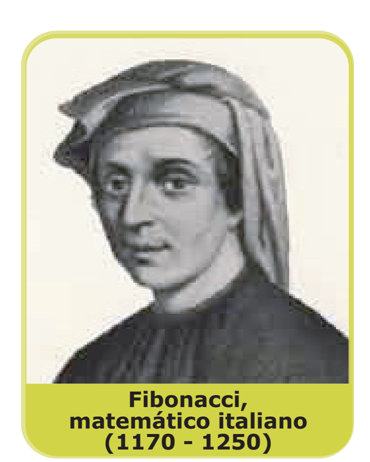
Capítulo 2

Números Reales

Introducción

La idea de número aparece en la historia del hombre ligada a la necesidad de contar objetos, animales, etc. Para lograr este objetivo, usaron los dedos, guijarros, marcas en bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece, se hace necesario un sistema más práctico de representación numérica.

El sistema de numeración más usado fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. Acerca del origen indio del sistema, hay pruebas documentales más que suficientes, entre ellas la opinión de Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, quien fue uno de los introductores del nuevo sistema en Europa. En aquella época se usaban los números romanos y el ábaco. Su gran mérito fue la introducción del concepto y símbolo del cero, lo que permite un sistema en el que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número por grande que sea y simplificar la forma de efectuar las operaciones. En su libro titulado *"Liber Abaci"* (Libro de los Cálculos) hizo tal referencia; y, si bien su obra fue un hecho revolucionario, debido a que no había sido inventada la imprenta, tuvieron que pasar tres siglos para que fuera conocida en toda Europa.



Fibonacci, matemático italiano (1170 - 1250)

En el capítulo anterior hemos utilizado los números y uno de los conjuntos que nos ha servido como referencia es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, el cual se denomina conjunto de los números naturales.

En algunas situaciones de la vida diaria, tales como:

- Determinar el número que sumado con 5, dé por resultado 2.
- Tener un sobregiro de $\$ 100$ en una cuenta corriente.
- Disminuir la temperatura de 25 ºC a 20 ºC en un cierto instante de tiempo.
- Deber una cierta suma de dinero.

Nos encontramos con la dificultad de que no existen números naturales que puedan resolver dichos problemas. Las soluciones se encuentran en un nuevo conjunto denominado conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, del alemán **z**ahl (número).

¿Existe algún número que multiplicado por 2 sea 1? En general, dados dos números enteros m y n cualesquiera, ¿existe un número entero x que multiplicado por n $(n \neq 0)$ sea igual a m? La respuesta negativa a estas preguntas obligó a los matemáticos a una ampliación del conjunto $\mathbb{Z}$, introduciendo un nuevo conjunto numérico denominado conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$ y definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ f \,/\, f = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$, del inglés **q**uotient (cociente).

Un número racional es aquel que puede expresarse como una fracción $\frac{p}{q}$ entre dos números enteros: p (numerador) y q (denominador), con denominador q diferente de cero.

Pero también existen números que no pueden ser representados como una fracción, a este conjunto lo denominamos $\mathbb{I}$: conjunto de los números irracionales. Tales números existen, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, π, etc.

Tanto los números racionales como los irracionales forman el conjunto de los números reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. La siguiente figura muestra cómo se relacionan los conjuntos numéricos mencionados:

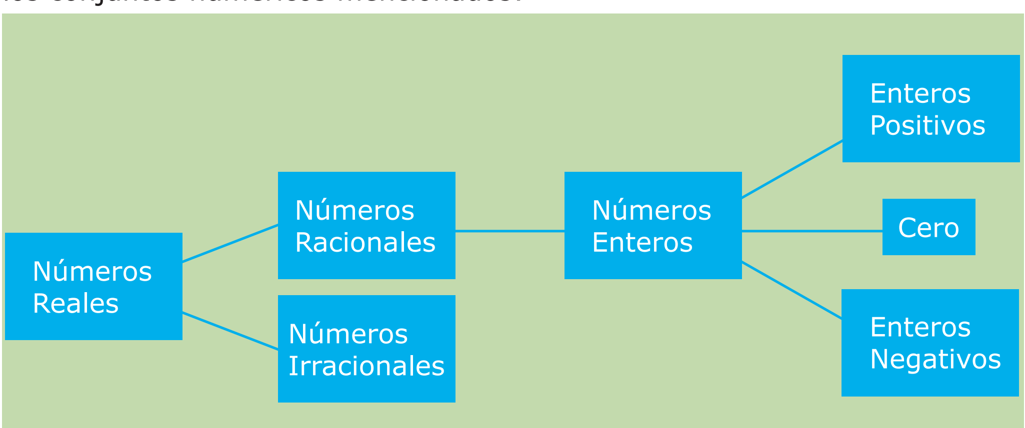


Figura 2.1: Relación de los Conjuntos Numéricos.

Es muy ilustrativa la representación gráfica de los números. Se puede utilizar una recta dibujada de manera horizontal, sobre la cual seleccionamos un punto y lo marcamos con **0** (origen), este punto representa el número cero. Si queremos identificar un número positivo, lo marcamos a la derecha del cero, mientras que si es negativo, lo marcamos a la izquierda del cero. A esta recta se la denomina recta de los números reales.

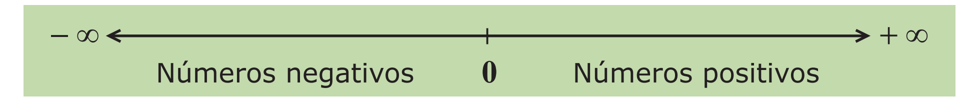


Figura 2.2: Recta de los Números Reales.

Capítulo 2

Números Reales

Si consideramos números enteros a la derecha de $\mathbf{0}$, estamos hablando del conjunto $\mathbb{Z}^+$, mientras que los que se encuentran a la izquierda de $\mathbf{0}$, representan el conjunto $\mathbb{Z}^-$. El cero no es positivo ni negativo.

Las mismas consideraciones se aplicarán para los números racionales, irracionales y reales en general. Dado que la cardinalidad de estos conjuntos es infinita, se utilizará el símbolo ∞ para representar tal valor en la recta numérica.

Si se tratara de un valor tan grande y positivo como sea posible, entonces se lo representará con $+\infty$; mientras que si el valor es tan grande como sea posible, pero negativo, entonces se utilizará $-\infty$.

2.1 Representación Decimal

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Representar un número racional en forma fraccionaria o periódica.
* Dada una representación decimal, determinar la fracción que le corresponde.
* Dado un número racional, representarlo en la recta real.
* Reconocer la diferencia entre la representación decimal de un número racional y uno irracional.

Los números reales pueden ser representados con cifras enteras y cifras decimales. Los números reales racionales tienen representaciones decimales con una cantidad finita de dígitos, o con cierto número de dígitos que aparecen indefinidamente siguiendo algún patrón de repetición.
Por ejemplo: $\frac{2}{5} = 0.4$ que tiene un solo decimal; $\frac{1}{6} = 0.166666...$, donde el dígito 6 se repite indefinidamente; $\frac{232}{99} = 2.343434...$, tiene los dígitos 3 y 4 repetidos en la secuencia decimal.
Los números reales irracionales tienen representaciones decimales que no terminan ni tienen un patrón de repetición. Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1.414213...$, $\pi = 3.14159...$ En la práctica, los números irracionales generalmente son representados por aproximaciones.
Se suele utilizar el símbolo $\approx$ (se lee "aproximadamente igual a") para escribir $\sqrt{2} \approx 1.414$ y $\pi \approx 3.1416$.

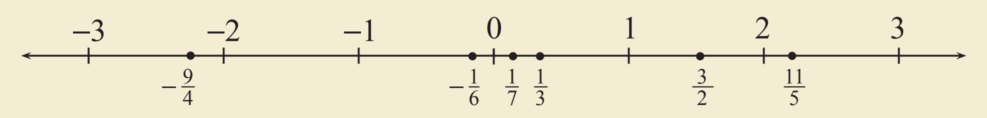
Para lograr la representación decimal, en el caso de números racionales, es suficiente dividir el numerador para el denominador.

Ejemplo 2.1 Representación decimal de números racionales.

$\frac{3}{2} = 1.5$ $\frac{11}{5} = 2.2$ $-\frac{9}{4} = -2.25$

$\frac{1}{3} = 0.3333\ ...$ $-\frac{1}{6} = -\ 0.16666\ ...$ $\frac{1}{7} = 0.142857142857\ ...$

Estos números pueden ser representados gráficamente en la recta real:



Cada vez que un número racional (fracción) se representa por medio de un número con infinita cantidad de decimales, estos últimos se muestran como la repetición sucesiva de una cierta cantidad finita de dígitos que se denomina período. Para evitar repetir los números, podemos utilizar "–" en la parte superior del período.

En el ejemplo 2.1 se puede observar que:

NÚMERO RACIONAL		PERÍODO	REPRESENTACIÓN DECIMAL
$\frac{1}{3}$	$\Rightarrow$	3	$0.\overline{3}$
$-\frac{1}{6}$	$\Rightarrow$	6	$-\ 0.1\overline{6}$
$\frac{1}{7}$	$\Rightarrow$	142857	$0.\overline{142857}$

Para transformar un decimal periódico en fracción, utilizaremos el siguiente procedimiento:

1. Denominar como x al número decimal periódico.
2. Localizar el período del número.
3. Llevar el punto decimal después del primer período, multiplicando al número x por la potencia de base diez, correspondiente a la cantidad de decimales recorridos.
4. Llevar el punto decimal antes del primer período, multiplicando al número por la potencia de base diez, correspondiente a la cantidad de decimales recorridos.
5. Restar las expresiones obtenidas en los numerales 3 y 4.
6. Despejar x.
7. Simplificar en caso de ser posible.

Utilizando el procedimiento anteriormente descrito, se pueden obtener las fracciones correspondientes a los tres números decimales periódicos de la siguiente tabla.

1.	$x = 0.3333...$	$x = 0.16666...$	$x = 0.142857142857...$
2.	Período: 3	Período: 6	Período: 142857
3.	$10^1 x = 3.3333...$	$10^2 x = 16.666...$	$10^6 x = 142857.142857...$
4.	$10^0 x = 0.3333...$	$10^1 x = 1.6666...$	$10^0 x = 0.142857...$
5.	$9x = 3$	$90x = 15$	$999999\, x = 142857$
6.	$x = \frac{3}{9}$	$x = \frac{15}{90}$	$x = \frac{142857}{999999}$
7.	$x = \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{6}$	$x = \frac{1}{7}$

En caso de que el número decimal periódico posea parte entera, debe separársela de la parte decimal para aplicar el procedimiento anterior a esta última.

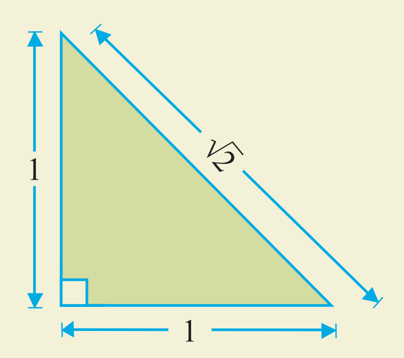
Finalmente, se debe sumar la parte entera con la fracción obtenida y ésa será la representación fraccionaria de todo el número.

Posteriormente demostraremos que todo número decimal periódico representa una fracción.

Ejemplo 2.2 Representación decimal de números irracionales.

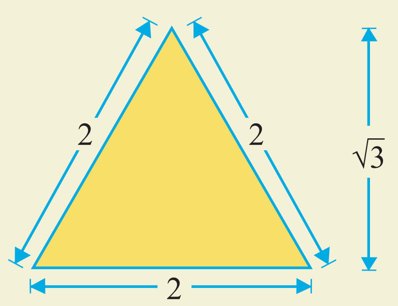
$\sqrt{2}$ **= 1.414213562373095...**

Este número puede representar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen medida igual a 1.



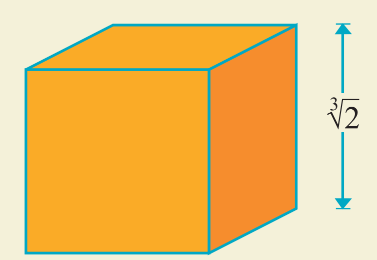
$\sqrt{3}$ = **1.732050807568877...**

Este número puede representar la longitud de la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades.



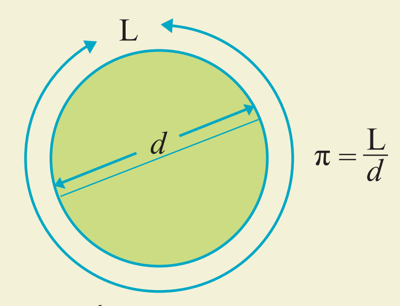
$\sqrt[3]{2}$ = **1.259921049894873...**

Este número puede representar la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es igual a 2 unidades cúbicas.



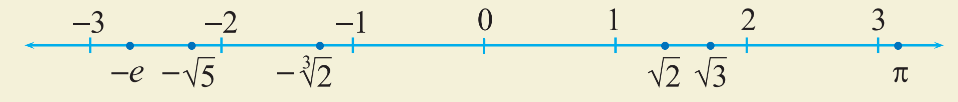
π = **3.141592653589793...**

Este número resulta del cociente entre la longitud de una circunferencia y la medida de su diámetro.



Como se podrá apreciar, estos números forman parte del mundo que nos rodea, por lo que es necesario trabajar con ellos.

Los números irracionales pueden ser representados gráficamente en la recta real:



2.2 Operaciones binarias

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un conjunto y una operación definida sobre él, reconocer si es o no binaria, justificando su respuesta.
* Dada una operación binaria, identificar qué propiedades cumple.

Algunas expresiones, tales como:

$$2 + 4 = 6; \;\; 4 - 6 = -2; \;\; 5 \text{ x } 7 = 35; \;\; 20 \div 5 = 4$$

tienen la particularidad de que si tomamos dos elementos de un conjunto, numérico en este caso, la operación genera un tercer número dentro o fuera del conjunto al cual se está haciendo referencia.

La unión y la intersección de conjuntos también generan nuevos conjuntos. Las operaciones que toman 2 elementos de un conjunto y su resultado se encuentra en el mismo conjunto tienen particular interés para nosotros y se denominan operaciones binarias.

Definición 2.1 (Operación binaria)

Sea un conjunto $S = \{a, b, c, ...\}$, la operación $*$ es una operación binaria en S, si y sólo si a cada par ordenado $(a, b) \in S \text{ x } S$, donde $a \in S$ y $b \in S$, le corresponde un elemento único $a*b \in S$, donde $a*b$ se lee "a operación b".

La operación binaria puede ser considerada como una función

$$*: S \text{ x } S \rightarrow S$$

En esta definición hay que tomar en cuenta lo siguiente:

- El orden de a y b es importante, porque (a, b) es un par ordenado y podría suceder que $a*b \neq b*a$.
- La operación tiene que estar definida para todos los pares ordenados (a, b).

2.2.1 Propiedades de las operaciones binarias

$\forall a, b \in S, a*b \in S$	**Cerradura (Clausurativa)**
$\forall a, b \in S, a*b = b*a$	**Conmutativa**
$\forall a, b, c \in S, a*(b*c) = (a*b)*c$	**Asociativa**
$\exists\, n \in S\ \forall a \in S, a*n = n*a = a$	**Elemento neutro**
$\forall a \in S\ \exists\, \tilde{a} \in S, a*\tilde{a} = \tilde{a}*a = n$	**Elemento inverso**

La **propiedad clausurativa** indica que el resultado de la operación binaria debe pertenecer al conjunto que se toma como referencia.

La **propiedad conmutativa** indica que el orden de los operandos no es importante al realizar la operación.

La **propiedad asociativa** indica que se pueden agrupar en diferente forma los elementos de la operación.

La **propiedad de poseer elemento neutro** n indica que al realizar la operación entre cualquier elemento del referencial y este elemento, o viceversa, no lo modifica al primero.

La propiedad de poseer elemento inverso $\tilde{a}$ indica que al realizar la operación entre cualquier elemento del referencial y este elemento, o viceversa, se obtiene el elemento neutro. Esta propiedad sólo deberá probarse en caso de existir elemento neutro.

Por definición, toda operación binaria cumple con la propiedad de cerradura. Las restantes propiedades pueden o no cumplirse, según sea el caso, sin perjuicio de que la operación sea binaria.

Ejemplo 2.3 Operación binaria y propiedades.

Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ y la operación binaria $*$ definida en $\mathbb{Z}$, $a * b = a + 3b$.

Se verifica la siguiente propiedad:

Cerradura, $a + 3b \in \mathbb{Z}$, para cada elemento a, b de $\mathbb{Z}$.

Por el contrario, la operación binaria no cumple las siguientes propiedades:

Conmutativa, $a + 3b \neq b + 3a$. Basta mostrar el siguiente contraejemplo: para $a = 1$ y $b = 2$ se verifica que $1 * 2 = 7$, pero $2 * 1 = 5$.

Asociativa, $a + 3(b + 3c) \neq (a + 3b) + 3c$. El contraejemplo podría ser $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$, en el cual $1 * (2 * 3) = 34$, mientras que $(1 * 2) * 3 = 16$.

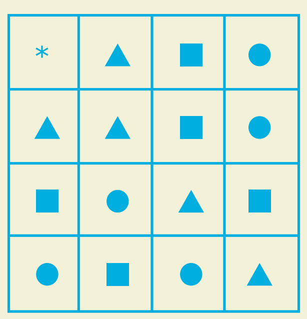
Elemento neutro, $a * n = a + 3n$ y $n * a = n + 3a$, por lo tanto, $a * n \neq n * a$.

Elemento inverso, esta propiedad no tiene sentido probarla ya que no existe elemento neutro.

El concepto de operación binaria es más amplio de lo que parece, así, se pueden realizar operaciones binarias sobre otros tipos de conjuntos, no necesariamente numéricos, tal como se lo ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4 Operación binaria.

Se define $S = \{$▲, ■, ●$\}$, y la operación $*$ sobre S mostrada en la siguiente tabla:



*	▲	■	●
▲	▲	■	●
■	●	▲	■
●	■	●	▲

En esta operación el resultado se obtiene combinando cada elemento que se encuentra debajo del símbolo de la operación binaria ($*$), con cada uno de los que se encuentran a la derecha de dicho símbolo. Así, ▲ $*$ ■ $=$ ■.

De acuerdo a esto, se observa que cualquier combinación siempre dará un elemento de S. Por lo tanto, la operación es binaria.

Adicionalmente, se puede verificar que la operación no cumple la propiedad conmutativa [● $*$ ■ $\neq$ ■ $*$ ●]; no cumple la propiedad asociativa [● $*$ (▲ $*$ ■) $\neq$ (● $*$ ▲) $*$ ■]; ni la del elemento neutro.

Con este ejemplo se amplía la aplicación de las operaciones binarias a conjuntos abstractos.

En el caso de que en el conjunto S se definan dos operaciones binarias, $*$ y $\#$, es posible hablar de una **propiedad distributiva**, si y sólo si:

$$\forall a, b, c \in S, a*(b \# c) = (a*b) \# (a*c)$$

Como el lector podrá recordar, en la teoría de proposiciones y conjuntos se hizo uso de esta propiedad.

2.3 Operaciones entre Números Reales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Realizar operaciones de adición y multiplicación sobre $\mathbb{R}$.
* Aplicar propiedades de las operaciones de los números reales.
* Reconocer expresiones no definidas en $\mathbb{R}$.

En el conjunto de números reales se definen las operaciones de adición $(+)$ y multiplicación $(.)$, las cuales se definen a continuación:

- **Adición:**

Es una operación binaria tal que $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \rightarrow (a + b)$$

y cumple con las siguientes propiedades:

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a + b = b + a)$	Conmutativa.
$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}\ (a + (b + c) = (a + b) + c)$	Asociativa.
$\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ (a + 0 = 0 + a = a)$	0 es el elemento neutro aditivo.
$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ (a + b = b + a = 0)$	b es el elemento inverso aditivo.

- **Multiplicación:**

Es una operación binaria tal que $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \rightarrow (a \cdot b)$$

y cumple con las siguientes propiedades:

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a \cdot b = b \cdot a)$	Conmutativa.
$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}\ (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$	Asociativa.
$\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$	1 es el elemento neutro multiplicativo.
$\forall (a \in \mathbb{R} \wedge \neg(a = 0))\ \exists b \in \mathbb{R}\ (a \cdot b = b \cdot a = 1)$	b es el elemento inverso multiplicativo.

A más de las propiedades anotadas existe la **propiedad distributiva** para estas operaciones, la cual puede expresarse así:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)]$$

Podemos definir las operaciones de sustracción $(-)$ y división $(\div)$ gracias a la existencia de los inversos aditivos y multiplicativos, respectivamente.

Es importante anotar que existen algunas expresiones que **no** están definidas en $\mathbb{R}$, algunas de ellas son:

- Raíces de índice par de números negativos. Ej: $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$.
- Cocientes en que el divisor es cero. Ej: $\frac{3}{0}$, $-\frac{10}{0}$.
- Potencias de base cero y exponente cero. Ej: 0^0, $(2-2)^0$.

Partiendo de estas observaciones, se pueden determinar dominios para expresiones que contienen variables reales.

Ejemplo 2.5 Dominio de variable.

La expresión $\dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$ no está definida para $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = -1)$.

En secciones posteriores se analizará más detalladamente este tipo de expresiones, pero su sustento está en estas anotaciones.

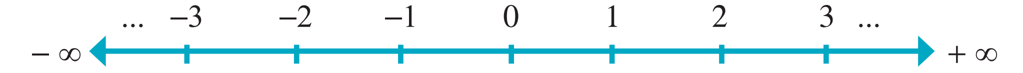
2.4 Relación de Orden

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras una relación de orden en los números reales.
* Interpretar la influencia de las operaciones de los números reales sobre las relaciones de orden.
* Explicar con sus propias palabras la tricotomía de los números reales.

2.4.1 Relación de orden de números enteros



Observando la recta numérica se aprecia que los enteros están "ordenados", de tal modo que un número es mayor que otro mientras más a la derecha se encuentre de él.

Con el objeto de precisar este orden, se define una relación "mayor que" entre los elementos de $\mathbb{Z}$, que se simboliza por **>**.

Definición 2.2 (Orden en $\mathbb{Z}$)

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ (a > b) \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z}^+, (a = b + c)$$

Ejemplo 2.6 Orden en $\mathbb{Z}$.

$5 > 3 \Leftrightarrow 5 = 3 + 2$, siendo $2 \in \mathbb{Z}^+$

$-4 > -7 \Leftrightarrow -4 = -7 + 3$, siendo $3 \in \mathbb{Z}^+$

Otras relaciones que se deben considerar son: "menor que", cuyo símbolo es **<**; "menor o igual que", cuyo símbolo es **≤**; "mayor o igual que", cuyo símbolo es **≥**.

Además, se puede observar que el conjunto $\mathbb{Z}$ cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall n \in \mathbb{Z}\ (n \leq n)$	Reflexiva
2. $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}\ [(m \leq n) \wedge (n \leq p)] \Rightarrow (m \leq p)$	Transitiva
3. $\forall m, n \in \mathbb{Z}\ [(m \leq n) \wedge (n \leq m)] \Rightarrow (m = n)$	Antisimétrica

2.4.2 Relación de orden de números reales.

Se conoce que, en general $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Un problema interesante es cómo extender la relación de orden analizada previamente, al conjunto $\mathbb{R}$ formado por los números reales. A pesar de que la construcción rigurosa es un tanto complicada, en la práctica, a partir de la representación por medio de puntos en la recta numérica se puede observar que si el número b está situado a la derecha de a, se dice que $a < b$, o también que $b > a$.

Definición 2.3 (Tricotomía de los Números Reales)

Dados dos números reales, siempre es posible relacionar su orden, de tal manera que uno es mayor que el otro o son iguales.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ [(a > b) \veebar (a = b) \veebar (a < b)]$$

Además, se puede observar que el conjunto $\mathbb{R}$ cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall a \in \mathbb{R}\ (a \leq a)$	Reflexiva
2. $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R} [(a \leq b) \wedge (b \leq c)] \Rightarrow (a \leq c)$	Transitiva
3. $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ [(a \leq b) \wedge (b \leq a)] \Rightarrow (a = b)$	Antisimétrica

Es importante determinar cómo influyen sobre la relación de orden las operaciones de la adición y la multiplicación de números reales. Las siguientes propiedades ilustran tal influencia:

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a \leq b) \Rightarrow [(a + c) \leq (b + c)]$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [(a \leq b) \wedge (c > 0)] \Rightarrow (ac \leq bc)$
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [(a \leq b) \wedge (c < 0)] \Rightarrow (ac \geq bc)$
4. $(ab = 0) \Leftrightarrow [(a = 0) \vee (b = 0)]$

5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [(ab = bc) \Leftrightarrow (a = c)],\ b \neq 0$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ (ab > 0) \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ (ab < 0) \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]$
8. $\forall a \in \mathbb{R}\ (a^2 > 0) \Leftrightarrow (a \neq 0)$
9. $\forall a \in \mathbb{R}\ (a > 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} > 0\right)$
10. $\forall a \in \mathbb{R}\ (a < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} < 0\right)$

Cabe mencionar que estas propiedades también se aplican a las otras relaciones de orden existentes ($<, >, \leq, \geq$).

2.5 Conceptos asociados al conjunto de los números enteros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un número entero, reconocer si es primo, compuesto, par o impar.
* Dado un conjunto de números enteros, encontrar su Máximo Común Divisor y su Mínimo Común Múltiplo.

Definición 2.4 (Divisores y Múltiplos de un número entero)

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cumplen la relación $c = a \cdot b$, entonces decimos que a y b son factores o divisores de c. En tal caso, c es múltiplo de a y b.

Ejemplo 2.7 Factores o Divisores y Múltiplos de un número.

-20 es múltiplo de 10 porque $-20 = (-2)(10)$.

2 es factor o divisor de -20 porque $-20 = (2)(-10)$.

5 y 7 son factores o divisores de 35, porque 35 es múltiplo de 5 y 7.

En muchas ocasiones, es necesario saber si un número entero divide a otro sin necesidad de efectuar la división. Para ello, se aplican las sencillas reglas o criterios de divisibilidad.

Un número entero es divisible por:

2: Si termina en 0 o en cifra par.

3: Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

4: Si sus dos últimas cifras son 00 o es múltiplo de 4.

5: Si termina en 0 o en 5.

6: Si lo es por 2 y por 3 a la vez.

8: Si sus tres últimas cifras son 000 o es múltiplo de 8.

9: Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

10: Si termina en 0.

Quizás le llame la atención que no se incluya la regla de divisibilidad por 7. Esto se debe a que su complejidad es poco práctica y resulta más fácil saber si el número es o no múltiplo de 7, realizando la división por 7.

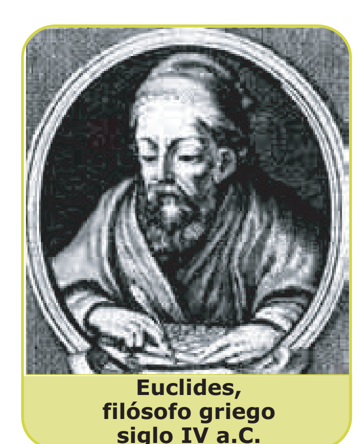
Definición 2.5 (Número Primo)

Un número entero positivo $p > 1$ es primo, si y sólo si sus únicos factores son exactamente 1 y p.

El conjunto de los números primos es:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...\}$$

Euclides fue el primero en demostrar que no existe un número primo mayor que todos los demás, es decir, la cantidad de números primos es infinita. Numerosos matemáticos han buscado, sin éxito, un método que sirva para determinar si un número es primo o no. En la actualidad, con la ayuda de las computadoras es factible encontrar una gran cantidad de elementos de este conjunto P.



Euclides, filósofo griego siglo IV a.C.

Definición 2.6 (Número Compuesto)

Un número entero positivo $n > 1$ es compuesto si y sólo si no es primo.

El número 1 no es primo ni compuesto, ya que representa la unidad, esto es, el único elemento del conjunto de los números enteros positivos que tiene inverso multiplicativo, el cual también es un número entero positivo.

Teorema 2.1 (Teorema fundamental de la Aritmética)

Todo número compuesto se puede descomponer de manera única como el producto de números primos.

Ejemplo 2.8 Números compuestos.

Descomponer los números 87, 105, 2310 en sus factores primos.

Solución:

- Puesto que $8 + 7 = 15$ es múltiplo de 3, 87 también lo es. Efectuando la división por 3, el otro factor es 29, que es primo. Luego, $87 = (3)(29)$.
- Como 105 termina en 5, es divisible por 5. Efectuando la división por 5, el otro factor es 21, el cual se puede descomponer en sus factores 3 y 7. Luego, $105 = (3)(5)(7)$.
- Como 2310 es un número más grande, lo iremos dividiendo sucesivamente por todos los números primos menores que él, por los cuales sea divisible.

2310	2
1155	3
385	5
77	7
11	11
1	

Luego, $2310 = (2)(3)(5)(7)(11)$.

Definición 2.7 (Máximo Común Divisor (M.C.D.))

El M.C.D. de un conjunto de números enteros es el mayor entero positivo que es divisor de cada uno de los números del conjunto.

Ejemplo 2.9 Máximo Común Divisor.

- Considerando el ejemplo anterior, el M.C.D. de los números 87, 105 y 2310 es 3.

- En el conjunto de los números 24, 36, 48:

$24 = (2^3)(3)$
$36 = (2^2)(3^2)$
$48 = (2^4)(3)$
$\text{M.C.D.} : (2^2)(3) = 12$

Una interpretación para el Máximo Común Divisor se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10 Aplicación del Máximo Común Divisor.

Un vendedor dispone de 24, 36 y 48 unidades de tres artículos diferentes, respectivamente. Necesita elaborar paquetes por cada artículo, de tal forma que el número de unidades de todos los paquetes sea el mismo y el más grande posible.
El vendedor necesita calcular el número de unidades que debe tener cada paquete y cuántos paquetes por artículo obtendrá.

Solución:

Se necesita obtener un divisor de 24, 36 y 48 que sea el más grande posible. Del ejemplo anterior, este número es el 12.
Es decir, los paquetes deberán contener 12 unidades. Con lo cual, se obtienen 2, 3 y 4 paquetes para los diferentes artículos, respectivamente.

Definición 2.8 (Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.))

El m.c.m. de un conjunto de números enteros es el menor entero positivo que es el múltiplo de cada uno de los números dados.

Ejemplo 2.11 Mínimo común múltiplo.

- Considerando el ejemplo 2.8, el m.c.m. de los números 87, 105 y 2310 es 66990.

- En el conjunto de los números 2, 6, 10:

$2 = 2$
$6 = (2)(3)$
$10 = (2)(5)$
$\text{m.c.m.} : (2)(3)(5) = 30.$

Ejemplo 2.12 Aplicación del mínimo común múltiplo.

Un fabricante tiene tres productos en su inventario, los cuales se revisan periódicamente cada 2, 6 y 10 semanas, respectivamente. El fabricante necesita calcular cuál será el mínimo tiempo que debe transcurrir en semanas para que la revisión de los tres productos coincida.

Solución:

Este es un problema del múltiplo más pequeño posible entre 2, 6 y 10. Del ejemplo anterior, este número es 30. Por lo tanto, cada 30 semanas los tres productos serán revisados al mismo tiempo.

Definición 2.9 (Números Pares e Impares)

Se dice que a es:
Número Par $\Leftrightarrow$ $a = 2n, n \in \mathbb{Z}$
Número Impar $\Leftrightarrow$ $a = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 2.13 Números Pares e Impares.

12	es par porque	12	$= (2)(6)$
-5	es impar porque	-5	$= (2)(-3) + 1$
0	es par porque	0	$= (2)(0)$
31	es impar porque	31	$= (2)(15) + 1$
-140	es par porque	-140	$= (2)(-70)$
81	es impar porque	81	$= (2)(40) + 1$

Ejemplo 2.14 Propiedades de números pares e impares.

"Si a es un número natural impar, entonces su cubo también es natural impar".

Solución:

Vamos a utilizar el método de demostración directa.
Al ser a impar, podemos escribir $a = 2n + 1$, siendo n un número natural.

$$
\begin{aligned}
a \text{ es impar} &\Rightarrow a = 2n+1 && \text{Definición de número impar.}\\
&\Rightarrow a^3 = (2n+1)^3 && \text{Elevando al cubo.}\\
&\Rightarrow a^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 && \text{Manipulación algebraica.}\\
&\Rightarrow a^3 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1 && \text{Agrupación de términos.}\\
&\Rightarrow a^3 = 2m + 1 && m = 4n^3 + 6n^2 + 3n \text{ es un entero.}\\
&\Rightarrow a^3 \text{ es impar} && \text{Definición de número impar.}
\end{aligned}
$$

Por lo que, efectivamente, a^3 es impar.

Ejemplo 2.15 Propiedades de números pares e impares.

"Si a^2 es un número natural par, entonces a es natural par".

Solución:

Vamos a utilizar el método de demostración por contrarrecíproca.

La contrarrecíproca sería:

"Si a no es un número natural par, entonces a^2 no es natural par".

La cual se reescribe como:

"Si a es número natural impar, entonces a^2 es natural impar".

Al ser a natural impar, $a = 2n + 1$, siendo n un número natural, tenemos:

$$
\begin{aligned}
a \text{ es impar} &\Rightarrow a = 2n+1 && \text{Definición de número impar.}\\
&\Rightarrow a^2 = (2n+1)^2 && \text{Elevando al cuadrado.}\\
&\Rightarrow a^2 = 4n^2 + 4n + 1 && \text{Manipulación algebraica.}\\
&\Rightarrow a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 && \text{Agrupación de términos.}\\
&\Rightarrow a^2 = 2m + 1 && m = 2n^2 + 2n \text{ es un entero.}\\
&\Rightarrow a^2 \text{ es impar} && \text{Definición de número impar.}
\end{aligned}
$$

Hemos demostrado que si a es un número impar, entonces a^2 es impar, cuya contrarrecíproca sería:

"Si a^2 no es un número natural impar, entonces a no es natural impar".

Es decir:

"Si a^2 es un número natural par, entonces a es natural par".

Lo cual verifica la demostración.

2.6 Expresiones algebraicas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una expresión algebraica, reconocer el coeficiente y el factor literal de cada uno de sus términos.
* Aplicar propiedades de las fracciones en la simplificación de expresiones algebraicas.
* Aplicar propiedades de los exponentes en la simplificación de expresiones algebraicas.
* Aplicar productos notables y factorización en la simplificación de expresiones algebraicas.
* Racionalizar expresiones algebraicas.

El álgebra elemental es la parte de la matemática que trata del cálculo con símbolos literales y con operaciones abstractas que generalizan las cuatro operaciones fundamentales. El álgebra usa símbolos, en particular las letras del abecedario en español, con éstos, se efectúan las mismas operaciones que en Aritmética, es decir: +, –, . , ÷.

Definición 2.10 (Expresión algebraica)

Es la combinación de símbolos (números y letras), a través de las diferentes operaciones fundamentales. Los términos de la expresión algebraica corresponden a cada una de sus partes, las cuales están separadas entre sí por los signos $+$ o $-$.

Ejemplo 2.16 Expresiones Algebraicas.

$$15\ a^2b^3c^5$$

$$100m^7n^3p + 2m^6n^4p$$

$$-3x^2y^4z^3$$

En todo término se distingue el coeficiente numérico y el factor literal. En el término $-5\ x^2y^3z^4$, -5 es el coeficiente numérico, $x^2y^3z^4$ es el factor literal. En el factor literal, los números que se colocan en la parte superior derecha de las letras se llaman exponentes e indican el número de veces que se toman dichas letras como factores.

Si la expresión algebraica tiene un solo término se denomina **monomio**, si tiene dos términos se denomina **binomio**, si tiene tres términos se denomina **trinomio**. Si la expresión algebraica tiene en general más de un término, se denomina **polinomio**.

Se denominan **términos semejantes** a aquellos que tienen el mismo factor literal. Al reducir términos semejantes queremos reemplazar a todos ellos por uno solo.

Ejemplo 2.17 Reducción de términos semejantes.

Los términos $5x^2y$, $-3x^2y$, $10x^2y$ y $6x^2y$ son semejantes. Una expresión algebraica que resulta al considerar todos los términos es $5x^2y - 3x^2y + 10x^2y + 6x^2y$. Al reducirla, el resultado es $18x^2y$.

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas, es importante considerar que las letras representan números reales, por lo tanto deben ser tratadas como tales y pueden ser reemplazadas por números reales u otras expresiones algebraicas.

2.6.1 Propiedades de las fracciones

Anteriormente se definió que una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ es un número racional, en el cual a es el numerador y b es el denominador de la fracción. Tanto a como b pertenecen al conjunto de los números enteros, con la restricción de que b no puede ser cero. Para manipular fracciones es necesario considerar las siguientes propiedades:

Sean: $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

1. $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \equiv (ad = bc)$
2. $\left(\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}\right)$
3. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}\right)$
4. $\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\right)$
5. $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\right)$

Ejemplo 2.18 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}+1}$

Solución:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}+1}=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}+1}=\frac{1}{\dfrac{2}{3}+1}=\frac{1}{\dfrac{2+3}{3}}=\frac{1}{\dfrac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

Ejemplo 2.19 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}$

Solución:

$$1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}=1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}}=1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x-1}}}$$

$$=1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1+x}{x-1}}}=1+\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{2x-1}}=1+\frac{1}{\dfrac{2x-1-x+1}{2x-1}}$$

$$=1+\frac{1}{\dfrac{x}{2x-1}}=1+\frac{2x-1}{x}=\frac{x+2x-1}{x}=\frac{3x-1}{x}$$

Ejemplo 2.20 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}}$

Solución:

$$\frac{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}} = \frac{\dfrac{x(x-y)-y(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\dfrac{x(x+y)+y(x-y)}{(x-y)(x+y)}} = \frac{x^2-xy-xy-y^2}{x^2+xy+xy-y^2}$$

$$= \frac{x^2-2xy-y^2}{x^2+2xy-y^2}$$

Ejemplo 2.21 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}}{1+\dfrac{1}{xy}}+\dfrac{y+1}{y+\dfrac{1}{x}}-1$

Solución:

$$\frac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}}{1+\dfrac{1}{xy}}+\frac{y+1}{y+\dfrac{1}{x}}-1 = \frac{\dfrac{x+1}{xy}}{\dfrac{xy+1}{xy}}+\frac{y+1}{\dfrac{xy+1}{x}}-1 = \frac{x+1}{xy+1}+\frac{xy+x}{xy+1}-1$$

$$= \frac{x+1+xy+x-xy-1}{xy+1} = \frac{2x}{xy+1}$$

Ejemplo 2.22 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{u-\dfrac{u}{1+\dfrac{u}{v}}}{w-\dfrac{w}{\dfrac{u}{v}+1}}$

Solución:

$$\frac{u-\dfrac{u}{1+\dfrac{u}{v}}}{w-\dfrac{w}{\dfrac{u}{v}+1}}=\frac{u-\dfrac{u}{\dfrac{v+u}{v}}}{w-\dfrac{w}{\dfrac{u+v}{v}}}=\frac{u-\dfrac{uv}{v+u}}{w-\dfrac{vw}{u+v}}=\frac{\dfrac{uv+u^2-uv}{v+u}}{\dfrac{uw+vw-vw}{u+v}}$$

$$=\frac{\dfrac{u^2}{u+v}}{\dfrac{uw}{u+v}}=\frac{u}{w}$$

2.6.2 Propiedades de los exponentes

Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación en que se repite un mismo factor un cierto número de veces.

$$a^n=\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,.\,.\,a}_{n\text{ veces}}$$

a^n: es la potencia
a : es la base
n : es el exponente

Si el exponente es fraccionario tenemos una expresión algebraica con radicales. Esto es $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$. En general, $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$.

Para simplificar expresiones que poseen exponentes, se deben respetar las siguientes leyes:

Sean $a\neq 0$, $b\neq 0$:

1. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
3. $a^n\cdot b^n=(ab)^n$

4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

5. $(a^n)^m = a^{mn}$

6. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

7. $a^0 = 1$

Ejemplo 2.23 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\frac{(4^p)(27^{p/3})(125^p)(6^{2p})}{(8^{p/3})(9^{3p/2})(10^{3p})}$; $p \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$\frac{(4^p)(27^{p/3})(125^p)(6^{2p})}{(8^{p/3})(9^{3p/2})(10^{3p})} = \frac{(2^{2p})(3^p)(5^{3p})(2^{2p})(3^{2p})}{(2^p)(3^{3p})(2^{3p})(5^{3p})}$$

$$= \frac{(2^{4p})(3^{3p})(5^{3p})}{(2^{4p})(3^{3p})(5^{3p})}$$

$$= 1$$

Ejemplo 2.24 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\frac{(2x^{n+1})^2 x^{3-n}}{x^{2(n+1)}(x^n)^2}$

Solución:

$$\frac{(2x^{n+1})^2 x^{3-n}}{x^{2(n+1)}(x^n)^2} = \frac{4x^{2n+2} x^{3-n}}{x^{2n+2} x^{2n}} = 4x^{3-n-2n} = 4x^{-3n+3}$$

Ejemplo 2.25 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\frac{(6x^4)^{-2}}{\left(\frac{x^{-2}\sqrt{2}}{x^3\sqrt{16}}\right)^2}$

Solución:

$$\frac{(6x^4)^{-2}}{\left(\frac{x^{-2}\sqrt{2}}{x^3\sqrt{16}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{6x^4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4x^5}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{36x^8}}{\frac{2}{16x^{10}}}$$

$$= \frac{2}{9}x^2$$

Ejemplo 2.26 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5 + \sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$

Solución:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5 + \sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}} = \left(\left((2^3a^3)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^5 + \frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$= 2a + \frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n(n-1)}}}$$

$$= 2a + a^{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}}$$

$$= 2a + a^{\frac{n-1}{n(n-1)}}$$

$$= 2a + a^{\frac{1}{n}}$$

$$= 2a + \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo 2.27 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\frac{a^2b^2}{c} \div \left[\left(\frac{a^2c^2}{b} \div \left(\frac{b^2c^2}{a}\right)\left(\frac{ac}{b^2}\right)\right) \div \left(\frac{ab}{c^2} \div \frac{bc}{a^2}\right)\right]$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2b^2}{c} \div \left[\left(\frac{a^2c^2}{b} \div \left(\frac{b^2c^2}{a}\right)\left(\frac{ac}{b^2}\right)\right) \div \left(\frac{ab}{c^2} \div \frac{bc}{a^2}\right)\right] \\
&= \frac{a^2b^2}{c} \div \left[\left(\frac{a^2c^2}{b} \div c^3\right) \div \left(\frac{ab}{c^2}\right)\left(\frac{a^2}{bc}\right)\right] \\
&= \frac{a^2b^2}{c} \div \left[\left(\frac{a^2c^2}{b}\right)\left(\frac{1}{c^3}\right) \div \left(\frac{a^3}{c^3}\right)\right] \\
&= \frac{a^2b^2}{c} \div \left[\left(\frac{a^2}{bc}\right)\left(\frac{c^3}{a^3}\right)\right] \\
&= \frac{a^2b^2}{c} \div \left[\frac{c^2}{ab}\right] \\
&= \left(\frac{a^2b^2}{c}\right)\left(\frac{ab}{c^2}\right) \\
&= \frac{a^3b^3}{c^3} \\
&= \left(\frac{ab}{c}\right)^3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.28 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\left[\frac{27^{-1}a^{-1}b^2}{(3a^{\frac{1}{3}})^{-3}b^5}\right]^{-\frac{1}{3}} + \left[\frac{8b^3}{27\,a^{-3}}\right]^{-\frac{1}{3}}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{27^{-1}a^{-1}b^2}{(3a^{\frac{1}{3}})^{-3}b^5}\right]^{-\frac{1}{3}} + \left[\frac{8b^3}{27\,a^{-3}}\right]^{-\frac{1}{3}} &= \left[\frac{(3a^{\frac{1}{3}})^3b^2}{27\,ab^5}\right]^{-\frac{1}{3}} + \left[\frac{8\,a^3b^3}{27}\right]^{-\frac{1}{3}} \\
&= \left[\frac{(3a^{\frac{1}{3}})^{-1}b^{-\frac{2}{3}}}{(27)^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{3}}}\right] + \left[\frac{(8)^{-\frac{1}{3}}a^{-1}b^{-1}}{(27)^{-\frac{1}{3}}}\right] \\
&= \left[\frac{(27)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\right] + \left[\frac{(27)^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}ab}\right]
\end{aligned}
$$

$$= b + \frac{3}{2ab}$$

$$= \frac{2ab^2 + 3}{2ab}$$

Ejemplo 2.29 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^m\left(x-\frac{1}{y}\right)^n}{\left(y+\frac{1}{x}\right)^m\left(y-\frac{1}{x}\right)^n}$

Solución:

$$\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^m\left(x-\frac{1}{y}\right)^n}{\left(y+\frac{1}{x}\right)^m\left(y-\frac{1}{x}\right)^n} = \frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)^m\left(\frac{xy-1}{y}\right)^n}{\left(\frac{xy+1}{x}\right)^m\left(\frac{xy-1}{x}\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^m\left(\frac{1}{y}\right)^n}{\left(\frac{1}{x}\right)^m\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^m\left(\frac{x}{y}\right)^n$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^{m+n}$$

2.6.3 Productos notables

Los productos notables son multiplicaciones cuyo resultado puede escribirse directamente, sin hacer paso a paso la multiplicación. Son como las tablas de multiplicar del álgebra elemental.

Los principales productos notables son:

- Cuadrado del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

- Producto de binomios con un término repetido

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\,x+ab$$

- Cubo de un binomio

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

- Cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

- Productos que desembocan en la suma o diferencia de cubos perfectos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Los productos notables pueden facilitar cálculos aritméticos, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.30 Aplicación de productos notables.

Encuentre:

a) 41^2
b) 98^2
c) $(18)(22)$

Solución:

a) $41^2=(40+1)^2 = (40)^2+(2)(40)(1)+(1)^2 = 1600+80+1 = 1681$

b) $98^2=(100-2)^2 = (100)^2-(2)(100)(2)+(2)^2 = 10000-400+4 = 9604$

c) $(18)(22) = (20-2)(20+2) = (20)^2-(2)^2 = 400-4 = 396$

2.6.4 Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en escribirla como el producto más simple de sus factores. Para llevarla a cabo, lo primero que debe hacerse es poner en evidencia un factor común, si es que lo hay, y luego analizar si el factor no común corresponde al desarrollo de uno o más de los productos notables. Todas las expresiones correspondientes a los productos notables pueden ser usadas como expresiones de factorización si las leemos de derecha a izquierda.

A continuación se ilustra la operatividad de los casos de factorización:

- Factor común

$$ax + ay - az = a(x + y - z)$$

- Agrupación de términos

$$\begin{aligned} x^2 - ax - bx + ab &= (x^2 - ax) - (bx - ab) \\ &= x(x - a) - b(x - a) \\ &= (x - a)(x - b) \end{aligned}$$

- Trinomio cuadrado perfecto

$$4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$$

- Diferencia de cuadrados perfectos

$$\begin{aligned} 36(m + n)^2 - 121(m - n)^2 &= [6(m + n) + 11(m - n)][6(m + n) - 11(m - n)] \\ &= (6m + 6n + 11m - 11n)(6m + 6n - 11m + 11n) \\ &= (17m - 5n)(17n - 5m) \end{aligned}$$

- Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

$$\begin{aligned} 49m^4 - 151m^2 n^4 + 81n^8 &= 49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8 + 25m^2n^4 - 25m^2n^4 \\ &= (49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8) - 25m^2n^4 \\ &= (7m^2 - 9n^4)^2 - 25m^2n^4 \\ &= (7m^2 - 9n^4 + 5mn^2)(7m^2 - 9n^4 - 5mn^2) \\ &= (7m^2 + 5mn^2 - 9n^4)(7m^2 - 5mn^2 - 9n^4) \end{aligned}$$

- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$a^2 - 66a + 1080 = (a - 30)(a - 36)$$

En este caso se deben buscar dos números reales cuya suma sea -66 y cuya multiplicación sea 1080. Descomponiendo 1080 en factores más elementales se obtienen los números -30 y -36.

- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

$$18x^2 - 13x - 5 = \frac{(18x - 18)(18x + 5)}{18}$$
$$= (x - 1)(18x + 5)$$

En este caso se deben buscar dos números reales cuya suma algebraica sea -13 y cuya multiplicación sea -90. Descomponiendo -90 en factores más elementales se obtienen los números -18 y 5.

- Cubo perfecto de binomios

$$x^9 - 18\,x^6\,y^5 + 108\,x^3y^{10} - 216\,y^{15} = (x^3 - 6y^5\,)^3$$

- Suma o diferencia de dos potencias impares

$$x^5 + 32 \;=\; (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$
$$m^7 - 1 \;=\; (m - 1)(m^6 + m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1)$$

Ejemplo 2.31 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{m^2 - 1}{m^2 + m - 2}$

Solución:

$$\frac{m^2 - 1}{m^2 + m - 2} = \frac{(m + 1)(m - 1)}{(m + 2)(m - 1)} = \frac{m + 1}{m + 2}$$

Ejemplo 2.32 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{6xy - 3x^2}{3x^2 - 13xy + 14y^2}$

Solución:

$$\frac{6xy - 3x^2}{3x^2 - 13xy + 14y^2} = \frac{3x(2y - x)}{(3x - 7y)(x - 2y)} = \frac{-3x(x - 2y)}{(3x - 7y)(x - 2y)} = \frac{-3x}{3x - 7y}$$

Ejemplo 2.33 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica: $\frac{6m^3 - 3m^2n}{21mn + 7n^2} \div \frac{6m^2 + 24mn}{6mn + 2n^2}$

Solución:

$$\frac{6m^3 - 3m^2n}{21mn + 7n^2} \div \frac{6m^2 + 24mn}{6mn + 2n^2} = \left[\frac{6m^3 - 3m^2n}{21mn + 7n^2}\right]\left[\frac{6mn + 2n^2}{6m^2 + 24mn}\right]$$

$$= \left[\frac{3m^2(2m - n)}{7n(3m + n)}\right]\left[\frac{2n(3m + n)}{6m(m + 4n)}\right] = \frac{m(2m - n)}{7(m + 4n)}$$

Ejemplo 2.34 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica:

$$\left(\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 + x}\right) x^2 \div \left[\left(\frac{1 + x}{1 - x} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{1 + x}\right)\right]$$

Solución:

$$\left(\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 + x}\right) x^2 \div \left[\left(\frac{1 + x}{1 - x} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{1 + x}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{(1 + x)^2 - (1 - x)^2}{(1 - x)(1 + x)}\right] x^2 \div \left[\left(\frac{1 + x - 1 + x}{1 - x}\right)\left(\frac{1 + x - 1}{1 + x}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1 + 2x + x^2 - (1 - 2x + x^2)}{(1 - x)(1 + x)}\right] x^2 \div \left[\frac{(2x)(x)}{(1 - x)(1 + x)}\right]$$

$$= \frac{4x^3}{(1 - x)(1 + x)} \div \left[\frac{2x^2}{(1 - x)(1 + x)}\right]$$

$$= \frac{4x^3}{(1 - x)(1 + x)} \left[\frac{(1 - x)(1 + x)}{2x^2}\right]$$

$$= 2x$$

Ejemplo 2.35 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica: $(y^2 - x^2)\left[\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}} + \dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}\right]$

Solución:

$$(y^2-x^2)\left[\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}} + \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}\right] = (y^2-x^2)\left[\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right]$$

$$= (y^2-x^2)\left[\frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y-x}{xy}} + \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x+y}{xy}}\right]$$

$$= (y^2-x^2)\left[\frac{x+y}{y-x} + \frac{y-x}{x+y}\right]$$

$$= (y^2-x^2)\left[\frac{(x+y)^2+(y-x)^2}{y^2-x^2}\right]$$

$$= (y^2-x^2)\left[\frac{x^2+2xy+y^2+y^2-2xy+x^2}{y^2-x^2}\right]$$

$$= 2x^2+2y^2$$

$$= 2(x^2+y^2)$$

Ejemplo 2.36 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\dfrac{x^2-5}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{4}{x+1}}$

Solución:

$$\frac{\frac{x^2-5}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}}{1-\frac{4}{x+1}} = \frac{\frac{x^2-5-(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-4}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{x^2-x-6}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x-3}{x+1}}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{x+2}{x-1}$$

Ejemplo 2.37 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} \div \left[\frac{1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{3+2x-x^2}\right]$$

Solución:

$$= \frac{x}{(x-2)(x-3)} \div \left[\frac{1}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{(x-3)(x-2)} - \frac{1}{(x^2-2x-3)}\right]$$

$$= \frac{x}{(x-2)(x-3)} \div \left[\frac{1}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{(x-3)(x-2)} - \frac{1}{(x-3)(x+1)}\right]$$

$$= \frac{x}{(x-2)(x-3)} \div \left[\frac{x-3+x+1-x+2}{(x-2)(x+1)(x-3)}\right]$$

$$= \frac{x}{(x-2)(x-3)} \left[\frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{x}\right]$$

$$= x+1$$

Ejemplo 2.38 Productos notables y factorización.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\left(\dfrac{3}{x^2-2x-3}\right) - \left(\dfrac{3}{x^2-1}\right)}{\left(\dfrac{2}{1-x^2}\right) + \left(\dfrac{2}{x-3}\right)}$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{3}{x^2-2x-3}\right)-\left(\frac{3}{x^2-1}\right)}{\left(\frac{2}{1-x^2}\right)+\left(\frac{2}{x-3}\right)} = \frac{\frac{3}{(x-3)(x+1)}-\frac{3}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2}{(1+x)(1-x)}+\frac{2}{(x-3)}}$$

$$= \frac{\frac{3(x-1)-3(x-3)}{(x-3)(x+1)(x-1)}}{\frac{-2(x-3)+2(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)(x-1)}}$$

$$= \frac{3x-3-3x+9}{-2x+6+2x^2-2} = \frac{6}{2x^2-2x+4}$$

$$= \frac{6}{2(x^2-x+2)} = \frac{3}{x^2-x+2}$$

2.6.5 Racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción es convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente, cuyo denominador sea racional. Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del denominador.

Ejemplo 2.39 Racionalización.

Racionalizar la siguiente expresión: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Ejemplo 2.40 Racionalización.

Racionalizar la siguiente expresión: $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{7-3}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$$

Ejemplo 2.41 Racionalización.

Racionalizar la siguiente expresión: $\frac{10}{1+\sqrt{3}} - \frac{8}{2-\sqrt{2}}$

Solución:

$$\frac{10}{1+\sqrt{3}} - \frac{8}{2-\sqrt{2}} = \left(\frac{10}{1+\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{8}{2-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{10(1-\sqrt{3})}{1-3} - \frac{8(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{10-10\sqrt{3}}{-2} - \frac{16+8\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{10-10\sqrt{3}+16+8\sqrt{2}}{-2} = \frac{26+8\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -13-4\sqrt{2}+5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}-4\sqrt{2}-13$$

Ejemplo 2.42 Racionalización.

Racionalizar la siguiente expresión: $\frac{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt{x}+1}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt{x}+1} = \left(\frac{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x-x^{\frac{1}{2}}-x^2+x^{\frac{3}{2}}}{x-1} = \frac{x(1-x)-x^{\frac{1}{2}}(1-x)}{x-1}$$

$$= -\frac{x(1-x)-x^{\frac{1}{2}}(1-x)}{1-x} = -\frac{(1-x)(x-x^{\frac{1}{2}})}{1-x}$$

$$= -(x-x^{\frac{1}{2}}) = -x+\sqrt{x}$$

Ejemplo 2.43 Racionalización.

Racionalizar la siguiente expresión: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\left[\frac{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5}$$

2.7 Valor Absoluto

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un número real, obtener su valor absoluto.
* Interpretar el concepto de valor absoluto como la distancia entre dos números reales.
* Representar intervalos sobre la recta real.
* Dado un intervalo, identificar si es abierto, cerrado, semiabierto o semicerrado.
* Aplicar la definición de valor absoluto en operaciones binarias.

Todo número se caracteriza por dos elementos: su valor absoluto y su signo.

Ejemplo 2.44 Valor absoluto.

En el entero -5, el valor absoluto es 5 y el signo es negativo.

En el entero 7, el valor absoluto es 7 y el signo es positivo.

En el entero 0, el valor absoluto es 0 y no tiene signo.

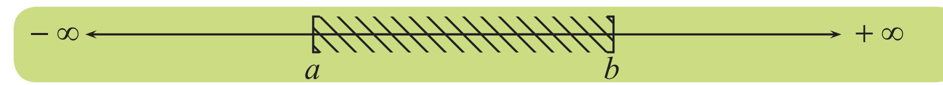
Para poder definir el valor absoluto es necesario conocer el concepto de intervalo. Si utilizamos el conjunto de los números reales, podemos definir intervalos como subconjuntos de este conjunto.

Capítulo 2
Números Reales

Tipos de intervalo

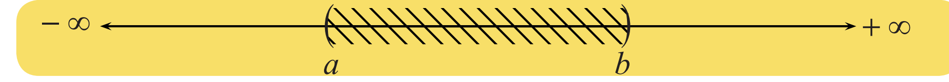
- Intervalo cerrado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/ a \leq x \leq b\}$$



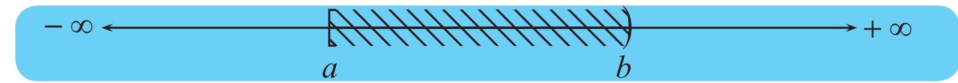
- Intervalo abierto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/ a < x < b\}$$



- Intervalo semiabierto / semicerrado

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/ a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/ a < x \leq b\}$$



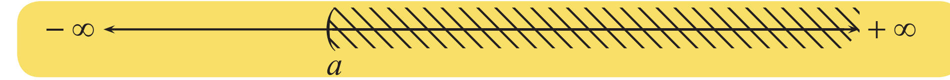
- Intervalos con extremo infinito

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/ x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x < a\}$$

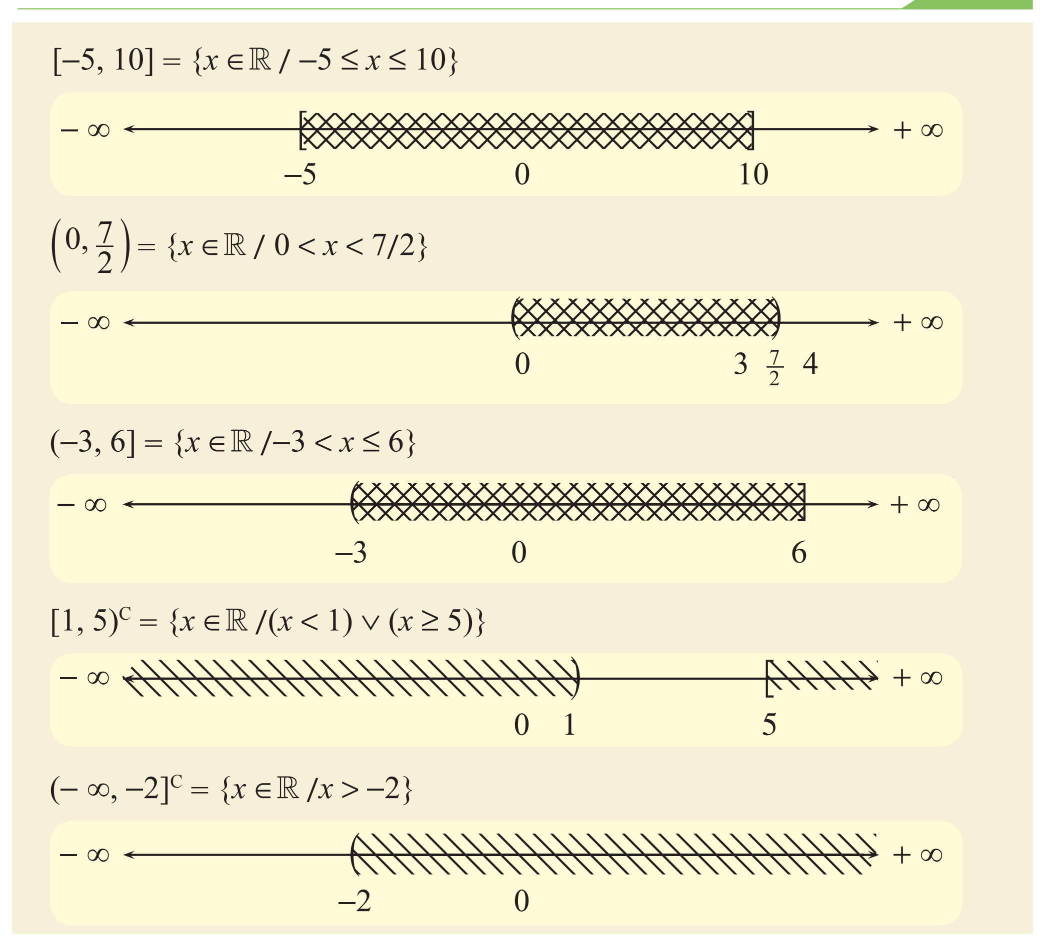
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x > a\}$$



Dado que los intervalos son subconjuntos de los Números Reales, también se los puede representar gráficamente sobre la recta real como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.45 Intervalos.



Definición 2.11 (Valor Absoluto)

El valor absoluto de un número x se representa por $|x|$ y es un número no negativo, tal que:

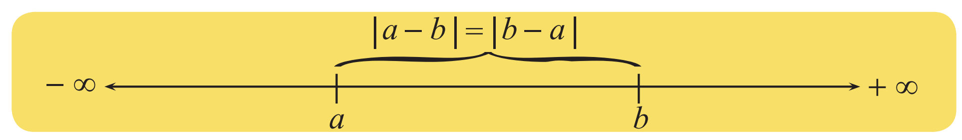
$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Si x es un número positivo o cero, su valor absoluto es el mismo número. Si x es un número negativo, su valor absoluto es su valor numérico cambiado de signo.

Puede también observar que $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

El valor absoluto asigna a cada número un valor no negativo, que representa la distancia entre dicho número y el cero en la recta numérica.

Si se calcula el valor absoluto de la diferencia entre dos números reales, éste representa la distancia que hay entre ellos. En general si $a, b \in \mathbb{R}$, $|a-b|$ es la distancia entre a y b.



Ejemplo 2.46 Valor absoluto.

$|-\pi|=\pi$

$\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

$|-0.3333...|=\frac{1}{3}$

$|1000|=1000$

$|-332.87|=332.87$

$\sqrt{3^2}=|3|=3$

$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$

$|5-3|=|3-5|=2$

En este último ejercicio se observa que la distancia entre 3 y 5 es 2, indistintamente del orden en el que se coloquen los números.

Como se puede observar, la siguiente proposición es verdadera: $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

Las siguientes propiedades del valor absoluto resultan ser de mucha utilidad en el trabajo con números reales:

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. $|ab|=|a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$
3. $|a+b| \leq |a|+|b|$
4. $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$

A continuación demostraremos la propiedad 2.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$$

Aplicando la definición del valor absoluto.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \begin{cases} \dfrac{a}{b}\ , & \dfrac{a}{b} \geq 0 \\ -\dfrac{a}{b}\ , & \dfrac{a}{b} < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b},\ \frac{a}{b} \geq 0$

a) $(a \geq 0) \wedge (b > 0)$

$|a| = a \wedge |b| = b$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$$

b) $(a \leq 0) \wedge (b < 0)$

$|a| = -a \wedge |b| = -b$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{-|a|}{-|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Caso 2: $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b},\ \frac{a}{b} < 0$

a) $(a > 0) \wedge (b < 0)$

$|a| = a \wedge |b| = -b$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{|a|}{-|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

b) $(a < 0) \wedge (b > 0)$

$|a| = -a \wedge |b| = b$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{-|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

A continuación demostraremos la propiedad 3.

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Aplicando la definición del valor absoluto.

$$|a+b| = \begin{cases} a+b \ , & a+b \geq 0 \\ -(a+b) \ , & a+b < 0 \end{cases}$$

a) $(a \geq 0) \wedge (b \geq 0)$

$$a+b \geq 0$$
$$|a+b| = a+b$$
$$|a| = a \wedge |b| = b$$
$$|a+b| = |a| + |b|$$

b) $(a < 0) \wedge (b < 0)$

$$a+b < 0$$
$$|a+b| = -(a+b)$$
$$|a| = -a \wedge |b| = -b$$
$$|a+b| = -a-b = |a| + |b|$$

c) $a \geq 0 \wedge b \leq 0$

1. $|a| \geq |b|$

$$a+b \geq 0$$
$$|a+b| = a+b$$
$$|a| = a \wedge |b| = -b$$
$$|a+b| = |a| - |b| \leq |a| + |b|$$
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

2. $|a| \leq |b|$

$$a+b < 0$$
$$|a+b| = -(a+b) = -a-b$$
$$|a| = a \wedge |b| = -b$$
$$|a+b| = -|a| + |b| \leq |a| + |b|$$
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

d) $a \leq 0 \wedge b \geq 0$

1. $|a| \geq |b|$

$a + b < 0$

$|a+b| = -(a+b) = -a-b$

$|a| = -a \wedge |b| = b$

$|a+b| = |a| - |b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

2. $|a| \leq |b|$

$a + b \geq 0$

$|a+b| = a+b$

$|a| = -a \wedge |b| = b$

$|a+b| = -|a| + |b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Ejemplo 2.47 Aplicación del Valor Absoluto.

- $|(5)(-4)| = |5||-4|$

$|-20| = (5)(4)$

$20 = 20$

- $\left|-\frac{7}{2}\right| = |-1|\left|\frac{7}{2}\right|$

$\left|-\frac{7}{2}\right| = (1)\left(\frac{7}{2}\right)$

$\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$

- $\left|\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\right| \leq \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{4}{5}\right|$

$\left|-\frac{11}{20}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{4}{5}$

$\frac{11}{20} \leq \frac{21}{20}$

- $\left|-3-\frac{1}{2}\right| \geq \left||-3|-\left|\frac{1}{2}\right|\right|$

  $\left|-\frac{7}{2}\right| \geq \left|3-\frac{1}{2}\right|$

  $\frac{7}{2} \geq \frac{5}{2}$

Ejemplo 2.48 Valor Absoluto en Operaciones Binarias.

Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y Δ una operación binaria en A, tal que $a\Delta b = |a|+|b|-2;\ a,\ b \in A$.

Identifique el valor de verdad de cada proposición:

a) $\forall a \in A\ \exists b \in A[a\Delta b = 0]$

b) Δ es una operación conmutativa.

c) $\exists a \in A\ \forall b \in A\ [a\Delta b = |b|]$

d) Δ es una operación asociativa.

Solución:

a) $-2\ \Delta\ \ 0 = 0$

$-1\ \Delta\ -1 = 0$

$0\ \Delta\ -2 = 0$

$1\ \Delta\ -1 = 0$

$2\ \Delta\ \ 0 = 0$

$\therefore$ Esta proposición es verdadera.

b) $\forall a, b \in A\ (a\Delta b = b\Delta a)$

$|a| + |b| - 2 = |b| + |a| - 2$

$\therefore$ Esta proposición es verdadera, es decir, la operación cumple con la propiedad conmutativa.

c) $2\Delta(-2) = |-2| = 2$

$2\Delta(-1) = |-1| = 1$

$2\Delta(0) = |0| = 0$

$2\Delta(1) = |1| = 1$

$2\Delta(2) = |2| = 2$

También podemos verificar la proposición con el elemento -2.

$\therefore$ Esta proposición es verdadera.

d) $[(0 \,\Delta\, 1) \,\Delta\, 2 = (-1) \,\Delta\, 2 = 1] \neq [0 \,\Delta\, (1 \,\Delta\, 2) = 0 \,\Delta\, 1 = -1]$

La operación no es asociativa.

$\therefore$ Esta proposición es falsa.

2.8 Ecuaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras la diferencia entre ecuación e identidad.
* Realizar demostraciones aplicando propiedades de las igualdades.
* Resolver ecuaciones de tipo lineal, cuadrática, con valor absoluto y con radicales.
* Dada una ecuación cuadrática, determinar el tipo de solución que tendrá mediante el análisis de su discriminante.
* Dada una ecuación cuadrática con parámetros desconocidos, establecer condiciones sobre estos parámetros en función del tipo de solución requerido.
* Analizar soluciones extrañas de las ecuaciones con radicales.
* Plantear y resolver problemas basados en ecuaciones.

Una igualdad es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas tienen el mismo valor. Existen dos tipos de igualdades: absolutas y condicionales.

Definición 2.12 (Identidad)

Una identidad o igualdad absoluta, es un enunciado que compara dos expresiones matemáticas con el símbolo "=" y es verdadero para todos los valores de las variables del conjunto referencial que corresponda.

Ejemplo 2.49 Identidades o igualdades absolutas.

$4^{-2} = \dfrac{1}{16}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad x^0 = 1$

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$ $\qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Definición 2.13 (Ecuación)

Una ecuación o igualdad condicional, es aquella que es verdadera sólo para algún o algunos valores de las variables del conjunto referencial que corresponda.

Ejemplo 2.50 Ecuaciones o igualdades condicionales.

$x - 2 = 17$, es una igualdad siempre y cuando $x = 19$.

$3x + 2 = 7$, es una igualdad siempre y cuando $x = \frac{5}{3}$.

$x^2 - 1 = 0$, es una igualdad siempre y cuando $|x| = 1$.

Los valores de la incógnita x que hacen que la ecuación se convierta en una proposición verdadera, se denominan **soluciones** o **raíces** de la misma. El proceso de determinar las soluciones se denomina resolución de la ecuación.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución. En la resolución de la ecuación intentamos determinar una que sea más simple y equivalente, en la cual aparezca la incógnita sólo en uno de los lados de la igualdad.

Una ecuación puede representarse con un predicado $p(x)$, cuyo conjunto referencial es el conjunto de números reales, a no ser que se especifique otro conjunto. El conjunto de verdad $\mathrm{A}p(x)$ está conformado por la(s) solución(es) de dicha ecuación.

Las expresiones que están a ambos lados del símbolo igual son los miembros de la ecuación: primer miembro el de la izquierda, segundo miembro el de la derecha.

Expresión 1 = Expresión 2

En estas propiedades tanto x como y pueden representar expresiones algebraicas desde las más sencillas hasta las más complicadas:

1	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x = y) \equiv (y = x)$
2	$\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge \forall c \in \mathbb{R}, (x = y) \equiv [x + c = y + c]$
3	$\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge \forall c \in \mathbb{R}, (x = y) \Rightarrow (xc = yc)$
4	$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}, (x = y) \Rightarrow (x^n = y^n), n \in \mathbb{Z}$
5	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy = 0) \equiv [x = 0 \vee y = 0]$

Ejemplo 2.51 Propiedades de las Ecuaciones.

Analice el siguiente razonamiento, en el cual se concluye que todo número real es igual a cero; $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&a = b\\
&a^2 = ab\\
&a^2 - b^2 = ab - b^2\\
&(a - b)(a + b) = b(a - b)\\
&a + b = b\\
&a = 0
\end{aligned}$$

¿Dónde está el error?

a) En multiplicar por a.

b) En restar b^2.

c) En la simplificación.

Solución:

El error está en la simplificación, pues como $a = b \Rightarrow a - b = 0$.

Podemos encontrar distintos tipos de ecuaciones. En esta sección vamos a tratar las siguientes ecuaciones: lineales, cuadráticas, con valor absoluto, con radicales.

2.8.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal o de primer grado, corresponde al tipo más simple de ecuación, pudiendo ser reducida a un predicado de la forma:

$$p(x): ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

La solución de la ecuación anterior la obtenemos así:

$ax + b = 0$	Consideramos la expresión original.
$ax + b - b = 0 - b$	Sumamos el inverso aditivo de b a ambos miembros.
$ax + 0 = -b$	Reducimos la expresión.
$ax = -b$	Propiedad del neutro aditivo.
$\left(\frac{1}{a}\right) ax = \left(\frac{1}{a}\right)(-b)$	Efectuamos el producto por el inverso multiplicativo de a.

$(1)(x) = -\frac{b}{a}$ Simplificamos la expresión.

$x = -\frac{b}{a}$ Propiedad del neutro multiplicativo.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $ax + b = 0$, $\mathrm{A}p(x) = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Ejemplo 2.52 Ecuaciones lineales.

Si $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 7x - 5 = 4x + 7$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$7x - 5 = 4x + 7$ Consideramos la expresión original.

$7x - 5 + 5 = 4x + 7 + 5$ Sumamos 5 a ambos miembros de la ecuación.

$7x = 4x + 12$ Reducimos la expresión.

$7x - 4x = 4x - 4x + 12$ Restamos $4x$ a ambos miembros de la ecuación.

$3x = 12$ Reducimos la expresión.

$\left(\frac{1}{3}\right)3x = \left(\frac{1}{3}\right)12$ Efectuamos el producto con el inverso multiplicativo de 3.

$x = 4$ Despejamos la incógnita x.

Comprobamos el valor de x:

$$p(4) : 7(4) - 5 = 4(4) + 7$$
$$23 = 23$$

$\therefore p(4) \equiv 1$

Se concluye que $\mathrm{A}p(x) = \{4\}$.

Ejemplo 2.53 Ecuaciones lineales.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : \dfrac{3 - \dfrac{2 + \frac{2-x}{3}}{3}}{2} = 1$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$$3-\frac{2+\frac{2-x}{3}}{3}=2$$

$$3-\frac{\frac{6+2-x}{3}}{3}=2$$

$$3-\frac{\frac{8-x}{3}}{3}=2$$

$$3-\frac{8-x}{9}=2$$

$$\frac{27-8+x}{9}=2$$

$$19+x=18$$
$$x=-1$$

Comprobando, tenemos que:

$$p(-1):\ \frac{3-\frac{2+\frac{2-(-1)}{3}}{3}}{2}=\frac{3-\frac{2+\frac{3}{3}}{3}}{2}=\frac{3-\frac{2+1}{3}}{2}=\frac{3-\frac{3}{3}}{2}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\therefore\ p(-1)\equiv 1$$

Se concluye que $\mathrm{A}p(x)=\{-1\}$.

Ejemplo 2.54 Ecuaciones lineales.

Sea $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y $p(x)$: $\dfrac{x+a}{2a+b}+\dfrac{x+b}{a+2b}=2$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$$\frac{(x+a)(a+2b)+(x+b)(2a+b)}{(2a+b)(a+2b)}=2$$

$$(x+a)(a+2b)+(x+b)(2a+b)=2(2a+b)(a+2b)$$
$$ax+2bx+a^2+2ab+2ax+bx+2ab+b^2=4a^2+8ab+2ab+4b^2$$
$$3ax+3bx+a^2+4ab+b^2=4a^2+10ab+4b^2$$
$$x(3a+3b)=3a^2+6ab+3b^2$$

$$x = \frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{3a + 3b}$$

$$x = \frac{3(a^2 + 2ab + b^2)}{3(a+b)}$$

$$x = \frac{(a+b)^2}{a+b}$$

$$x = a + b$$

Comprobando, tenemos que:

$$p(a+b)\colon \frac{(a+b)+a}{2a+b} + \frac{(a+b)+b}{a+2b} = \frac{2a+b}{2a+b} + \frac{a+2b}{a+2b} = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore p(a+b) \equiv 1$$

Se concluye que $\mathrm{A}p(x) = \{a+b\}$.

2.8.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es aquella que puede representarse con un predicado de la forma:

$$p(x) : ax^2 + bx + c = 0 \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

Se pueden encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática mediante factorización o por la fórmula general.

En el primer caso, se trata de expresar el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática como el producto de dos factores lineales, y se igualan a cero estos factores. Las nuevas ecuaciones que resultan son lineales y se las puede resolver separadamente, como se describió en la sección anterior.

Finalmente, las soluciones de estas ecuaciones se unen para conformar el conjunto de verdad de la ecuación cuadrática dada.

Ejemplo 2.55 Resolución de una ecuación cuadrática mediante factorización.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $x^2 + 5x - 6 = 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$(x + 6)(x - 1) = 0$

$(x + 6 = 0) \vee (x - 1 = 0)$

$(x = -6) \vee (x = 1)$

Comprobando, tenemos que:

$p\,(-6) : (-6)^2 + 5(-6) - 6 = 36 - 30 - 6 = 0$

$p\,(1) : (1)^2 + 5(1) - 6 = 1 + 5 - 6 = 0$

En consecuencia, $\mathrm{A}p(x) = \{-6, 1\}$.

Ejemplo 2.56 Resolución de una ecuación cuadrática mediante factorización.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $3x^2 - 11x + 6 = 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$$\frac{(3x - 9)(3x - 2)}{3} = 0$$

$(x - 3)(3x - 2) = 0$

$(x - 3 = 0) \vee (3x - 2 = 0)$

$(x = 3) \vee \left(x = \frac{2}{3}\right)$

Comprobando, tenemos que:

$p(3) \; : 3(3)^2 - 11(3) + 6 = 3(9) - 11(3) + 6 = 27 - 33 + 6 = 0$

$\therefore p(1) \equiv 1$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) : 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 11\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{4}{3} - \frac{22}{3} + 6 = \frac{4 - 22 + 18}{3} = 0$$

$$\therefore p\left(\frac{2}{3}\right) \equiv 1$$

Se concluye que $\mathrm{A}p(x) = \left\{\frac{2}{3}, 3\right\}$.

Mediante la fórmula general, las soluciones de la ecuación cuadrática también pueden obtenerse algebraicamente de la manera siguiente:

$ax^2 + bx + c = 0$	Tomando la ecuación original.
$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$	Factor común a.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Producto de ambos miembros por $\frac{1}{a}$.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$	Complexión del trinomio cuadrado perfecto.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Factorización.
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Extracción de raíz cuadrada a ambos miembros.
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Despejando x.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Simplificando y reduciendo.

Fórmula General

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ (Discriminante)

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Interpretación del discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

- Si el discriminante es mayor que cero, existen dos soluciones reales y diferentes.
- Si el discriminante es igual a cero, hay una solución real duplicada.
- Si el discriminante es menor que cero, no existe solución real.

Ejemplo 2.57 Resolución de una ecuación cuadrática mediante la fórmula general.

Caso: Dos soluciones reales diferentes.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 3x^2 - 5x + 1 = 0$, determine $\text{A}p(x)$.

En este caso, $a = 3$, $b = -5$, $c = 1$.

El discriminante $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(1) = 13$.

Puesto que $13 > 0$, significa que hay 2 raíces reales y diferentes.

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \quad ; \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

Comprobando, tenemos que:

$$p\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right) : 3\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{12}(25 + 10\sqrt{13} + 13) - \frac{25}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25}{12} + \frac{5}{6}\sqrt{13} + \frac{13}{12} - \frac{25}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25 + 13 - 50 + 12}{12}$$

$$= 0$$

$$p\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) : 3\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{12}(25 - 10\sqrt{13} + 13) - \frac{25}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25}{12} - \frac{5}{6}\sqrt{13} + \frac{13}{12} - \frac{25}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25 + 13 - 50 + 12}{12}$$

$$= 0$$

Entonces, $\mathrm{A}p(x) = \left\{ \frac{5 - \sqrt{13}}{6}, \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right\}$.

Ejemplo 2.58 Resolución de una ecuación cuadrática mediante la fórmula general.

Caso: Una solución real repetida.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 16x^2 - 24x + 9 = 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:
En este caso, $a = 16$, $b = -24$, $c = 9$.
El discriminante $b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(16)(9) = 0$, significa que hay una raíz real duplicada.

$$x_{1,2} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(16)(9)}}{2(16)}$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32}$$

$$x_{1,2} = \frac{24}{32}$$

Simplificando, tenemos que:
$x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$
Comprobando, tenemos que:

$$p\left(\frac{3}{4}\right) : 16\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 24\left(\frac{3}{4}\right) + 9 = 16\left(\frac{9}{16}\right) - 18 + 9 = 0$$

Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x) = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

Ejemplo 2.59 Resolución de una ecuación cuadrática mediante la fórmula general.

Caso: No existen soluciones reales.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 3x^2 - 4x + 2 = 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

En este caso, $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$.

El discriminante $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(2) = -8$, es decir que es menor que cero, lo cual significa que no hay raíces reales.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

Para este problema, $\mathrm{A}p(x) = \emptyset$.

Ejemplo 2.60 Ecuaciones cuadráticas.

Contrario a los ejemplos anteriores, la ecuación cuadrática puede tener parámetros desconocidos, los cuales se determinan con condiciones sobre el discriminante de la ecuación.

Así, si se tiene la ecuación $2x^2 - Kx + 5 = 0$ y se requiere que tenga una solución real duplicada (solución real única), su discriminante debe igualarse a cero.

Esto es $K^2 - 4(2)(5) = 0$. Se obtiene que $K = \pm 2\sqrt{10}$.

Por lo tanto, la ecuación cuadrática dada tiene solución única si y sólo si $K \in \{-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}\}$.

En este último ejemplo, también se pueden obtener condiciones para K si se requiere que la ecuación cuadrática tenga dos soluciones reales diferentes, o no tenga solución en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.61 Ecuaciones cuadráticas.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, determine los valores de p para que la ecuación: $3x^2 + (p + 1)x + 24 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ tenga dos raíces tales que la una sea el doble de la otra.

Solución:

Por la fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-(p+1) \pm \sqrt{(p+1)^2 - 288}}{6}$

Por condición del problema:

$$\frac{-(p+1)-\sqrt{(p+1)^2-288}}{6}=2\left[\frac{-(p+1)+\sqrt{(p+1)^2-288}}{6}\right]$$

$$-(p+1)-\sqrt{(p+1)^2-288}=-2(p+1)+2\sqrt{(p+1)^2-288}$$

Esto es: $(p+1)=3\sqrt{(p+1)^2-288}$.

Elevando al cuadrado: $(p+1)^2=9[(p+1)^2-288]$.

Simplificando, se obtiene: $(p+1)^2=324$.

Esto es: $p+1=\pm 18 \Rightarrow (p=17 \vee p=-19)$.

Ejemplo 2.62 Ecuaciones cuadráticas.

Si $a^2+2ab+b^2+a+b=12$; y, a y b son números reales negativos, ¿cuál es el valor de $a+b$?

Solución:

Puesto que: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

Tenemos entonces: $(a+b)^2+(a+b)=12$

Es decir: $(a+b)^2+(a+b)-12=0$

Si se realiza el cambio de variable: $u=a+b$

La ecuación se transforma en: $u^2+u-12=0$

La cual es una ecuación de segundo grado que se puede factorizar así:

$(u+4)(u-3)=0$

$(u+4=0) \vee (u-3=0)$

$(u=-4) \vee (u=3)$

Resolviendo la ecuación original: $[(a+b)+4][(a+b)-3]=0$.

Con lo cual: $(a+b=-4) \vee (a+b=3)$.

Ahora bien, como a y b son números reales negativos, entonces $(a+b)$ también debe ser un número real negativo.

Por lo tanto, $a+b=-4$.

Suma Algebraica de las Raíces de la Ecuación Cuadrática.

La suma de las raíces de la ecuación cuadrática viene dada por la fórmula:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Fórmula General}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} \therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto Algebraico de las Raíces de la Ecuación Cuadrática.

El producto de las raíces de la ecuación cuadrática viene dado por la fórmula:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Fórmula General}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 2.63 Ecuaciones cuadráticas.

Encuentre el valor de k en la ecuación $2x^2 - 5x = x^2 + 3x - k + 1$ para que la suma de sus soluciones sea el triple de su producto.

Solución:

La ecuación cuadrática será:

$$x^2 - 8x + (k - 1) = 0$$

cuyas constantes son:

$$a = 1,\ b = -8,\ c = k - 1$$

Según la condición del problema:

$$-\frac{b}{a} = 3\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$-\frac{-8}{1} = 3\left(\frac{k-1}{1}\right)$$

$$8 = 3k - 3$$

$$k = \frac{11}{3}$$

2.8.3 Ecuaciones con valor absoluto

Una ecuación con valor absoluto es una expresión algebraica que incluye el valor absoluto, y las más simples pueden representarse con uno de los siguientes predicados:

$p(x)$: $\lvert ax + b\rvert + c = 0$	$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$
$p(x)$: $\lvert ax^2 + bx + c\rvert + d = 0$	$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$

Aunque pueden darse expresiones más complejas, con el propósito de utilizar las propiedades del valor absoluto, en esta sección se ilustrará un ejemplo de cada forma. Ecuaciones más avanzadas requieren combinar métodos gráficos y propiedades para su solución, lo cual se estudiará en capítulos posteriores.

Ejemplo 2.64 Ecuaciones con valor absoluto.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $5 - \lvert x - 1\rvert = 3$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$\lvert x - 1\rvert = 5 - 3$ Despejamos el valor absoluto.

$\lvert x-1 \rvert = 2$	Simplificamos.
$(x-1=-2) \vee (x-1=2)$	Aplicamos la definición del valor absoluto.
$(x=-1) \vee (x=3)$	Despejando x.

Comprobando, tenemos que:

$p(-1)$: $5-\lvert -2 \rvert = 5-2=3$

$p(3)$: $5-\lvert 2 \rvert = 5-2=3$

Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x) = \{-1, 3\}$.

Ejemplo 2.65 Ecuaciones cuadráticas y con valor absoluto.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x): 2x^2 - 3\lvert x \rvert = x$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

Se deben resolver dos ecuaciones cuadráticas, aplicando la definición de valor absoluto:

$[(2x^2-3x=x) \wedge (x \geq 0)] \quad \vee \quad [(2x^2+3x=x) \wedge (x<0)]$

$[(2x^2-4x=0) \wedge (x \geq 0)] \quad \vee \quad [(2x^2+2x=0) \wedge (x<0)]$

$[(2x\,(x-2)=0) \wedge (x \geq 0)] \quad \vee \quad [(2x\,(x+1)=0) \wedge (x<0)]$

$\{[(x=0) \vee (x=2)] \wedge (x \geq 0)\} \quad \vee \quad \{[(x=0) \vee (x=-1)] \wedge (x<0)\}$

$[(x=0) \vee (x=2)] \quad \vee \quad (x=-1)$

Al realizar la verificación:

$p(0)\ :\ 2(0)^2 - 3\lvert 0 \rvert = 0 \qquad \therefore\ p(0) \equiv 1$

$p(2)\ :\ 2(2)^2 - 3\lvert 2 \rvert = 2 \qquad \therefore\ p(2) \equiv 1$

$p(-1):\ 2(-1)^2 - 3\lvert -1 \rvert = -1 \qquad \therefore\ p(-1) \equiv 1$

Se concluye que $\mathrm{A}p(x) = \{-1, 0, 2\}$.

2.8.4 Ecuaciones con radicales

Una ecuación con radicales es una expresión algebraica en la cual la variable x aparece bajo una raíz cuadrada. El único procedimiento razonable consiste en elevar al cuadrado el miembro que posea el radical para eliminarlo.

Sin embargo, con este procedimiento la ecuación no se transforma en una ecuación equivalente, ya que para que dos ecuaciones sean equivalentes se necesita que tengan exactamente las mismas soluciones.

Ejemplo 2.66 Ecuaciones con radicales.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : \sqrt{x+13} - \sqrt{7-x} = 2$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$\sqrt{x+13} = 2 + \sqrt{7-x}$	Transponemos uno de los términos radicales.
$x + 13 = 4 + 4\sqrt{7-x} + 7 - x$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$2x + 2 = 4\sqrt{7-x}$	Simplificamos la expresión.
$x + 1 = 2\sqrt{7-x}$	Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ ambos miembros.
$x^2 + 2x + 1 = 4(7-x)$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$x^2 + 6x - 27 = 0$	Simplificamos la expresión.
$(x+9)(x-3) = 0$	Factorizamos.
$(x+9=0) \vee (x-3=0)$	Igualamos a cero los factores.
$(x=-9) \vee (x=3)$	Despejamos la incógnita.

Comprobando, tenemos que:

$$p(-9) : \sqrt{-9+13} - \sqrt{7+9} = \sqrt{4} - \sqrt{16} = -2 \neq 2 \therefore p(-9) \equiv 0.$$

$$p(3) : \sqrt{3+13} - \sqrt{7-3} = \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2 = 2 \quad \therefore p(3) \equiv 1.$$

Con lo cual, $\mathrm{A}p(x) = \{3\}$.

El valor de -9 corresponde a la llamada "solución extraña", ya que es solución de la ecuación cuadrática, pero no de la ecuación con el radical; estas dos ecuaciones no son equivalentes, lo cual hace que se presenten soluciones extrañas.

Ejemplo 2.67 Ecuaciones con radicales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{2x+1})^2$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$x + 2\sqrt{x}\,\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x + 1$	Aplicamos producto notable.
$2\sqrt{x}\,\sqrt{x+1} = 0$	Simplificamos cada expresión.
$4x(x+1) = 0$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$(4x = 0) \vee (x + 1 = 0)$	Igualamos a cero los factores.
$(x = 0) \vee (x = -1)$	Despejamos la incógnita.

Comprobando, tenemos que:

$p(0) \quad : \sqrt{0} + \sqrt{1} = \sqrt{0+1} \qquad \therefore\ p(0) \equiv 1$

$p(-1) : \sqrt{-1} + \sqrt{-1+1} = \sqrt{-2+1} \qquad \therefore\ p(-1) \equiv 0$

Note que esta última expresión no está definida en $\mathbb{R}$ y corresponde a la denominada "solución extraña".

Con lo cual $\text{A}p(x) = \{0\}$.

2.8.5 Planteo de ecuaciones

Una de las aplicaciones más importantes que podemos encontrar con el estudio del álgebra es la solución de problemas de las ciencias de la ingeniería, la economía, la administración, las finanzas, la medicina, y otros del mundo real, los cuales pueden plantearse en términos algebraicos y resolverse con las técnicas anteriormente estudiadas.

Considere las siguientes reglas básicas para la resolución de problemas de enunciado verbal:

- **Lectura y compresión del enunciado del problema:** Antes de iniciar la resolución de un problema, es necesario que hayamos comprendido bien su enunciado. Lea cuidadosamente el problema tantas veces como sea necesario, para aclarar dudas sobre lo que se pide resolver y cómo se relaciona la información dada.
- **Designación de la(s) incógnita(s) del problema:** Para designar la(s) incógnita(s) debemos prestar atención a la pregunta que se formula en el problema. Sin embargo, es conveniente también tener presente las relaciones existentes entre los datos y la incógnita, pues ello puede permitir plantear una ecuación más simple. Generalmente las incógnitas se representan con letras minúsculas del alfabeto español.

- **Traducción del texto del problema al lenguaje matemático:** Exprese en términos algebraicos las relaciones enunciadas verbalmente en el problema.

- **Expresión de relaciones por medio de ecuaciones:** Identifique la(s) condición(es) del problema que relaciona(n) dos o más de las expresiones establecidas en el paso anterior. Plantee una ecuación (o ecuaciones) que exprese(n) las condiciones del problema.

- **Resolución de las ecuaciones y análisis de las soluciones encontradas:** Resuelva la(s) ecuación(es) y verifique que sus soluciones satisfagan al problema original. Escriba la respuesta en la forma de un enunciado que responda a la pregunta que se planteó en el problema.

Si el caso amerita, se puede realizar un gráfico del problema a resolver.

Ejemplo 2.68 Problema de planteo de ecuaciones.

La suma de tres números enteros consecutivos es 72. Encuentre el mayor de ellos.

Solución:

x : número menor.

$x+1$: número central.

$x+2$: número mayor.

Según las condiciones del problema, se puede plantear la siguiente ecuación:

$x+(x+1)+(x+2)=72$	Planteo de la ecuación.
$3x+3=72$	Reducción de términos semejantes.
$3x=69$	Simplificación.
$x=23$	

Análisis de la solución encontrada:

Los números consecutivos son: 23, 24 y 25.
La suma de los tres números es 72.

El número buscado, que es el mayor, es 25.

Ejemplo 2.69 Problema de planteo de ecuaciones.

Un estudiante debe leer una novela en una semana. Entre lunes y martes lee $\frac{1}{5}$ del libro y el miércoles lee $\frac{1}{3}$ del resto. Si para los restantes días de la semana todavía le quedan 64 páginas de lectura, ¿cuál es el número total de páginas del libro?

Solución:

x : número total de páginas del libro.

$\frac{1}{5}x$: número de páginas leídas entre lunes y martes.

El resto es la diferencia entre el número total de páginas y lo que leyó entre lunes y martes. Por lo tanto, el miércoles el estudiante lee: $\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}x\right)$.
Los restantes días de la semana el estudiante lee: 64 páginas.

Según las condiciones del problema, se puede plantear en función de las páginas leídas la siguiente ecuación:

$\left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}x\right) + 64 = x$	Planteo de la ecuación.
$\left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)x + 64 = x$	Reducción de términos.
$\left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{4}{15}\right)x + 64 = x$	Producto de fracciones.
$x - \left(\frac{1}{5}\right)x - \left(\frac{4}{15}\right)x = 64$	Transposición de términos.
$15x - 3x - 4x = (64)(15)$	m.c.m. entre 5 y 15.
$8x = 960$	Simplificación.
$x = 120$	Despejando x.

Análisis de la solución encontrada:

Entre el lunes y el martes leyó $\frac{1}{5}$ de 120 páginas, es decir, 24 páginas.

Y el miércoles leyó $\frac{1}{3}$ de 96 páginas, es decir, 32 páginas.

Los restantes días leyó 64 páginas.

El total de páginas leídas es la suma de 24, 32, 64, es decir, 120.

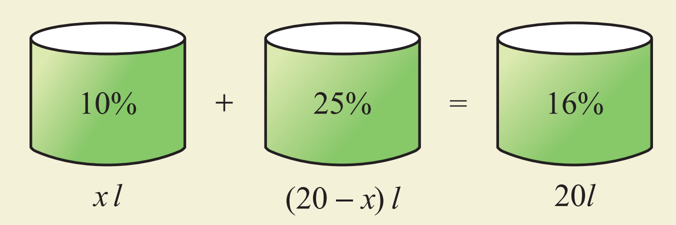
Ejemplo 2.70 Problema de planteo de ecuaciones.

Una solución de sal se hizo al 10% y otra al 25%. ¿Cuántos litros de cada una se deben mezclar para obtener 20 litros de solución al 16% de sal?

Solución:
x : número de litros al 10%.
$20 - x$: número de litros al 25%.

La cantidad de sal en la mezcla final debe ser igual a la suma de las cantidades de sal que hay en las soluciones iniciales. La cantidad de sal en cada solución es el porcentaje dado del número de litros de ellas.

$$10\% \text{ de } x + 25\% \text{ de } (20 - x) = 16\% \text{ de } 20$$



$0.1x + (0.25)(20 - x) = (0.16)(20)$	Planteo de la ecuación.
$0.1x + 5 - 0.25x = 3.2$	Producto.
$-0.15x = -1.8$	Reducción de términos semejantes.
$x = \dfrac{\frac{18}{10}}{\frac{15}{100}}$	Simplificación.
$x = 12$	Despejando x.

Análisis de la solución encontrada:

10% de 12 $=$ 1.2 litros.
25% de 8 $=$ 2 litros.
$1.2 + 2$ $=$ 16% de $20 = 3.2$ litros.

Por lo tanto, se deben mezclar 12 litros de la solución al 10% con 8 litros de la solución al 25% para obtener 20 litros de una solución al 16%.

Ejemplo 2.71 Problema de planteo de ecuaciones.

David puede pintar una habitación en 6 horas. Su amigo José puede pintar la misma habitación en 8 horas. ¿Cuánto demorarán en pintarla si trabajan juntos?

Solución:

x: número de horas que demoran en pintarla juntos.

En 1 hora: David pinta $\frac{1}{6}$ de la habitación.

José pinta $\frac{1}{8}$ de la habitación.

David y José juntos pintan $\frac{1}{x}$ de la habitación.

Como la suma de las partes que realizan por separado debe ser igual a la parte del trabajo que realizan trabajando juntos, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{x}$ Planteo de la ecuación.

$4x+3x=24$ m.c.m. entre 6, 8 y x es $24x$.

$7x=24$ Reducción de términos semejantes.

$x=\frac{24}{7}$ Despejando x.

$x=3\frac{3}{7}$ Expresando x como número mixto.

Análisis de la solución encontrada:

Trabajando juntos, David y José demoran $3\frac{3}{7}$ horas en pintar la habitación.

Ejemplo 2.72 Problema de planteo de ecuaciones.

Un consultor cobra $\$\ 25$ por hora por sus servicios, mientras que su asistente gana en una hora el equivalente en dólares a los $\frac{5}{13}$ del número total de horas trabajadas por el consultor. Si en un trabajo, en el cual el consultor trabajó 3 horas más que su asistente, la cuenta total fue de $\$\ 880$, encuentre el número de horas trabajadas por el consultor.

Solución:

Sea x el número de horas trabajadas por el consultor.

El asistente trabajó $x - 3$ horas y ganó $\$\,\frac{5}{13}x$ en cada una de esas horas.

Se plantea la ecuación $25x + \frac{5}{13}x\,(x - 3) = 880$.

$$325x + 5x^2 - 15x = 11440$$
$$5x^2 + 310x - 11440 = 0$$
$$x^2 + 62x - 2288 = 0$$

$$x = \frac{-62 \pm \sqrt{3844 - 4(1)(-2288)}}{2}$$

$$x = \frac{-62 \pm \sqrt{12996}}{2}$$

$$\left(x = \frac{-62 + 114}{2}\right) \vee \left(x = \frac{-62 - 114}{2}\right)$$

$$(x = 26) \vee (x = -88)$$

Como se trata del total de horas, tomamos el valor positivo, lo cual significa que el consultor trabajó 26 horas.

Ejemplo 2.73 Problema de planteo de ecuaciones.

La suma de dos cifras de un número entero positivo es 9. Si al invertir el orden de las cifras se obtiene un segundo número que excede en 9 al cuádruplo del número original, encuentre el número original.

Solución:

Sea u la cifra de las unidades y d la cifra de las decenas.

Según las condiciones del problema, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} u + d = 9 \\ 10u + d = 4(10d + u) + 9 \end{cases}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene $u = 8$, $d = 1$.

Por lo tanto, el número es 18.

Análisis de la solución encontrada:

La suma de las cifras 1 y 8 efectivamente es 9; al invertir el número se obtiene 81, el cual excede en 9 unidades al número $72 = 4\,(18)$.

Ejemplo 2.74 Problema de planteo de ecuaciones.

A la presentación de una película asistieron 600 personas. El costo de los boletos para adulto fue de $\$ 5$ mientras que los niños pagaron solamente $\$ 2$. Si la taquilla del cine recibió $\$ 2400$, encuentre la diferencia entre el número de adultos y el número de niños.

Solución:

Si n es el número de niños que asistieron a la función, el número de adultos es $600 - n$.

Con los datos del problema se plantea la siguiente ecuación:

$5(600 - n) + 2n = 2400 \Rightarrow n = 200.$

La diferencia entre el número de adultos y el número de niños es $|400 - 200| = |200 - 400| = 200.$

Análisis de la solución encontrada:

De las 600 personas, 200 eran niños y 400 eran adultos. Los niños contribuyeron a la taquilla en $(200)(2) = \$ 400$, mientras que los adultos pagaron $(400)(5) = \$ 2000$.

Ejemplo 2.75 Problema de planteo de ecuaciones.

Hace 4 años, la edad de Hernán era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 2 años. Determine la edad actual de Hernán.

Solución:

x:	edad actual de Hernán.
$x - 4$:	edad de Hernán hace 4 años.
$x + 2$:	edad de Hernán dentro de 2 años.

Según las condiciones del problema, se puede plantear la siguiente ecuación:

$x - 4 = \sqrt{x + 2}$	Planteo de la ecuación.
$x^2 - 8x + 16 = x + 2$	Elevando al cuadrado.
$x^2 - 9x + 14 = 0$	Simplificación.
$(x - 7)(x - 2) = 0$	Factorización.
$(x - 7 = 0) \vee (x - 2 = 0)$	Propiedad de números reales.
$(x = 7) \vee (x = 2)$	Soluciones.

Análisis de las soluciones encontradas:

La respuesta $x = 2$ no tiene validez en el contexto del problema. La respuesta $x = 7$ significa que la edad actual de Hernán es de 7 años. Hace 4 años, Hernán tenía 3 años y dicho valor es la raíz cuadrada de 9, que es la edad que él tendrá dentro de 2 años, luego la edad actual de Hernán es 7 años.

Ejemplo 2.76 Problema de planteo de ecuaciones.

Una inversionista con $\$ 70000$ decide colocar parte de su dinero en un banco que paga 12% anual, y el resto en otro banco que paga 8% anual. Si ella desea obtener una ganancia total del 9% anual, ¿cuánto debe colocar en cada inversión?

Solución:

La pregunta planteada es acerca de dos cantidades de dinero: el capital a invertir al 12% y el capital a invertir al 8%.

Sea x: cantidad que será invertida al 12%.

$70000 - x$: cantidad que será invertida al 8%.

Se puede construir la siguiente tabla:

Capital	**Tasa**	**Tiempo (años)**	**Interés**
x	$12\% = 0.12$	1	$0.12\,x$
$70000 - x$	$8\% = 0.08$	1	$0.08\,(70000 - x)$
70000	$9\% = 0.09$	1	$0.09\,(70000) = 6300$

Ya que el interés total de las inversiones es igual a $0.09(70000) = 6300$, debemos plantear la ecuación:

$$0.12x + 0.08\,(70000 - x) = 6300$$

Con lo cual se deduce que:

$$x = 17500$$

Por lo tanto, la inversionista debe colocar $\$ 17500$ al 12% y $(70000 - 17500)$ es decir, $\$ 52500$ al 8%.

Finalmente, comprobamos la respuesta:

El interés en el primer banco después de un año es $(0.12)(17500) = \$2100$.

El interés en el segundo banco después de un año es $(0.08)(52500) = \$ 4200$.

El interés anual total asciende a $\$ 6300$, que es la cantidad requerida y es la suma de los intereses que se obtendría al invertir el capital en cada banco.

2.9 Inecuaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras la diferencia entre inecuación y desigualdad.
* Realizar demostraciones aplicando propiedades de las desigualdades.
* Resolver inecuaciones de tipo lineal, cuadrática y con valor absoluto.
* Plantear y resolver problemas basados en inecuaciones.

A veces se dan condiciones en las que, en lugar de aparecer el símbolo igual, hay que utilizar otros símbolos llamados de desigualdad.

Definición 2.14 (Desigualdad)

Una desigualdad es un enunciado que compara dos expresiones matemáticas. Dichas expresiones están separadas por alguno de los siguientes símbolos: $>, <, \leq, \geq$.

Ejemplo 2.77 Desigualdades.

$$16 > 7$$

$$\left(\frac{1}{4}\right) < \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$-1 \geq -2$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \geq \left(-\frac{7}{2}\right)$$

Nuestro interés en esta sección del libro es analizar desigualdades condicionadas.

Definición 2.15 (Inecuación)

Una inecuación es un predicado que incluye una desigualdad condicionada, y resolverla significa encontrar todos los valores del conjunto referencial para los cuales el enunciado constituye una proposición verdadera.

La resolución de una inecuación involucra la aplicación de las propiedades de los números reales analizados en este mismo capítulo, sección 2.4: Relación de Orden.

Es recomendable interpretar las soluciones de las inecuaciones, las cuales usualmente corresponden a un intervalo, concepto definido en este mismo capítulo.

Ejemplo 2.78 Inecuaciones.

$\frac{3}{4}x > \frac{2}{5}$, es una desigualdad siempre y cuando $x > \frac{8}{15}$.

$\frac{1}{4}x > -\frac{1}{3}$, es una desigualdad siempre y cuando $x > -\frac{4}{3}$.

$2x + 2 \geq x - 1$, es una desigualdad siempre y cuando $x \geq -3$.

$x - \frac{3}{2} \leq \frac{x}{3} - 7$, es una desigualdad siempre y cuando $x \leq -\frac{33}{4}$.

$x^2 < 0$ es una desigualdad no válida en todo $\mathbb{R}$.

En una inecuación puede considerarse que el conjunto referencial es el conjunto de los números reales, a no ser que se especifique otro conjunto. La(s) solución(es) de dicho predicado conforma(n) su conjunto de verdad $\mathrm{A}p(x)$.

Por lo tanto, podemos tener inecuaciones: lineales, cuadráticas, con valor absoluto, similarmente como se vio en la sección anterior.

2.9.1 Inecuaciones lineales

Una inecuación lineal es aquella que puede representarse con un predicado definido en el conjunto de los reales, mediante una de las siguientes formas:

1. $p(x)$: $ax + b > 0$.
2. $p(x)$: $ax + b < 0$.
3. $p(x)$: $ax + b \geq 0$.
4. $p(x)$: $ax + b \leq 0$.

$a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

En el caso 1, la solución de la inecuación cuando $a \neq 0$, será:

$ax + b > 0$	Consideramos la expresión original.
$ax + b - b > 0 - b$	Sumamos el inverso aditivo de b a ambos miembros.
$ax + 0 > -b$	Reducimos la expresión.
$ax > -b$	Propiedad del neutro aditivo.
$\left(\frac{1}{a}\right) ax > \left(\frac{1}{a}\right)(-b)$	Efectuamos el producto con el inverso multiplicativo de a. Se ha supuesto que $a > 0$.
$(1)(x) > -\frac{b}{a}$	Simplificamos la expresión.
$x > -\frac{b}{a}$	Propiedad del neutro multiplicativo.

En el caso 1: $\mathrm{A}p(x) = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$	cuando $a > 0$
En el caso 2: $\mathrm{A}p(x) = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$	cuando $a > 0$
En el caso 3: $\mathrm{A}p(x) = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$	cuando $a > 0$
En el caso 4: $\mathrm{A}p(x) = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$	cuando $a > 0$

Nótese que si $a < 0$, al multiplicarlo por $\frac{1}{a}$, la inecuación cambia la relación de orden y los intervalos obtenidos hubiesen sido $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$, y $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, respectivamente.

Ejemplo 2.79 Inecuaciones lineales.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$: $4x + 3 \geq 12x - 13$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$4x - 12x \geq -3 - 13$	Se suman los inversos aditivos de 3 y $12x$.
$-8x \geq -16$	Reducimos la expresión.
$x \leq 2$	Multiplicamos por el inverso multiplicativo de -8.

Con lo cual $\mathrm{A}p(x) = (-\infty, 2]$.

Ejemplo 2.80 Inecuaciones lineales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\frac{1}{3}(3x - 2) < \frac{x}{8} + 2$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$x - \frac{2}{3} < \frac{x}{8} + 2$	Desarrollamos el producto indicado.
$24x - 16 < 3x + 48$	m.c.m. entre 3 y 8 es 24.
$21x < 64$	Simplificamos la expresión.
$x < \frac{64}{21}$	Despejamos la incógnita x.

De donde, $\text{A}p(x) = \left\{x/x \in \left(-\infty, \frac{64}{21}\right)\right\}$.

2.9.2 Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación cuadrática es aquella que puede ser reducida a un predicado definido en el conjunto de los números reales, mediante una de las siguientes formas:

1. $p(x) : ax^2 + bx + c > 0$
2. $p(x) : ax^2 + bx + c < 0$
3. $p(x) : ax^2 + bx + c \geq 0$
4. $p(x) : ax^2 + bx + c \leq 0$

$a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

Se pueden encontrar las soluciones de una inecuación cuadrática mediante factorización o mediante la fórmula general.

El objetivo es expresar la inecuación en función de un producto de dos factores y luego separarlos en dos inecuaciones lineales. Para el efecto, debemos recordar las siguientes reglas:

- Un producto de dos factores es positivo si ambos factores poseen signos iguales.
- Un producto de dos factores es negativo si ambos factores poseen signos diferentes.

Estas propiedades de las desigualdades se las puede resumir en la siguiente tabla:

1	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy > 0) \equiv [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$
2	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \equiv [(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)]$

En el caso 1, la solución de la inecuación sería:

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$[(x - x_1 > 0) \wedge (x - x_2 > 0)] \vee [(x - x_1 < 0) \wedge (x - x_2 < 0)]$

En este punto se puede observar que tenemos cuatro inecuaciones lineales, las cuales pueden ser resueltas con el método indicado en la sección anterior. Debe recordarse que la conjunción de predicados involucra la intersección entre sus conjuntos de verdad; y, la disyunción de predicados involucra la unión de sus conjuntos de verdad. Si las inecuaciones tienen los símbolos $\leq$ o $\geq$, al resolver la inecuación lineal se debe incluir el extremo del intervalo en las desigualdades precedentes.

Ejemplo 2.81 Inecuaciones cuadráticas.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : x^2 - x - 2 \geq 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$(x - 2)(x + 1) \geq 0$

$[(x - 2 \geq 0) \wedge (x + 1 \geq 0)] \vee [(x - 2 \leq 0) \wedge (x + 1 \leq 0)]$

$[(x \geq 2) \wedge (x \geq -1)] \vee [(x \leq 2) \wedge (x \leq -1)]$

Al representar gráficamente en la recta real:

$-\infty$ -1 0 2 $+\infty$

$-\infty$ -1 0 2 $+\infty$

$-\infty$ -1 0 2 $+\infty$

Con lo cual, $\mathrm{A}p(x) = \{x/x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)\}$.

Ejemplo 2.82 Inecuaciones cuadráticas.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2} < 0$, determine $(\text{A}p(x))^{\text{C}}$.

Solución:

El primer miembro se puede factorizar así: $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-2}$, de donde se obtienen los puntos críticos $x = 3$, $x = -2$ y $x = 2$.

En la siguiente tabla se analizan los intervalos, sin incluir los puntos críticos y se aplica la Ley de los Signos de la multiplicación y de la división.

Intervalo:	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-2}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)} = -$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)} = +$	$\dfrac{(-)(+)}{(+)} = -$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)} = +$
Solución:	$(-\infty, -2)$	$\varnothing$	$(2, 3)$	$\varnothing$

De la tabla anterior se obtiene $\text{A}p(x) = (-\infty, -2) \cup (2, 3)$.

Por lo tanto, $(\text{A}p(x))^{\text{C}} = [-2, 2] \cup [3, +\infty)$.

2.9.3 Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver este tipo de inecuaciones se pueden aplicar propiedades directas del valor absoluto, las cuales se deducen a continuación.

Considere los siguientes predicados:

1. $p(x)$: $|x| < a$, $a \geq 0$

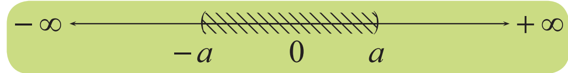
Aplicando la definición del valor absoluto:

$$[(x < a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(-x < a) \wedge (x < 0)]$$

$$[(x < a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(x > -a) \wedge (x < 0)]$$

Podemos observar en el gráfico, que:

$[0 \leq x < a] \vee [-a < x < 0]$



Por lo tanto, $\text{A}p(x) = \{x / -a < x < a\}$.

2. $p(x)$: $|x| > a$, $a \geq 0$

Aplicando la definición del valor absoluto:

$$[(x > a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(-x > a) \wedge (x < 0)]$$

$$[(x > a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(x < -a) \wedge (x < 0)]$$

Podemos observar en el gráfico que:

$[(x > a) \vee (x < -a)]$

$-\infty$ $-a$ 0 a $+\infty$

Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x) = \{x/(x > a) \vee (x < -a)\}$.

Se puede generalizar para los casos:

3. $p(x)$: $|x| \leq a$, $a \geq 0$

$$\mathrm{A}p(x) = \{x/-a \leq x \leq a\}$$

4. $p(x)$: $|x| \geq a$, $a \geq 0$

$$\mathrm{A}p(x) = \{x/(x \geq a) \vee (x \leq -a)\}$$

Si $a < 0$:

1. $p(x)$: $|x| \leq a$

Como el valor absoluto de un número es siempre positivo, la inecuación no tiene solución.

2. $p(x)$: $|x| \geq a$

Un valor absoluto siempre es mayor o igual que un número negativo, por lo cual, la inecuación tiene como solución el conjunto de los números reales.

Expresiones como $|x| \geq 0$, $|x| \leq 0$, $|x| > 0$ y $|x| < 0$, se resuelven empleando las propiedades del valor absoluto. El lector puede verificar que la solución de estas inecuaciones es $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$ y $\varnothing$, respectivamente.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|x - a| \leq b$

$$-b \leq x - a \leq b$$

$$a - b \leq x \leq a + b$$

$$\mathrm{A}p(x) = [a - b, a + b]$$

Ejemplo 2.83 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|2x - 3| > 11$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$[(2x - 3) > 11] \vee [(2x - 3) < -11]$ Propiedades del valor absoluto.

$(2x > 14) \vee (2x < -8)$ Simplificamos la expresión.

$(x > 7) \vee (x < -4)$ Despejamos la incógnita.

$-\infty$ 0 7 $+\infty$

$-\infty$ −4 0 $+\infty$

$-\infty$ −4 0 7 $+\infty$

De donde $\text{A}p(x) = \{x/(x < -4) \vee (x > 7)\}$.

Ejemplo 2.84 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|x + 2| \leq \frac{5}{2}$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$-\frac{5}{2} \leq x + 2 \leq \frac{5}{2}$ Propiedades del valor absoluto.

$-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ Simplificamos la expresión y despejamos la incógnita.

$-\infty$ −5 $-\frac{9}{2}$ −4 −3 −2 −1 0 $+\infty$

$-\infty$ 0 $\frac{1}{2}$ $+\infty$

$-\infty$ ... $+\infty$

$-\frac{9}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

Por lo tanto, $Ap(x) = \left\{x / -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo 2.85 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $||2x + 1| - 5x| \leq -2$, determine $Ap(x)$.

Solución:

En este caso no hay necesidad de resolver la expresión, ya que $Ap(x) = \emptyset$.

Ejemplo 2.86 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $Re = \mathbb{R}$, $p(x)$: $|x + 4| < 2$ y $q(x)$: $|x| \geq 3$, determine $Ap(x) \cap Aq(x)$.

Solución:

$|x + 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 4 < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$

$-\infty$ ... $+\infty$

-6 -2

$Ap(x) = (-6, -2)$

$|x| \geq 3 \Leftrightarrow (x \geq 3) \vee (x \leq -3)$

$-\infty$ ... $+\infty$

-3 3

$Aq(x) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

$-\infty$ ... $+\infty$

-6 -3

$Ap(x) \cap Aq(x) = (-6, -3]$

Ejemplo 2.87 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$: $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| \geq 4$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

Aquí se tiene: $\left(\dfrac{x+2}{2x-3} \leq -4\right) \vee \left(\dfrac{x+2}{2x-3} \geq 4\right)$.

- Trabajando en la primera parte de esta última expresión, obtenemos:

$[(-8x + 12 \geq x + 2) \wedge (2x - 3 > 0)] \vee [(-8x + 12 \leq x + 2) \wedge (2x - 3 < 0)]$

$\left[\left(x \leq \dfrac{10}{9}\right) \wedge \left(x > \dfrac{3}{2}\right)\right] \vee \left[\left(x \geq \dfrac{10}{9}\right) \wedge \left(x < \dfrac{3}{2}\right)\right]$.

El conjunto de verdad de esta última expresión es $\varnothing \cup \left[\dfrac{10}{9}, \dfrac{3}{2}\right) = \left[\dfrac{10}{9}, \dfrac{3}{2}\right)$.

- Trabajando en la segunda parte, obtenemos:

$[(x + 2 \geq 8x - 12) \wedge (2x - 3 > 0)] \vee [(x + 2 \leq 8x - 12) \wedge (2x - 3 < 0)]$

$\left[(x \leq 2) \wedge \left(x > \dfrac{3}{2}\right)\right] \vee \left[(x \geq 2) \wedge \left(x < \dfrac{3}{2}\right)\right]$

El conjunto de verdad de esta última expresión es $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right] \cup \varnothing = \left(\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

- Finalmente, $\mathrm{A}p(x) = \left[\dfrac{10}{9}, \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

2.9.4 Planteo de inecuaciones

Para interpretar problemas que involucran plantear inecuaciones, debemos tomar en cuenta las siguientes equivalencias:

- Las expresiones del tipo: al menos, por lo menos, como mínimo, se traducen con la relación $\geq$.
- Las expresiones del tipo: a lo más, cuanto mucho, como máximo, se traducen con la relación $\leq$.

El resto del planteamiento es similar al que se indicó para las ecuaciones.

Ejemplo 2.88 Problema de planteo de inecuaciones.

Jenny quiere invertir $\$\ 50000$. Ella puede escoger el banco A que ofrece un interés anual del 8%, o con un mayor riesgo, escoger el banco B que ofrece un interés anual del 10%. ¿Qué cantidad mínima deberá invertir en el banco B, de modo que reciba una rentabilidad anual total de al menos $\$\ 4400$?

Solución:

x: cantidad de dinero invertida en el banco B.

$50000 - x$: cantidad de dinero invertida en el banco A.

Según la condición del problema:

Rentabilidad en banco B (al 10%) + rentabilidad en banco A (al 8%) ≥ 4400.

$0.1x + 0.08\,(50000 - x) \geq 4400$

$0.1x + 4000 - 0.08x \geq 4400$

$0.02x \geq 400$

$x \geq 20000$

Análisis de la solución encontrada:

Jenny debe invertir al menos $\$\ 20000$ en el banco B para obtener la rentabilidad deseada.

Ejemplo 2.89 Problema de planteo de inecuaciones.

Un promotor artístico quiere realizar un concierto. El costo del mismo puede ser cubierto con un pago único de $\$\ 2440$, o un pago de $\$\ 1000$ más el 40% de lo que se obtenga por la venta de las entradas. Él pronostica que asistirán 800 personas. ¿Cuánto podría cobrar por el boleto de manera que la segunda forma de pago no sea más elevada que el pago único?

Solución:

x: precio de la entrada.

Pago único: $\$\ 2440$

Segunda forma de pago $= 1000 + 0.40(800x)$

Por condición del problema, la segunda forma de pago debe ser menor o igual que el pago único, lo cual se puede representar por la siguiente inecuación:

$1000 + 0.40\,(800x) \leq 2440$

$1000 + 320x \leq 2440$

$100 + 32x \leq 244$

$32x \leq 244 - 100$

$32x \leq 144$

$x \leq 4.5$

Análisis de la solución encontrada:

La entrada debe valer a lo mucho $\$\,4.50$. Un valor mayor a éste, provocaría que el pago único sea mayor que la segunda forma de pago.

Ejemplo 2.90 Problema de planteo de inecuaciones.

El propietario de un edificio de departamentos puede alquilar todas las 50 habitaciones si el alquiler mensual es de $\$\,120$ por departamento. Por cada incremento de $\$\,5$ en la mensualidad del alquiler, un departamento quedará vacante sin posibilidad alguna de alquilarse. ¿Cuál es el valor máximo de alquiler que deberá fijarse para obtener un ingreso mensual de al menos $\$\,6000$?

Solución:

x: número de incrementos de $\$\,5$.

Ingresos: (precio de la habitación)(número de habitaciones).

El ingreso mensual viene dado por:

$I = (120 + 5x)\,(50 - x)$

Debe cumplirse que los ingresos superen los $\$\,6000$

$(120 + 5x)\,(50 - x) \geq 6000$

$6000 - 120x + 250x - 5x^2 \geq 6000$

$-5x^2 + 130x \geq 0$

$x^2 - 26x \leq 0$

$x\,(x - 26) \leq 0$

$0 \leq x \leq 26$

Análisis de la solución encontrada:

El valor máximo que debe fijarse es $120 + 5(26) = \$\,250$; para este caso el ingreso será $I = (250)(50 - 26) = \$\,6000$. En el instante en que el alquiler se incremente a $\$\,255$, el ingreso sería $I = (255)(50 - 27) = \$\,5865$, que es un valor menor a las expectativas del propietario del edificio.

2.10 Inducción Matemática

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras los axiomas de Peano.
* Dada una propiedad de los números naturales, demostrarla aplicando el Teorema de Inducción.

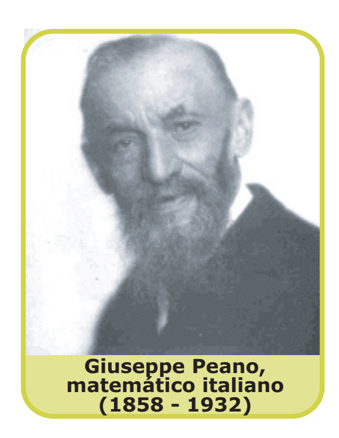
Cuando se quiere demostrar propiedades, se puede considerar que de la certeza de una proposición general se puede pasar a la certeza de las correspondientes proposiciones particulares, y, al revés, de la certeza de una o varias proposiciones particulares se puede pasar a la certeza de la correspondiente proposición general o generalización. El primer caso conlleva a un proceso de razonamiento lógico que se denomina deducción o proceso deductivo, mientras que el segundo caso se conoce como proceso inductivo o inducción.

Si decimos que: "Todos los números enteros pares son divisibles por 2", estamos exponiendo una proposición general, a partir de la cual se puede particularizar, por ejemplo, la proposición: "El número 124 es divisible por 2".

Si por ejemplo, aceptamos como cierta la proposición general de que: "Todos los alemanes son rubios", la veracidad de la afirmación correspondiente a la particularización: "Helmut es alemán y por consiguiente es rubio" es un proceso de deducción. Evidentemente, la certeza depende de que sea cierta la proposición general de la que se ha partido. En cambio, el proceso contrario, en el que partiríamos de la veracidad de la proposición: "Helmut es alemán y rubio", no nos permitiría afirmar la veracidad de la proposición general: "Todos los alemanes son rubios", pero tampoco negarla.

En general, el proceso de inducción, por el que pasamos de una o varias proposiciones particulares a una proposición generalizadora, no es tan sencillo.

En esta sección veremos que mediante la Inducción Matemática es posible demostrar propiedades de los números naturales a partir de unos postulados denominados Axiomas de Peano.


Giuseppe Peano, matemático italiano (1858 - 1932)

2.10.1 Axiomas de Peano

El conjunto de los números naturales puede ser construido a partir de cinco axiomas o postulados propuestos por el matemático italiano Peano.

- 1 es natural.
- Si n es un número natural, entonces $n+1$ también es un número natural (llamado el sucesor de n).
- 1 no es sucesor de número natural alguno, ya que es el primer elemento del conjunto.
- Si los sucesores de dos números naturales n y m son iguales, entonces n y m son números naturales iguales.
- Si un conjunto de números contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales.

Este último postulado se conoce como Axioma de Inducción, y permite probar resultados con los números naturales, generalizando situaciones particulares.

2.10.2 Teorema de inducción

Si en efecto logramos evidenciar que una propiedad que se verifica para un número natural n se verifica para su sucesor, $n+1$, cualquiera que sea n, entonces podemos afirmar que tal propiedad se verifica desde e incluyendo n hasta el infinito. Si sabemos, además, que se verifica para el primero de los números naturales, que no es sucesor de ningún otro, entonces hay que concluir que la propiedad se verifica para todo elemento de $\mathbb{N}$.

Es decir, para probar que una propiedad se cumple en todos los números naturales, basta comprobar primero que se cumple para el 1 y a continuación, suponer que se cumple para un natural n, y a partir de esta suposición, deducir que se ha de cumplir para el natural siguiente, $n+1$.

Teorema 2.2 (Teorema de Inducción)

Si $p(n)$ es una propiedad sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, tal que:

$p(1) \equiv 1$ (Caso base)

$\forall n\, [\, p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ (Paso inductivo)

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}\; p(n) \equiv 1$, es decir, $\mathrm{A}p(n) = \mathbb{N}$

Ejemplo 2.91 Demostración utilizando el teorema de Inducción.

Demostrar que para todo número natural n se cumple la siguiente propiedad:

$$p(n): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Solución:

1) $p(1)$: $\quad 1 = (1)^2$

$1 = 1 \quad \therefore \quad p(1) \equiv 1$

2) p.d. $\quad \forall n[\, p(n) \Rightarrow p(n+1)]$

Hipótesis: $p(n)$: $\quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Tesis: $p(n+1)$: $\quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

$$\overbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2}^{p(n)}$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = n^2 + [2(n + 1) - 1]$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2}_{p(n+1)}$$

$$\therefore \forall n[\, p(n) \Rightarrow p(n + 1)] \equiv 1$$

Ejemplo 2.92 Demostración utilizando el teorema de Inducción.

Demostrar que para todo número natural n se cumple la siguiente propiedad:

$$q(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Solución:

1) $q(1)$: $1^2 = \dfrac{(1)(1 + 1)(2(1) + 1)}{6}$

$1^2 = \dfrac{(1)(2)(3)}{6}$

$1 = 1 \qquad \therefore \; q(1) \equiv 1$

2) p.d. $\forall n[\ q(n) \Rightarrow q(n+1)]$

Hipótesis: $q(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesis: $q(n+1)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\overbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}^{q(n)}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)]$$

$$= \frac{(n+1)}{6}[2n^2 + 7n + 6]$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\frac{[(2n+4)(2n+3)]}{2}$$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}_{q(n+1)}$$

$\therefore \forall n[\ q(n) \Rightarrow q(n+1)] \equiv 1$

Ejemplo 2.93 Demostración utilizando el teorema de Inducción.

Demostrar que para todo número natural n si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, se cumple la siguiente propiedad:

$$r(n) : a^n < b^n$$

Solución:

1) $r(1)$: $a^1 < b^1 \equiv a < b$

Esto es verdad por condición del problema. $\therefore\ r(1) \equiv 1$

2) p.d. $\forall n[r(n) \Rightarrow r(n+1)]$

Hipótesis: $a^n < b^n$

Tesis: $a^{n+1} < b^{n+1}$

Supóngase que:

$$\overbrace{a^n < b^n}^{r(n)}$$

Si multiplicamos la desigualdad $a^n < b^n$ por la cantidad positiva a:

$$a^n\, a < b^n a$$

Como $b > 0$, $b^n > 0$, si multiplicamos la desigualdad $a < b$ por la cantidad positiva b^n:

$$b^n\, a < b^n b$$

Como $(a^n\, a < b^n a) \wedge (b^n\, a < b^n b)$, por transitividad se cumple que:

$$a^n\, a < b^n b$$

$$\underbrace{a^{n+1} < b^{n+1}}_{r(n+1)}$$

$$\therefore \forall n[\, r(n) \Rightarrow r(n+1)] \equiv 1$$

Ejemplo 2.94 Demostración utilizando el teorema de Inducción.

Demostrar que para todo número natural n se cumple la siguiente propiedad:

$p(n)$: $n^2 + n$ es divisible por 2.

Solución:

1) $p(1) : (1)^2 + 1,$

$p(1) : 2$, que si es divisible por 2 $\quad \therefore \; p(1) \equiv 1$

2) p.d. $\quad \forall n[\, p(n) \Rightarrow p(n+1)]$

Hipótesis: $p(n)$: $\quad n^2 + n$ es divisible por 2.

Tesis: $\quad p(n+1)$: $\quad (n+1)^2 + (n+1)$ es divisible por 2.

$\overbrace{n^2 + n \text{ es divisible por } 2}^{p(n)} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / n^2 + n = 2k$

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= (n^2 + 2n + 1) + (n+1)\\ &= (n^2 + n) + 2n + 2\\ &= 2k + 2n + 2\\ &= 2(k+n+1)/(k+n+1 = m) \wedge m \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$(n+1)^2 + (n+1) = 2m$

$\underbrace{(n+1)^2 + (n+1) \text{ es divisible por } 2}_{p(n+1)} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} / (n+1)^2 + (n+1) = 2m$

$\therefore \forall n[\, p(n) \Rightarrow p(n+1)] \equiv 1$

El método de inducción matemática tiene una particular aplicabilidad en la geometría plana y del espacio.

La aplicación más común de este método en la geometría plana es la construcción de figuras geométricas de n elementos a partir de la figura análoga elemental, mediante la generalización correspondiente.

El proceso inductivo también es muy utilizado en la determinación de lugares geométricos o en la generalización de un número de dimensiones para obtener figuras análogas en mayor número de dimensiones, como el paso de la circunferencia a la esfera, por ejemplo.

2.11 Técnicas de Conteo

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un número entero no negativo, calcular su factorial.

* Calcular la combinatoria entre dos números enteros no negativos.

* Dado un problema real, resolverlo aplicando técnicas de conteo.

Suponga que se encuentra al final de una línea de ensamblaje de un producto y que un supervisor le ordena contar los elementos de un lote que se ha manufacturado hace unas horas y del que se desconoce el número de productos que lo constituyen; de inmediato, usted empezará a contar un producto tras otro y al final informará al supervisor que son 48, 54 u otro número cualquiera.

Ahora suponga que ese mismo supervisor le plantea la siguiente pregunta: ¿Cuántas muestras o grupos será posible formar con los productos del lote, si las muestras o grupos a formar son de ocho elementos cada una de ellas?

En el primer caso, el cuantificar los elementos del lote no presenta dificultad alguna para la persona encargada de hacerlo, pero cuando se le hace el segundo planteamiento, al tratar de formar las muestras o grupos de ocho elementos, la persona encargada empezará a tener dificultad para hacerlo; en casos como este es necesario hacer uso de las técnicas de conteo para cuantificar los elementos del evento en cuestión (el número de muestras posibles a formar de ocho elementos).

Para poder analizar esta nueva sección, necesitamos definir previamente el factorial de un número y la combinatoria entre dos números.

Definición 2.16 (Factorial)

Sea n un entero no negativo, su factorial se calcula de la siguiente manera:

$$n! = \begin{cases} 1 & ;\ n = 0 \\ n(n-1)! & ;\ n \geq 1 \end{cases}$$

A este esquema de definición se lo denomina **recursivo**. La recursión es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición.

Ejemplo 2.95 Factorial.

Al encontrar el valor de $6!$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 720 \end{aligned}$$

Una de las aplicaciones del factorial, la encontramos en el siguiente ejemplo:

¿Cuántas ordenaciones pueden hacerse en un mazo de 52 cartas?, ese número es $52!$. Puede parecer sorprendente lo extremadamente grande que es este número, alrededor de $8.065817517094 \times 10^{67}$.

Esta cifra es mayor que la representada por un 8 seguido de 67 ceros. Comparando ese número con otros números enormes, es mayor que el cuadrado del número de Avogadro, 6.022×10^{23}, el número de átomos o moléculas, etc., que hay en una mol y está en el mismo orden de magnitud que el número de átomos en la Vía Láctea.

Definición 2.17 (Combinatoria)

Sean n, m enteros no negativos tales que $n \geq m$, el símbolo $\binom{n}{m}$ que se lee "combinatoria de n elementos tomando m de ellos a la vez", se calcula de la siguiente manera:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo 2.96 Combinatoria.

Al encontrar el valor de $\binom{10}{6}$, se obtiene:

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!}$$

$$= \frac{10!}{6!\ 4!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 210$$

Propiedades de las Combinatorias

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\left[\binom{n}{n} = 1\right]$

2. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\left[\binom{n}{0} = 1\right]$

3. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\ \forall(1 \leq i \leq n)\left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}\right]$

Demostración de la tercera propiedad.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\ \forall(1 \leq i \leq n)\left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}\right]$$

Esta propiedad se demuestra así:

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \frac{n!}{i!\ (n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}$$

$$= n!\left[\frac{n-i+1+i}{i!(n-i+1)!}\right]$$

$$= n!\left[\frac{n+1}{i!(n-i+1)!}\right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{i!((n+1)-i)!}$$

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

Las técnicas de conteo son aquellas que se usan para enumerar eventos no tan fáciles de cuantificar. Por ejemplo:

- En un aula hay 15, 20 y 18 alumnos de las Ingenierías de Minas y Petróleo, Industrial y Electrónica. Bajo las siguientes condiciones, ¿Cuántas representaciones de once alumnos pueden formarse?

  a) Si se desea que éstas consten sólo de alumnos de Ingeniería en Minas y Petróleo.

  b) Si se desea que el presidente sea un alumno de Ingeniería Industrial.

  c) Si se desea que el presidente y tesorero sean alumnos de Ingeniería Electrónica.

- ¿De cuántas maneras puede una persona seleccionar una lavadora, una batidora y dos licuadoras, si encuentra en una tienda 8 modelos diferentes de lavadoras, 5 modelos diferentes de batidoras y 7 modelos diferentes de licuadoras?

Se les denomina técnicas de conteo a las permutaciones y combinaciones, las cuales se explicarán más adelante. Hay que destacar que éstas nos proporcionan la información de todas las maneras posibles en que ocurre un evento determinado.

Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio aditivo y multiplicativo, los mismos que a continuación se definen y se ilustran en los ejemplos correspondientes.

2.11.1 Principio de la Suma (Aditivo)

Supongamos que un evento A se puede realizar de m maneras diferentes, y otro evento B se puede realizar de n maneras diferentes, además, no es posible que ambos eventos se realicen juntos $(A \cap B = \emptyset)$, entonces el evento A o el evento B se realizarán de $(m + n)$ maneras diferentes.

Ejemplo 2.97 Principio Aditivo.

Un repuesto de automóvil se vende en 6 locales de Guayaquil y en 8 locales de Quito. Si la adquisición de repuestos puede hacerse en Guayaquil o en Quito. ¿De cuántas formas se puede adquirir el repuesto?

Solución:

Por el principio aditivo, el repuesto puede ser adquirido en:

Guayaquil o Quito, de donde existen:

6 formas $+$ 8 formas $=$ 14 formas.

Ejemplo 2.98 Principio Aditivo.

Un paquete de software tiene 3 opciones de menú, si la primera tiene 10 subopciones, la segunda tiene 15 subopciones y la tercera tiene 12 subopciones, ¿de cuántas maneras diferentes puede elegir el usuario una subopción?

Solución:

Por el principio aditivo, se puede notar que el usuario solamente puede elegir una subopción a la vez:

10 maneras $+$ 15 maneras $+$ 12 maneras $=$ 37 maneras.

2.11.2 Principio de la Multiplicación (Multiplicativo)

Si un evento A puede ocurrir en forma independiente de m maneras diferentes y otro evento B de n maneras diferentes, entonces el número de maneras distintas en que pueden suceder ambos eventos es $m \cdot n$.

Ejemplo 2.99 Principio Multiplicativo.

En un día determinado, nueve amigos: Evelyn, Janett, Yajaira, Laura, Verónica, Christian, Jimmy, Gabriel, y David, deciden ir a ver una película al cine; al momento de ingresar a la sala, ellos se ponen de acuerdo para sentarse de forma alternada, de tal manera que al lado de una chica siempre se encuentre un chico. ¿De cuántas formas posibles pueden sentarse estos amigos cumpliendo aquella condición?

Solución:

Si M: representa una chica y H: representa un chico, entonces se ubicarían de la siguiente forma:

M H M H M H M H M

$$(5)\,(4)\,(4)\,(3)\,(3)\,(2)\,(2)\,(1)\,(1) = 5! \times 4! = 2880$$

Por lo tanto, los 9 amigos pueden sentarse de 2880 formas diferentes.

Ejemplo 2.100 Principio Multiplicativo.

Ana y María observaron la placa de un carro, donde viajaban dos hombres sospechosos de un robo. Al ser interrogadas por la policía, dieron la siguiente información acerca de la placa (que constaba de tres letras seguidas de tres dígitos): María estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q, y que el último dígito era un 3 o un 8; Ana dijo que la primera letra de la placa era una G y que la tercera letra era definitivamente una vocal.

Determine la cantidad de placas diferentes que la policía debe verificar.

Solución:

La placa deberá tener una secuencia de caracteres de la forma

X	X	X	#	#	#

Siendo X alguna letra del alfabeto español y # algún dígito entre 0 y 9.

El primer caracter X, es la letra G $\Rightarrow$ 1 posibilidad.

El segundo caracter X, es O o Q $\Rightarrow$ 2 posibilidades.

El tercer caracter X, sería A, E, I, O, U $\Rightarrow$ 5 posibilidades.

El primer número $\Rightarrow$ 10 posibilidades.

El segundo número $\Rightarrow$ 10 posibilidades.

El tercer número, es 3 u 8 $\Rightarrow$ 2 posibilidades.

Por el principio multiplicativo:

Letras • Dígitos

$(1)\,(2)\,(5)$ • $(10)\,(10)\,(2)$

La cantidad de placas que la policía debe verificar es: 2000.

2.11.3 Permutaciones y combinaciones

Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos la siguiente situación.

Suponga que un salón de clase está constituido por 35 alumnos.

- El maestro desea que se nombre a tres representantes del salón (presidente, secretario y tesorero).

  Suponga que se han nombrado como representantes del salón a Daniel como presidente, a Arturo como secretario y a Rafael como tesorero, pero resulta que a alguien se le ocurre hacer algunos cambios, los que se muestran a continuación:

PRESIDENTE:	Daniel	Arturo	Rafael	Daniel	Arturo	Rafael
SECRETARIO:	Arturo	Daniel	Daniel	Rafael	Rafael	Arturo
TESORERO:	Rafael	Rafael	Arturo	Arturo	Daniel	Daniel

  Ahora tenemos seis arreglos, ¿se trata de la misma representación?

  La respuesta sería no, ya que el cambio de responsabilidades que se hace a los integrantes de la representación original, hace que definitivamente cada una de las representaciones trabaje de manera diferente. ¿Importa el orden de los elementos en los arreglos? La respuesta definitivamente sería sí. Luego, las representaciones antes definidas son diferentes, ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto, en este caso estamos tratando con **permutaciones**.

- El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.

  Suponga que por unanimidad se ha elegido a Daniel, Arturo y a Rafael para entregar material (aunque pudieron haber seleccionado a Rafael, Daniel y Arturo, o pudo haberse formado cualquier grupo de tres personas para realizar las actividades mencionadas anteriormente). ¿Es importante el orden como se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?

  Reflexionando al respecto nos damos cuenta de que el orden en este caso no tiene importancia, ya que lo único que nos interesaría es el contenido de cada grupo, dicho de otra forma, sólo interesa quiénes están en el grupo y no qué orden tienen en el grupo.

  Por lo tanto, este ejemplo es una **combinación**.

  De acuerdo a esto, se puede concluir que la diferencia sustancial entre la permutación y la combinación de los elementos de un conjunto es el orden de los elementos al formar los grupos o muestras requeridos.

Definición 2.18 (Permutaciones)

Una permutación es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos, considerando el orden en su ubicación. El número de permutaciones posibles de n objetos tomando m de ellos a la vez, se simboliza como P^n_m y se lo calcula así:

$$P^n_m = \frac{n!}{(n-m)!}, \ n \geq m$$

Es importante resaltar que el orden es una característica importante en la permutación, cuando variamos el orden de los elementos se dice que permutamos dichos elementos.

Ejemplo 2.101 Permutaciones.

En una carrera participan 10 atletas. ¿De cuántas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros lugares con medalla de oro, plata y bronce?

Solución:

Se busca las diferentes ternas $(m = 3)$ que se pueden formar con los 10 atletas $(n = 10)$.

$$P^{10}_3 = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Por lo tanto, a los 3 primeros lugares se los puede premiar de 720 formas distintas.

Ejemplo 2.102 Permutaciones.

¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse cinco libros de historia, cuatro de literatura y seis de matemáticas, si los de la misma materia deben estar juntos?

Solución:

Los libros de historia pueden permutarse así:

$$P^5_5 = \frac{5!}{0!} = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 120$$

Los libros de literatura pueden permutarse así:

$$P_4^4 = \frac{4!}{0!} = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 24$$

Los libros de matemáticas pueden permutarse así:

$$P_6^6 = \frac{6!}{0!} = 6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 720$$

Por el principio multiplicativo:

$$P_5^5 \cdot P_4^4 \cdot P_6^6 = (120)(24)(720) = 2'073.600$$

Pero, debe considerarse que el orden anterior se da cuando se colocan primero los libros de historia; luego, los libros de literatura y finalmente, los libros de matemáticas. Debe considerarse que también se pueden colocar en diferente orden.

$$P_3^3 = \frac{3!}{0!} = 3 \text{ x } 2 = 6 \text{ posibilidades.}$$

Este último valor representa las posibilidades para colocar los libros en orden: HLM, HML, LMH, LHM, MHL, MLH.

Por lo tanto, este último valor hay que multiplicarlo por el valor previo, con lo cual existen $12'441.600$ maneras diferentes de colocar los libros.

Definición 2.19 (Combinaciones)

Una combinación es cada uno de los diferentes arreglos que se pueden hacer con parte o todos los elementos de un conjunto dado, sin considerar el orden en su ubicación. El número de combinaciones posibles de n objetos tomando m de ellos a la vez, se simboliza como C_m^n y se calcula así:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \; n \geq m$$

Ejemplo 2.103 Combinaciones.

Un Soda Bar tiene 3 tipos de frutas: durazno, sandía y piña. ¿Cuántos sabores diferentes de jugo se podrán preparar, si se pueden mezclar las frutas?

Método 1: Analizando opciones

Cuando se escoge una fruta de las tres, el número de opciones para preparar el jugo es 3: D, S, P.

Cuando se escogen 2 de las tres frutas, el número de opciones es 3: DS, DP, SP.
Cuando se escogen las 3 frutas a la vez, se obtiene una única opción: DSP.
Total de sabores diferentes: $3 + 3 + 1 = 7$.

Método 2: Empleando combinaciones

Se puede escoger una fruta de las tres, o dos frutas de las tres, o las tres frutas a la vez, además, en este caso no importa el orden, por lo tanto, usamos el principio aditivo aplicado a la combinación:

maneras diferentes $= C_1^3 + C_2^3 + C_3^3$

maneras diferentes $= \frac{3!}{1! \cdot 2!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{3!}{3! \cdot 0!}$

Total de sabores diferentes: $3 + 3 + 1 = 7$.

Como se puede verificar, los resultados son iguales. Para problemas de mayor número de combinaciones es preferible emplear la expresión de la definición 2.19.

Ejemplo 2.104 Combinaciones.

Para un cierto experimento se seleccionan 3 ratones de un grupo de 5 blancos y 4 cafés.

a) ¿De cuántas maneras se pueden escoger 3 ratones blancos?

$$\binom{5}{3} \text{ x } \binom{4}{0} = \frac{5!}{3!2!} \text{ x } 1 = 10 \text{ formas.}$$

b) ¿De cuántas maneras se pueden escoger 2 ratones blancos y 1 café?

$$\binom{5}{2} \text{ x } \binom{4}{1} = \frac{5!}{2!3!} \text{ x } 4 = 40 \text{ formas.}$$

c) ¿De cuántas maneras se pueden escoger 1 ratón blanco y 2 cafés?

$$\binom{5}{1} \text{ x } \binom{4}{2} = 5 \text{ x } \frac{4!}{2!2!} = 30 \text{ formas.}$$

Ejemplo 2.105 Combinaciones.

Se necesita constituir un grupo mixto de vigilancia formado por 2 hombres y 3 mujeres, para lo cual se dispone de 12 oficiales hombres y 8 oficiales mujeres; determine el número de grupos diferentes que se pueden formar.

Solución:

Para constituir el grupo de hombres:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \text{ x } 11 \text{ x } 10!}{2 \text{ x } 10!} = 66$$

Para constituir el grupo de mujeres:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5!}{3 \text{ x } 2 \text{ x } 5!} = 56$$

Para constituir el grupo mixto, debemos utilizar el principio multiplicativo: $(66)(56) = 3696$.

El número de grupos diferentes que se pueden formar es 3696.

2.12 Teorema del Binomio

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Obtener el desarrollo de un binomio dado.
* Dada la posición del término de un binomio, obtener el término sin desarrollar el binomio.
* Dadas condiciones sobre el término de un binomio, identificar su posición y otros elementos.



Isaac Newton, matemático inglés (1642 - 1727)

Este teorema fue descubierto por Newton y comunicado por primera vez en 1676 a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema.

El teorema elaborado por Newton proporciona la expansión de las potencias de un binomio, pero él nunca lo publicó. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Teorema 2.3 (Teorema del Binomio)

El desarrollo del binomio $(a+b)^n$, está dado por:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

Donde $n \in \mathbb{N}$; a, $b \in \mathbb{R}$.

En este desarrollo, el término general tiene la forma:

$$\binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Donde:

n : Exponente del binomio.

i : Posición del término en el desarrollo del binomio disminuido en 1.

a, b : Términos del binomio.

Ejemplo 2.106 Binomio de Newton.

Encontrar el término central en el desarrollo de: $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$.

Solución:

Como $n = 12$, entonces la cantidad de términos es 13 y el término central es el séptimo, con lo que $i = 6$.

El séptimo término tendrá la forma:

$$\binom{12}{6} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-6} \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^6$$
$$\binom{12}{6} x^2 y^2$$

Calculando $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!}$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\, 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{12}{6} = 924$$

Así, el séptimo término sería: $924\, x^2\, y^2$

Ejemplo 2.107 Binomio de Newton.

Encontrar el término que no contiene "x" en el desarrollo de:

$$\left(x - \frac{1}{2x}\right)^{10}$$

Solución:

$a = x$

$b = -\frac{1}{2x}$

$n = 10$

Término General: $\binom{10}{i} x^{10-i} \left(-\frac{1}{2x}\right)^i$

Igualando a cero el exponente de x:

$$x^{10-i}\left(\frac{1}{x^i}\right) = x^0$$

$$x^{10-i}\, x^{-i} = x^0$$

$$10 - 2i = 0$$

$$10 = 2i \qquad \therefore \quad i = 5$$

El término buscado es el sexto:

$$\binom{10}{5} (x)^{10-5} \left(-\frac{1}{2x}\right)^5 = \frac{10!}{5!5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!}\left(-\frac{1}{32}\right)$$

$$= -\frac{252}{32}$$

$\binom{10}{5}(x)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 = -\frac{63}{8}$, que efectivamente no contiene "x".

Ejemplo 2.108 Binomio de Newton.

Determine el valor de n para que el coeficiente del cuarto término en el desarrollo del binomio $\left(a^2 + \frac{2b^3}{n}\right)^6$ sea un número entero.

Solución:

El cuarto término del desarrollo de dicho binomio es: $\binom{6}{3}(a^2)^3\left(\frac{2b^3}{n}\right)^3$.

El coeficiente de dicho término es: $\frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{8}{n^3} = \frac{2^5 \cdot 5}{n^3}$.

El número n, tal que dicho coeficiente sea entero, puede ser $n = 1$ o $n = 2$.

Ejemplo 2.109 Binomio de Newton.

Determine el valor que debe darse a x para que el quinto término del desarrollo del binomio $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^x$ contenga la décima potencia de a.

Solución:

El quinto término vendrá dado por: $\binom{x}{4}(a^2)^{x-4}\left(\frac{1}{a^2}\right)^4$.

Debemos hacer que $(a^2)^{x-4}\left(\frac{1}{a^2}\right)^4 = a^{10}$.

Esto es: $2x - 16 = 10$.

De donde se obtiene $x = 13$.

2.13 Sucesiones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras el concepto de sucesión como una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.
* Aplicar la definición de sucesión recursiva para el cálculo de términos de una sucesión.
* Reconocer los elementos de una progresión aritmética y geométrica.
* Dada una progresión aritmética o geométrica, encontrar algunos de sus elementos.
* Dada una progresión aritmética o geométrica, calcular la suma de los n primeros términos de la progresión.
* Dadas las condiciones de una progresión aritmética o geométrica, encontrar algunos de sus elementos
* Aplicar progresiones aritméticas o geométricas a la resolución de problemas reales.

Las sucesiones se cuentan entre los temas más antiguos de investigación matemática, ya que han sido estudiadas durante más de 3500 años. Las sucesiones aparecen en el papiro de Rhind, un texto matemático que contiene 85 problemas copiados alrededor de 1650 a.C., por el escriba egipcio Ahmes.

El papiro de Rhind indica que los egipcios sabían cómo sumar los términos de una sucesión, igual que los babilonios.

Problema histórico: La siguiente es una rima antigua para niños que se parece a los problemas del papiro de Rhind: "Cuando iba a San Ives, encontré a un hombre con siete esposas. Cada esposa llevaba siete costales. Cada costal tenía siete gatos. Cada gato tenía siete gatitos. Gatitos, gatos, costales y esposas. ¿Cuántos iban a San Ives?". Para contestar esta pregunta será necesario realizar cálculos de manera más sencilla empleando sucesiones y los conceptos asociados.

Es importante anotar que las investigaciones de otras clases de sucesiones empezaron en el siglo XVI, cuando el álgebra estaba lo suficientemente desarrollada como para manejar problemas más complicados.

El desarrollo del cálculo, en el siglo XVII, añadió una herramienta muy poderosa, en especial para encontrar la suma de series infinitas; y el tema sigue floreciendo hoy en día. Aplicaciones de estos temas se encuentran en los campos de ciencias de la computación, ingeniería, economía y negocios, las ciencias sociales y las ciencias físicas y biológicas.

Definición 2.20 (Sucesión)

Una sucesión es un conjunto de números reales, los cuales reciben el nombre de términos. Todas las sucesiones tienen un primer término y cada término tiene un siguiente.

Las sucesiones pueden ser definidas como funciones de los números naturales:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\mapsto \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

Donde $dom\, f = \mathbb{N}$ y $rg\, f \subseteq \mathbb{R}$. Si $dom\, f$ está formado por una cantidad finita de elementos, la sucesión es finita; en caso contrario, se denomina sucesión infinita.

Ejemplo 2.110 Sucesiones.

En cada caso considere $dom\, f = \mathbb{N}$.

$f(n) = \dfrac{1}{n}$ Los términos serían $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, ...$

$f(n) = (n-2)^2$ Los términos serían $1, 0, 1, 4, 9, 16, ...$

$f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ Los términos serían $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{6}{7}, ...$

Algunas veces una sucesión se caracteriza por un patrón observado en los primeros términos, lo cual hace posible inferir la forma del n-ésimo término (término general), pero no todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, en la importante sucesión de los números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...$ no hay fórmula alguna que exprese el término general.

Una segunda forma de definir una sucesión es asignando un valor al primer término (o primeros términos), y especificando el término general por una expresión que involucre uno o más de los términos que le preceden.

Se dice que una sucesión está dada en forma **recursiva** cuando el n-ésimo término está definido en términos del anterior o de algunos anteriores.

La sucesión de Fibonacci está dada por:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ con } f_1 = 1 \text{ y } f_2 = 1$$

Los términos de esta sucesión, son:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...\}$$

Ejemplo 2.111 Sucesiones Recursivas.

Dada la siguiente sucesión: $a_n = 2(a_{n-1} - 3)$ siendo $a_1 = 5$, determine: a_2, a_3, a_4 y a_5.

Solución:

$a_2 = 2(a_1 - 3) = 2(5 - 3) = 4$
$a_3 = 2(a_2 - 3) = 2(4 - 3) = 2$
$a_4 = 2(a_3 - 3) = 2(2 - 3) = -2$
$a_5 = 2(a_4 - 3) = 2(-2 - 3) = -10$

Ejemplo 2.112 Sucesiones Recursivas.

Dada la siguiente sucesión: $a_n = 3a_{n-1}$ y $a_1 = \frac{2}{3}$, determine: a_2, a_3, a_4 y a_5.

Solución:

$a_2 = 3a_1 = 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

$a_3 = 3a_2 = 3(2) = 6$

$a_4 = 3a_3 = 3(6) = 18$

$a_5 = 3a_4 = 3(18) = 54$

Si las sucesiones tienen un patrón algebraico particular, se denominan progresiones, existiendo la posibilidad de ser aritméticas o geométricas.

Definición 2.21 (Progresiones Aritméticas)

Se denomina progresión aritmética a aquella sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una misma cantidad al término anterior. A la diferencia entre dos términos consecutivos se la denota por d.

$$f(n+1) - f(n) = d$$

La progresión aritmética también puede ser expresada de la siguiente manera:

$$f(n) = a + (n-1)d \qquad a, d \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$$

Donde a es el primer término y d es la diferencia común o razón aritmética de la progresión.

Así, los términos de una progresión aritmética con primer término a y diferencia común d, siguen el patrón:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

Al sumar los n primeros términos de una progresión arimética, se tiene la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{n\,(2a + (n-1)\,d)}{2} = \frac{n\,(a + f\,(n\,))}{2}$$

Como aplicación del método de inducción desarrollado anteriormente, se puede demostrar esta expresión.

Demostración: La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética está dada por:

$$S_n = \underbrace{(a)}_{1^{\circ}\text{ Término}} + \underbrace{(a+d)}_{2^{\circ}\text{ Término}} + \underbrace{(a+2d)}_{3^{\circ}\text{ Término}} + \ldots + \underbrace{a+(n-1)d}_{n\text{-ésimo Término}}$$

La propiedad a demostrar, para todos los números naturales n, es:

$$p(n) : (a) + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)d] = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$$

Considerando el primer paso del método de inducción, tenemos:

$$S_1 = a = \frac{1[2a + (1-1)d]}{2}$$

$$a = a$$

En el segundo paso, sumamos el término $(a + nd\,)$ a ambos miembros de la expresión:

$$(a)+(a+d)+(a+2d)+\ldots+[a+(n-1)\,d]+(a+nd) = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2} + (a+nd)$$

$$S_n + (a+nd) = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2} + (a+nd)$$

$$S_{n+1} = \frac{2an + n^2d - nd + 2a + 2nd}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{2an + n^2d + nd + 2a}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{2a(n+1) + nd(n+1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2a + [(n+1) - 1]d)}{2}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}\, [\, p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ es una proposición verdadera. Con lo cual todos los números naturales satisfacen el predicado $p(n)$.

Ejemplo 2.113 Progresiones Aritméticas.

Encuentre el décimo tercer término de la siguiente progresión aritmética: $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$

Solución:

$a = 2$	Primer término.
$d = 7 - 2 = 5$	Diferencia.
$f(13) = 2 + (13 - 1)(5) = 62$	Décimo tercer término.

Ejemplo 2.114 Progresiones Aritméticas.

Encuentre el valor de la siguiente suma: $5 + 9 + 13 + \ldots + 49$.

Solución:

$a = 5$	Primer término.
$d = 9 - 5 = 4$	Diferencia.
$49 = 5 + (n - 1)\, 4$	Número de términos.
$n = 12$	Simplificación.
$S_{12} = \frac{12[2(5) + (12 - 1)\, 4]}{2} = 324$	Suma de los términos.

Ejemplo 2.115 Progresiones Aritméticas.

Si el primer término de una progresión aritmética es -11 y la suma de los once primeros términos es 44, determine el undécimo término de la progresión.

Solución:

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de razón d y primer término a, viene dada por $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$.

En este caso: $S_{11} = \frac{11}{2}[2(-11) + (10)\, d] = 44$.

De donde se obtiene $d = 3$.

El undécimo término se determina a partir de:

$$a_{11} = a + (11 - 1)d$$
$$= -11 + 30$$
$$a_{11} = 19$$

Ejemplo 2.116 Progresiones Aritméticas.

Determine la cantidad de términos que deben sumarse de la progresión aritmética $\{1, 3, 5, 7, ...\}$ para que el resultado sea 3969.

Solución:

Se puede notar que en esta progresión aritmética:

$$a = 1$$
$$d = 2$$
$$S_n = 3969$$
$$n = ?$$

Utilizando la expresión $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ y reemplazando:

$$3969 = \frac{n}{2}[2 + 2(n - 1)]$$
$$7938 = 2n + 2n^2 - 2n$$
$$n^2 = 3969$$
$$n = \pm 63$$

Según el contexto del problema, se descarta el número -63. Por lo tanto hay que sumar 63 términos de esta progresión aritmética para que el resultado sea 3969.

Ejemplo 2.117 Progresiones Aritméticas.

Determine x, de modo que la siguiente sucesión sea una progresión aritmética: $-2x$, $x^2 - 3$, $3x^2 - 14$.

Solución:

$a = -2x$ Primer término.

$f(2) = x^2 - 3$ Segundo término.

$f(3) = 3x^2 - 14$ Tercer término.

Para que se cumpla la condición del problema:

$d = (x^2 - 3) - (-2x) = (3x^2 - 14) - (x^2 - 3)$	Diferencia o razón aritmética.
$x^2 - 3 + 2x = 3x^2 - 14 - x^2 + 3$	Simplificación.
$x^2 - 2x - 8 = 0$	Simplificación.
$(x - 4)(x + 2) = 0$	Factorización.
$(x - 4 = 0) \vee (x + 2 = 0)$	Propiedad de números reales.
$(x = 4) \vee (x = -2)$	Despeje de la incógnita.

Comprobando los valores encontrados:

Si $x = 4$, la progresión aritmética será: $-8, 13, 34$; cuya razón $d = 21$.

Si $x = -2$, la progresión aritmética será: $4, 1, -2,$; cuya razón $d = -3$.

Ejemplo 2.118 Aplicación de las Progresiones Aritméticas.

En el concurso "Rueda de la Fortuna" hay 12 premios, que en total suman \$ 96000. Si existe una diferencia de \$ 1000 entre cada premio sucesivo, determine el premio de menor valor en el concurso.

Solución:

Se puede notar que se trata de una progresión aritmética, con:

$n = 12$
$S_{12} = 96000$
$d = 1000$
$a = ?$

Utilizando la suma de los 12 primeros términos de la progresión:

$$96000 = \frac{12}{2}[2a + (12 - 1)(1000)]$$
$$16000 = 2a + 11000$$
$$2a = 5000$$
$$a = 2500$$

Por lo tanto, el premio de menor valor es de \$ 2500.

Ejemplo 2.119 Aplicación de las Progresiones Aritméticas.

En un teatro hay 50 filas de butacas. En la primera fila hay 30 butacas, en la segunda hay 32, en la tercera hay 34 y así sucesivamente. Determine la cantidad total de butacas.

Solución:

Podemos notar que la cantidad de butacas se encuentran en progresión aritmética al pasar de una fila a la siguiente, con:

$a = 30$

$n = 50$

$d = 2$

Lo cual implica sumar: $30 + 32 + 34 + ...$

$S_{50} = \frac{50}{2}[(2)(30) + (50 - 1)(2)]$

$S_{50} = 25(60 + 98)$

$S_{50} = 3950$

Por lo tanto, la cantidad de butacas que hay en el teatro es 3950.

Ejemplo 2.120 Aplicación de las Progresiones Aritméticas.

Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio, con 20 pies de ancho en la base y 10 pies de ancho en la parte superior. Los mosaicos cuadrados, cuyos lados miden 1 pie, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán?

Solución:

La fila inferior requiere de 20 mosaicos y la fila superior de 10. Ya que cada fila sucesiva requiere de un mosaico menos, el número total de mosaicos necesarios está dado por la siguiente suma:

$20 + 19 + 18 + 17 + ... + 10$	Suma de los términos.
$a = 20$	Primer término.
$d = 19 - 20 = -1$	Diferencia.
$10 = 20 + (n - 1)(-1)$	Número de términos.
$n = 11$	Simplificación.

$S_{11} = \frac{11[2(20) + (11 - 1)(-1)]}{2} = 165$

Por lo tanto, se necesitarán 165 mosaicos.

Definición 2.22 (Progresiones Geométricas)

Se denomina progresión geométrica a aquella sucesión de números en la que cada término se obtiene multiplicando por una misma cantidad al término anterior. Por lo tanto, el cociente entre dos términos consecutivos es constante y se denomina razón r de la progresión.

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = r$$

La progresión geométrica también puede ser expresada de la siguiente manera:

$$f(n) = ar^{n-1} \qquad a,\ r \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$$

donde a es el primer término y r es la razón geométrica de la progresión.

Así, los términos de una progresión geométrica con primer término a y razón r, siguen el patrón:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots$$

Al sumar los términos de una progresión geométrica, se tiene la siguiente expresión:

$$P_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\ ;\ r \neq 1$$
$$P_n = na \qquad ;\ r = 1$$

Como aplicación del método de inducción desarrollado anteriormente, se puede demostrar esta expresión.

$$P_n = \underbrace{(a)}_{1^{\circ}\text{ término}} + \underbrace{(ar)}_{2^{\circ}\text{ término}} + \underbrace{(ar^2)}_{3^{\circ}\text{ término}} + \ldots + \underbrace{(ar^{n-1})}_{n\text{-ésimo término}}$$

Demostración: La suma de los n primeros términos de la progresión geométrica está dada por:

$$P_n = (a) + (ar) + (ar^2) + \ldots + (ar^{n-1})$$

La propiedad a demostrar, para todos los números naturales n, es:

$$q(n):\ a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r};\ r \neq 1$$

Considerando el primer paso del método de inducción, tenemos:

$$P_1 = a = \frac{a(1-r)}{1-r}$$
$$a = a$$

En el segundo paso, sumamos el término (ar^n) a ambos miembros de la expresión:

$$P_n + ar^n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^n$$
$$P_{n+1} = \frac{a - ar^n + ar^n - ar^{n+1}}{1-r}$$
$$P_{n+1} = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}$$
$$P_{n+1} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}\ [q(n) \Rightarrow q(n+1)]$ es una proposición verdadera. Con lo cual todos los números naturales satisfacen el predicado $q(n)$.

Cuando la cantidad de términos es muy grande y la razón $|r| < 1$, la suma de tales términos se puede calcular por medio de una aproximación:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r}$$

Si $0 < r < 1$, $r^n \to 0$ cuando el valor de n es extremadamente grande. Por lo tanto, la expresión:

$$P_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Se reduce a:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r}$$

Lo mismo ocurre cuando $-1 < r < 0$.

Ejemplo 2.121 Progresiones Geométricas.

Encuentre el octavo término de la progresión geométrica: $1, 3, 9, ...$

Solución:

Se puede notar que en esta progresión geométrica:

$a = 1$	Primer término.
$r = \frac{3}{1} = 3$	Razón.
$f(8) = (1)(3)^7 = 2187$	Octavo término.

Ejemplo 2.122 Progresiones Geométricas.

Encuentre x, de modo que $x,\ x+2,\ x+3$, sean los términos consecutivos de una progresión geométrica.

Solución:

$a = x$	Primer término.
$f(2) = x + 2$	Segundo término.
$f(3) = x + 3$	Tercer término.
$r = \frac{x+2}{x} = \frac{x+3}{x+2}$	Razón.
$x(x+3) = (x+2)^2$	Simplificación.
$x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4$	Desarrollo de productos.
$x = -4$	

Comprobando, los términos de la progresión serían: $-4, -2, -1$, con razón $r = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.123 Progresiones Geométricas.

Encuentre el valor de la siguiente suma, cuyos términos están en progresión geométrica $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + ...$

Solución:

$a = 1$	Primer término.
$r = \dfrac{\frac{9}{16}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$	Razón.
$P_\infty \approx \dfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} \approx \frac{4}{7}$	Suma de los infinitos términos.

Ejemplo 2.124 Progresiones Geométricas.

Determine el valor de la suma $\frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^6}} + \frac{1}{\sqrt{3^9}} + \frac{1}{\sqrt{3^{12}}} + \ldots$

Solución:

Se tiene una progresión geométrica decreciente con infinitos términos, con primer término $a = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$ y razón $r = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$.

Al aplicar la fórmula de la suma de términos se obtiene:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{3^3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3^3}}} \approx \frac{3\sqrt{3}+1}{26}$$

Ejemplo 2.125 Aplicación de las Progresiones Geométricas.

Encuentre el valor aproximado de: $2(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{4}})(2^{\frac{1}{8}})(2^{\frac{1}{16}})\ldots$

Solución:

Si consideramos propiedades de los exponentes, la expresión es equivalente a:

$$2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}$$

Podemos observar que el exponente de esta operación consta de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente con primer término $a = 1$ y razón $r = \frac{1}{2}$.

$$P_\infty \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \approx 2$$

El valor solicitado es:

$$2^{P\infty} \approx 2^2 = 4$$

Ejemplo 2.126 Aplicación de las Progresiones Geométricas.

Considere el número $x = 2.343434\ldots$

Su parte decimal es $0.343434\ldots$

La cual puede expresarse como la suma infinita $\frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \ldots$

Esta suma corresponde a la de una progresión geométrica con $a = \frac{34}{100}$ y $r = \frac{1}{100}$.

Como $r < 1$ y el número de términos n es infinito, la suma de estas fracciones es:

$$P_n \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}} \approx \frac{\frac{34}{100}}{\frac{99}{100}} \approx \frac{34}{99}$$

Con lo cual se obtiene $\frac{34}{99}$ como la representación fraccionaria de la parte decimal del número $2.343434\ldots$

Finalmente, el número incluyendo la parte entera es $2 + \frac{34}{99} = \frac{232}{99}$, con lo cual se verifica que todo número decimal periódico representa una fracción.

Ejemplo 2.127 Aplicación de las Progresiones Geométricas.

Un distribuidor vende 120 teléfonos en 4 días. Si cada día vendió $\frac{1}{3}$ de lo que vendió el día anterior, ¿cuántos teléfonos vendió el primer día?

Solución:

El problema consiste en hallar el primer término de una progresión geométrica en la cual, la suma de los 4 primeros términos es 120 y la razón es $\frac{1}{3}$. Aplicando la fórmula para la suma de los 4 primeros términos de la progresión geométrica planteada y representando por a el primer término, se obtiene:

$$\left[120 = \frac{a\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{a\left(-\frac{80}{81}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{40a}{27}\right] \therefore a = 81$$

Por lo tanto, él vendió 81 teléfonos el primer día, 27 el segundo día, 9 el tercer día y 3 el cuarto día, es decir, 120 teléfonos en total durante los cuatro días.

Ejemplo 2.128 Aplicación de las Progresiones Geométricas.

Tres personas A, B, C, dividen una manzana de la siguiente manera: primero la dividen en cuartos y cada uno toma un cuarto. Después dividen la parte sobrante de nuevo en cuartos y cada quien toma su parte, siguiendo de esta manera con las partes sobrantes. ¿Cuánto obtiene cada uno en total?

Solución:

Al dividir la manzana según las condiciones del problema, cada persona recibe, la primera vez $\frac{1}{4}$ de manzana; la segunda vez recibe la cuarta parte del cuarto que quedó, esto es $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$. El problema se reduce a calcular la suma de términos de una progresión geométrica indefinida de primer término $a = \frac{1}{4}$ y razón $r = \frac{1}{4}$, la cual es menor que la unidad.

$$P_{\infty} \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \approx \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \approx \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, a cada uno le corresponde la tercera parte de la manzana.

Ejemplo 2.129 Aplicación de las Progresiones Geométricas.

Una población de bacterias crece de tal manera que cada día hay el doble de las que había el día anterior. Si en el décimo día se encontraron 1024 bacterias, ¿cuántas bacterias habían en el primer día?

Solución:

Aquí se tiene una progresión geométrica de razón $r = 2$, tal que su décimo término es 1024.

$$f(n) = ar^{n-1}$$

$$f(10) = a(2)^{10-1}$$

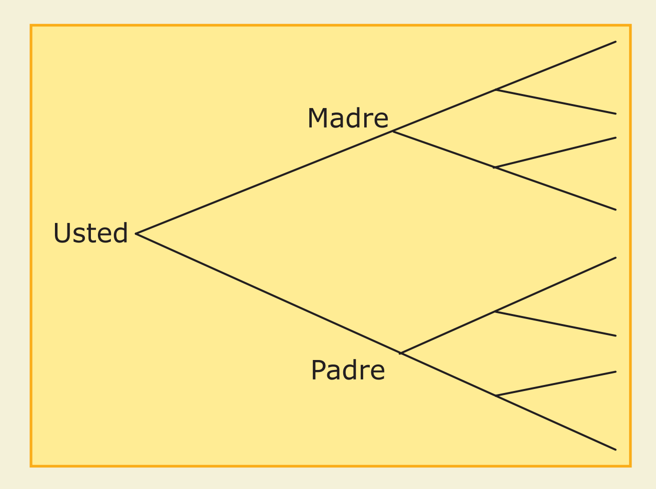
$$1024 = a(2)^{9}$$

$$\therefore a = 2$$

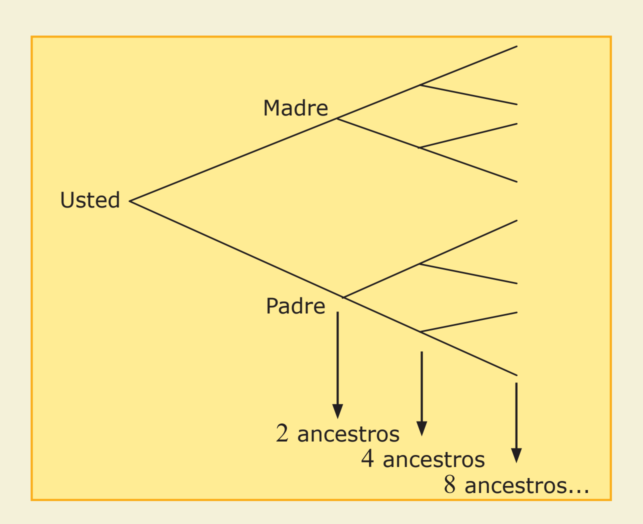
Por lo tanto, el primer día habían 2 bacterias.

Ejemplo 2.130 Aplicación de las Progresiones Geométricas.

En la figura se indica un árbol genealógico que muestra tres generaciones anteriores y un total de 14 antecesores. Si usted tuviera que analizar su historia familiar hasta 10 generaciones atrás, ¿cuántos ancestros encontraría?



Solución:



Se trata de encontrar la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón r es 2 y cuyo primer término a es también 2.

$$P_{10} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046$$

Es decir, que se tendrían 2046 ancestros.

2.1 Representación decimal

1. El número $\frac{\pi}{2\pi} + 4$ es un número irracional.
   a) Verdadero b) Falso

2. Indique cuál de estos conjuntos no es vacío.
   a) $\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge (3 < x < 4)\}$
   b) $\{x/x \in \mathbb{Q} \wedge (x^2 - 2 = 0)\}$
   c) $\{x/x \in \mathbb{I} \wedge (x + 1 \geq 0)\}$
   d) $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 + 1 < 0)\}$
   e) $\{x/x \in \mathbb{N} \wedge (x^{-1} - 2 = 0)\}$

3. Hallar el valor de las siguientes operaciones y expréselo como un entero o fracción simplificada:

   a) $$\frac{(7 - 6.35) \div 6.5 + 9.9}{\left(1.2 \div 36 + 1.2 \div 0.25 - 1\frac{5}{16}\right) \div \frac{169}{24}}$$

   b) $3(6 - 1.333...) + 6(1.333...) - 16.666...$

   c) $$\frac{3}{1 + \frac{2}{0.5}} - \frac{2}{1 + \frac{3}{0.5}} + \frac{\frac{54}{3} + 1.666...}{9 + 2.666...}$$

2.2 Operaciones binarias

4. ¿La adición de los números irracionales cumple la propiedad clausurativa? Si no la cumple, construya un contraejemplo.

5. El producto de los números irracionales cumple la propiedad clausurativa.
   a) Verdadero b) Falso

6. Dado el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y la operación binaria en S definida como:

$$a * b = \begin{cases} a \;;\; a \geq b \\ b \;;\; a < b \end{cases}$$

   Indicar cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

   a) La operación no es conmutativa.
   b) La operación no es asociativa.
   c) El elemento neutro es 1.
   d) $\forall\, a, b \in S, (3 * a) = (b * 3)$
   e) $(1 * 3) * 2 = (2 * 1) * (3 * 4)$

7. Sea $G = \{a, b, c\}$, si sobre este conjunto se define la operación binaria que se representa en la siguiente tabla.

∇	a	b	c
a	b	a	a
b	b	c	b
c	a	b	c

Identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa.

a) La operación binaria ∇ es conmutativa.
b) La operación binaria ∇ es asociativa.
c) $\exists \lambda \in G, \forall x \in G: [x \nabla \lambda = x]$
d) $(a \nabla a) = [(b \nabla c) \nabla a]$
e) $[(a \nabla b) \nabla (a \nabla c)] = (c \nabla b)$

8. Un sistema matemático (operación binaria) particularmente interesante es el que llamamos aritmética modular. Un ejemplo es el conjunto de los enteros módulo 4, los elementos de este conjunto son 4, a saber:

$S = \{0, 1, 2, 3\}$

En donde las operaciones quedan definidas de la siguiente manera:

$\forall i, j, k \in S$: $i + j = k$, donde k es el residuo de la división de $i + j$ para 4.
$\forall i, j, m \in S$: $i \cdot j = m$, donde m es el residuo de la división de $i \cdot j$ para 4.

Así:

$\overline{2} + \overline{3} = \overline{1}$ ya que $2 + 3 = 5$, que dividido por 4, da residuo 1.
$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2}$ ya que $2 \cdot 3 = 6$, que dividido por 4, da residuo 2.

Hallar el resultado de las siguientes operaciones para el módulo indicado.

a) Módulo 7

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

I) $\overline{4} + \overline{5}$
II) $\overline{5} \cdot \overline{3}$
III) $\overline{2} \cdot \overline{4}$
IV) $\overline{5} \cdot \overline{6}$
V) $\overline{6} \cdot \overline{1}$
VI) $\overline{1} + \overline{0}$
VII) $\overline{2} \cdot \overline{0}$
VIII) $\overline{5} + \overline{3}$
IX) $\overline{4} \cdot \overline{5}$
X) $\overline{2} + \overline{5}$

b) Módulo 6

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

I) $\overline{4} + \overline{5}$
II) $\overline{5} \cdot \overline{3}$
III) $\overline{2} \cdot \overline{4}$
IV) $\overline{5} \cdot \overline{1}$
V) $\overline{0} \cdot \overline{1}$
VI) $\overline{1} \cdot \overline{0}$
VII) $\overline{2} \cdot \overline{0}$
VIII) $\overline{5} + \overline{3}$
IX) $\overline{4} \cdot \overline{5}$
X) $\overline{2} + \overline{5}$

2.3 Operaciones entre números reales

9. El valor de la expresión $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$ es:

a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{41}{18}$ d) $\frac{18}{41}$ e) $\frac{27}{11}$

10. ¿A qué es igual $a \cdot 0$?; ¿por qué?

11. ¿Por qué es verdadera la igualdad $(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$?

12. ¿Es verdadera alguna de la siguientes propiedades distributivas de la división sobre la adición? ¿Por qué?

a) $a \div (b+c) = (a \div b) + (a \div c)$
b) $(a+b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$

13. Demostrar que entre los números reales hay un sólo cero; esto es, hay un sólo número c, tal que:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\ (a+c) = a$$

2.4. Relación de orden

14. El valor de verdad de la proposición $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \neq \left(\sqrt{1-\sqrt{3}}\right)^2$ es:

a) Verdadero b) Falso

15. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:

a) $8 < e^{\pi} < 81$

b) $\sqrt{3}+\sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $2^{\sqrt{2}} < \sqrt{8}$

d) $\frac{1}{0.16666...} = 6$

e) $\sqrt[5]{0.1} < \sqrt[5]{0.2}$

16. ¿Cuál es la lista donde los números aparecen ordenados de menor a mayor?

a) $\frac{69}{200}$, $\frac{19}{100}$, 0.8 , $\frac{1}{5}$

b) $\frac{19}{100}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{69}{200}$, 0.8

c) $\frac{4}{5}$, $\frac{19}{100}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{69}{200}$

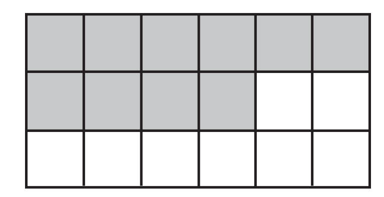
d) $\frac{1}{5}$, 0.8 , $\frac{69}{200}$, $\frac{19}{100}$

e) $\frac{1}{2}$, 0.5 , $\frac{2}{4}$

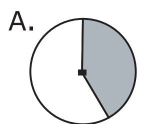
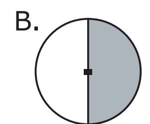
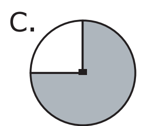
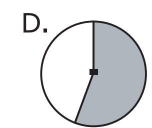
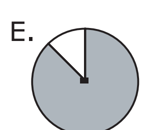
17. Dos grupos de turistas tienen 60 personas cada uno. Si $\frac{3}{4}$ del primer grupo y $\frac{2}{3}$ del segundo toman un autobús para ir al museo, ¿cuántas personas más del primer grupo toman el autobús que del segundo?

a) 2 b) 4 c) 5 d) 40 e) 45

18. Dado el siguiente rectángulo:



¿Qué círculo tiene oscurecida , aproximadamente, la misma fracción que el rectángulo?

A. 
B. 
C. 
D. 
E. 

19. ¿Qué número es mayor?

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{7}{10}$ e) $\frac{31}{40}$

2.5 Conceptos asociados al conjunto de los números enteros

En los ejercicios siguientes, considere que el conjunto referencial son los enteros positivos.

20. Si a y b son números primos y M un entero positivo, tal que $M = a^3\ b^2$, entonces M tiene doce divisores.

a) Verdadero b) Falso

21. El máximo común divisor de 72, 108 y 90 es 90.

a) Verdadero b) Falso

22. Dos números a y b se llaman primos entre sí cuando el máximo común divisor de ellos es uno.

a) Verdadero b) Falso

23. El número de divisores de 72 es:
a) 10 b) 11 c) 12 d) 9 e) 7

24. La suma de los divisores de 72 menores que 72 es:
a) 72 b) 123 c) 122 d) 144 e) 120

25. El mímino común múltiplo de 15 y 25 es:
a) 375 b) 75 c) 15 d) 3 e) 5

26. Rellenar la tabla aplicando los criterio de divisibilidad. (V: verdadero, F: falso).

Divisores	2	3	4	5	9	11
56	V	F				
261						
660						
1455						

27. Queremos embaldosar el piso de una aula de la terraza norte de 14 metros de largo por 4.2 metros de ancho con baldosas cuadradas. Lo queremos hacer con el menor número de baldosas posibles y sin cortar ninguna.

a) Halle la medida del lado de la baldosa a utilizar.
b) Halle el número de baldosas a utilizar.

28. Soraya tiene 24 bombones y 42 caramelos variados para regalar. Quiere empaquetarlos en cajas diferentes con sólo bombones o sólo caramelos, de tal manera que contengan el mayor número posible, y de forma que en todas quepa el mismo número de golosinas. ¿Cuántas golosinas entran en cada caja?

29. Los alumnos de un paralelo del nivel cero pueden formar grupos para los talleres de 2, 3, 5, y 6 alumnos, sin que sobre ni falte ninguno. ¿Cuántos alumnos habrá, si su número está comprendido entre 45 y 65?

2.6 Expresiones algebraicas

30. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\dfrac{2}{1-a}+\dfrac{2}{1+a}}{\dfrac{2}{1+a}-\dfrac{2}{1-a}}$$

31. Uno de los factores de la expresión $3x^2+7x-6$, es:

a) $3x+2$ b) $2-3x$ c) $x+3$ d) $3-x$ e) $x+2$

32. Al simplificar la expresión $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}-(x+1)$, se obtiene:

a) $\dfrac{x+1}{x}$ b) 1 c) x d) $-\dfrac{1}{x}$ e) $-\dfrac{x}{x+1}$

33. Al simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt{1+x}-\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$, se obtiene:

a) $\dfrac{2+x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

b) $2x$

c) $\sqrt{1+x}$

d) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{x-1}$

e) $x\sqrt{1+x}$

34. Expresar como un producto de tres factores cada una de las siguientes expresiones:

a) $a^4+3a^3+4a^2-6a-12$

b) $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$

c) x^3-5x^2-x+5

d) $x^4-3x^3+4x^2-6x+4$

e) x^3-7x+6

35. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, siempre que sea posible.

a) $\dfrac{4}{x^2+xy}+\dfrac{4}{xy+y^2}$

b) $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}$

c) $\dfrac{3x}{x-1}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x-1}$

d) $\dfrac{4}{x^2-3x+4}+\dfrac{3}{x^2-16}-\dfrac{7}{x^2+5x+4}$

e) $\left(\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)\left(\dfrac{x-3}{4}\right)$

f) $\left(\dfrac{xy-x}{y^2-1}\right)\left(\dfrac{y+1}{x+2}\right)\left(\dfrac{2x+4}{5x}\right)$

g) $\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}\right)\left(\dfrac{3x}{x-5}\right)$

h) $\dfrac{5a^2-a-4}{a^3-1}$

i) $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$

j) $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$

k) $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-a\right)$

l) $\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{2a}{1+a^2}-\dfrac{4a^3}{1+a^4}-\dfrac{8a^7}{1+a^8}$

36. Descomponer en cuatro factores las siguientes expresiones:

a) $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)$

b) $(a-b)^3-(a-c)^3+(b-c)^3$

c) a^4-18a^2+81

d) $3x^4-10x^3+10x-3$

e) $(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x-1)^2$

37. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

b) $$\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}-\frac{a^2+a+1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^2}{a^4-1}$$

c) $$\left(\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\right)\left(\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\right)\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right)\div\frac{c(1+c)-a}{bc}$$

d) $$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-c)(b-c)}$$

38. ¿Para qué valores reales de x no está definida la siguiente expresión?

$$\frac{5x+2}{x+1}$$

39. Simplificar: $\dfrac{(x^3-y^3)(x^2+2xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}-x-y$

2.7 Valor Absoluto

40. Sea $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y # la operación binaria definida en S, tal que:

$$a \# b = |a - b| - 2$$

Entonces es falso que:

a) $1 \# 0 = -1$
b) $(-2 \# -1) \# 1 = 0$
c) # es una operación conmutativa.
d) $\forall a \in S, a \# 0 = |a| - 2$
e) $\forall a \in S, a \# a = a$

41. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:

a) $\sqrt{4} = 2$ siempre que -2π es un número irracional.

b) $6 \div (10 \div 5) = 3$ o $(-15)^{-2}$ es un número negativo.

c) El número $2e \div e$ es irracional y $|x - e| = |e - x|$.

d) Si $\sqrt{2}$ es irracional, entonces $-3 = 1 - 4$.

e) Una de las proposiciones anteriores es falsa.

42. Realizar las operaciones indicadas:

a) $|-7| + |3| - |-5|$
b) $|6 - 9| + |10 - 4| + |5| - |-5|$
c) $|4 - 8| - |-6| + |14 - 11| - |-8|$
d) $|3(-1) - (-1)| - |2(-1) - (-1)| - |3 - (-1)|$
e) $2(1) - 3 - |3(1) - 2(2)| + |4 - 5(-2)|$
f) $|3(0) - 1| - [3(-4) + 6] - |-3 - 2(-4)|$

43. Descomponer el valor absoluto en las siguientes expresiones:

a) $|x - a|$
b) $|1 - x|$
c) $|x - a + b|$

2.8 Ecuaciones

44. Elena tiene una canasta con canicas. Le dio la mitad de las canicas a Jorge y un tercio de las que le quedaban en la canasta, se las dio a María. De esta manera, le quedaron 6 canicas a Elena, ¿cuántas canicas tenía al principio?

a) 18 b) 24 c) 30 d) 36 e) 40

45. Elena, Antonio y su madre comieron un pastel. Elena comió $\frac{1}{2}$ del pastel, Antonio comió $\frac{1}{4}$ del pastel y su madre comió $\frac{1}{4}$ del pastel. ¿Cuánto quedó del pastel?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) Nada

46. La suma de tres números es 12. El segundo número es 1 más que tres veces el primero y el tercer número es 1 menos que 2 veces el segundo. Entonces es verdad que:

a) El tercer número es 6.
b) La suma del primero y el segundo es 7.
c) El segundo número es 5.
d) La suma del primero y el tercero es 8.
e) El primer número es 2.

47. Una compañía vinícola requiere producir $10\,000$ litros de jerez, mezclando vino blanco con brandy; el vino blanco contiene 10% de alcohol, y el brandy contiene 35% de alcohol por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol del 15%.

Entonces las cantidades en litros de vino blanco y de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado, es:

a) 8000 de vino blanco y 2000 de brandy.
b) 9000 de vino blanco y 1000 de brandy.
c) 7000 de vino blanco y 3000 de brandy.
d) 6500 de vino blanco y 3500 de brandy.
e) 2000 de vino blanco y 8000 de brandy.

En los siguientes cinco ejercicios, considere que $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$.

48. Determine el conjunto de verdad de $p(x)$: $\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x-5} + \frac{20}{x^2-25} = 0$.

49. Un valor de k para que la suma de las raíces de la ecuación $kx^2 + 4kx + 3 = x^2$ sea 10, es:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10}{14}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

50. Determinar el conjunto de verdad del predicado: $p(x)$: $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$.

51. Dado el predicado $p(x)$: $\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x^2-4} = 0$, la suma de los elementos de $\mathrm{A}p(x)$, es:

a) 0
b) -3
c) -5
d) 1
e) $\mathrm{A}p(x)$ no tiene elementos.

52. La suma de los elementos del conjunto de verdad de

$p(x)$: $|9 - x^2| - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$, es:

a) 0 b) 7 c) $\frac{7}{11}$ d) $\frac{48}{11}$ e) $\frac{7}{22}$

53. Cecilia recibió $\$435$ por trabajar 52 horas en una semana. La jornada laboral normal es de 40 horas semanales, y su jefe paga una y media veces más de lo que paga por cada hora normal cada hora extra. Entonces, por cada hora, Cecilia recibe:

a) Menos de cinco dólares.
b) Más de cinco, pero menos de seis dólares.
c) Más de seis, pero menos de siete dólares.
d) Más de siete, pero menos de ocho dólares.
e) Más de ocho dólares.

54. Resolver las siguientes ecuaciones, considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x^2+17}{x^2-1} = \dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{5}{1-x}$

b) $\dfrac{ax+b}{ax-b} - \dfrac{ax-b}{ax+b} = \dfrac{4b}{a^2x^2-b^2}$

c) $1-|x|=5$

d) $|5-x|=13-x$

e) $|3-x|-|x+2|=5$

f) $|2x-3|=|x+7|$

g) $|2x-3|=5$

h) $|x-2|+|x-1|=x-3$

i) $4x+6x=9x^2-15x$

j) $(x+1)^2\,|x+1|-1=0$

55. A continuación se presenta una lista de diversos enunciados verbales de uso frecuente en el cálculo algebraico. Expresarlos en forma algebraica.

* Número natural cualquiera.
* El antecesor de n.
* El sucesor de n.
* Número natural par.
* Número natural impar.
* El cuadrado del sucesor de n.
* El sucesor del cuadrado de n.
* El cuadrado del sucesor del antecesor de n.
* Dos números naturales impares consecutivos.
* La diferencia positiva de los cuadrados entre dos números naturales consecutivos.
* La diferencia positiva de los cubos entre dos números naturales pares consecutivos.
* El inverso aditivo u opuesto de r.
* El inverso multiplicativo o recíproco de r.
* El sucesor del recíproco de s.
* El triple de x.

* El cuadrado de la suma entre a y b.
* La suma de los cuadrados de a y b.
* El producto entre a, b y c.
* Un número de dos cifras en el sistema decimal, cuya cifra de las unidades es u, cifra de las decenas es d y cifra de las centenas es c.
* La razón o cociente entre p y q.
* La mitad de m o el cincuenta por ciento de m.
* La cuarta parte de n o el veinticinco por ciento de n.
* El valor absoluto de x.
* La media aritmética o promedio aritmético entre m y n.
* La raíz cuadrada de x.
* La media geométrica entre a y b. (La media geométrica entre dos números se define como la raíz cuadrada de su producto).
* x es directamente proporcional a y.
* x es inversamente proporcional a y.
* La distancia entre a y b menor que δ.

56. El largo de un cuadro es el doble del ancho. Si el marco del cuadro tiene $2cm$ de ancho y si el cuadro y su marco tienen una superficie $244cm^2$ mayor que la del cuadro, encontrar las dimensiones del cuadro.

57. Encontrar un número tal que sustraído en 4 y agregado en $2\frac{1}{4}$ es igual a $\frac{1}{3}$ de sí mismo.

58. Una piscina puede ser llenada por tres cañerías en forma independiente. La primera cañería llena la piscina en $15h$; la segunda en $20h$ y la última en $30h$. ¿En qué tiempo llenarían la piscina las tres cañerías juntas?

59. Un vendedor de nueces tiene dos clases de fruta; una de $\$0.90$ el kg y otra de $\$0.60$ el kg. La competencia vende las nueces a $\$0.72$ el kg. ¿En qué proporciones debe mezclar las nueces, de tal forma que pueda competir en el mercado?

60. Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo se corta en dos, y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas formadas es de $397pulg^2$, encontrar la longitud de cada pedazo de alambre.

61. Bienes raíces "Chóez" construyó una unidad habitacional con 40 departamentos, se conoce que si se fija un alquiler mensual de $\$120$ por departamento, todos serán ocupados, pero por $\$5$ de incremento en el alquiler uno quedará vacante. El alquiler en dólares que deberá fijarse con el objeto de obtener los mismos ingresos (que si se alquilaran a $\$120$ cada departamento), dejando algunos vacíos para mantenimiento, es:

a) 160 b) 180 c) 200 d) 220 e) 240

62. J. Cárdenas es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 habitaciones, él puede alquilar todas las habitaciones si fija un alquiler de $\$180$ al mes. Al subir el alquiler, algunas habitaciones quedarán vacías, en promedio, por cada incremento de $\$5$, una habitación quedará vacía; sin posibilidad alguna de alquilarse. Encuentre el alquiler que debería cobrar con el fin de obtener un ingreso total de $\$11\ 475$.

63. Un capital de $\$100$ se invierte a cierto interés a un año; luego con el interés ganado, se invierte en el segundo año a un interés igual al doble de la primera tasa de interés. Si la suma total obtenida es $\$112.32$, ¿cuáles son las dos tasas de interés?

64. Cada semana, una compañía puede vender x unidades de su producto a un precio de p dólares cada uno, en donde $p = 600 - 5x$. Si le cuesta a la compañía $(8\ 000 + 75x)$ dólares producir x unidades,

a) ¿Cuántas unidades debería vender la compañía a la semana si desea generar un ingreso de $\$17\ 500$? (Ingreso $= p \cdot x$)

b) ¿Qué precio por unidad debería fijar la compañía con el propósito de obtener ingresos semanales por $\$18\ 000$?

c) ¿Cuántas unidades debería producir y vender cada semana para lograr utilidades semanales de $\$5\ 500$? (Utilidad $=$ ingresos $-$ costos)

d) ¿Qué precio por unidad generaría a la compañía una utilidad semanal de $\$5\ 750$?

65. La longitud de un rectángulo excede a su anchura por dos pies. Si cada dimensión fuese incrementada en tres pies, el área se incrementaría en $51 pies^2$. Encontrar las dimensiones originales y nuevas del rectángulo.

66. Un tanque puede llenarse por una tubería en $2\frac{1}{2}$ horas, por otra tubería en $3\frac{1}{3}$ horas, y por una tercera en 5 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque si se habilitan las tres tuberías a la vez?

67. Francisco puede hacer una obra en 3 días, Santiago en 4 días y José en 6 días. ¿Qué tiempo tardarán trabajando conjuntamente?

68. Yolanda puede hacer cierto trabajo en 8 horas, Pablo en 10 horas y Carlos en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tomará efectuar el trabajo si Yolanda y Pablo se ponen a trabajar durante una hora e inmediatamente después Yolanda y Carlos lo terminan?

69. J.C. presta $\$4\ 000$ a una tasa de interés anual y $\$5\ 000$ a una tasa mayor en un punto a la anterior. Por el préstamo de $\$5\ 000$ obtiene $\$110$ más cada año que por el préstamo de $\$4\ 000$. Determine las dos tasas de interés.

70. El radiador de un automóvil contiene 10 litros de una mezcla de agua y 20% de anticorrosivo. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y reemplazarse por anticorrosivo puro para obtener una mezcla del 50% en el radiador?

71. Una cortadora de césped utiliza una mezcla de combustible de 23 partes de gasolina y una parte de aceite. ¿Cuánta gasolina debe añadirse a un litro de mezcla que tiene 5 partes de gasolina y una parte de aceite para obtener la mezcla correcta?

72. Cierta capa de suelo de plantación contiene 10% de turba y otra capa contiene 30%. ¿Qué cantidad de cada suelo debe mezclarse para producir 2 pies cúbicos de suelo de plantación que tenga 25% de turba?

73. El jefe de una estación de servicio compró $15\ 000$ galones de gasolina extra y súper por $\$8\ 550$. Si el precio de mayorista fue de 55 centavos por galón para la gasolina extra y 60 centavos por galón para la gasolina súper, determinar cuántos galones de cada clase de gasolina se compraron.

74. El almacén de productos químicos Chóez tiene 2 tipos de soluciones ácidas. Una de ellas contiene 25% de ácido H_2SO_4 y la otra contiene 15% de ácido H_2SO_4. ¿Cuántos galones de cada tipo deberán mezclar para obtener 200 galones de una mezcla que contenga 18% de ácido H_2SO_4?

75. La tienda "El Manaba" que se especializa en productos de Manabí, vende coco rallado a $\$0.70$ la libra y sal prieta a $\$1.60$ la libra. Al final de un mes, el propietario se entera que la sal prieta no se vende bien y decide mezclar coco rallado con sal prieta para preparar diferentes platos (encocados de diferentes mariscos), con esta mezcla quiere producir 45 libras, que venderá a $\$1$ la libra. ¿Cuántas libras de coco rallado y sal prieta deberá mezclar para mantener los mismos ingresos?

76. Los miembros de una fundación desean invertir $\$18\ 000$ en dos tipos de seguros que pagan dividendos anuales del 9% y 6%, respectivamente. Construya una tabla y plantee el ejercicio. ¿Cuánto deberá invertir en cada tasa si el ingreso debe ser equivalente al que produciría al 8% la inversión total?

77. Dada la ecuación $4x^2 - 4xy - y^2 = 1$, utilice la fórmula cuadrática para resolver y obtener:

a) x en términos de y.   b) y en términos de x.

Para los siguientes cinco ejercicios, considere $x \in \mathbb{R}$.

78. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $m(x)$: $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x(x + 4)(x + 5)$

b) $m(x)$: $(x + 1)^3 + (x - 1)^2 = x^3 + x + 1$

c) $p(x)$: $x^2 - 4ax + 4a^2 - c^2 = 0$

d) $q(x)$: $a^2x^2 + a(b - c)x - bc = 0$

e) $p(x)$: $\dfrac{2x + a}{b} - \dfrac{x - b}{a} = \dfrac{3ax + (a - b)^2}{ab}$

f) $p(x)$: $\dfrac{x + a}{a - b} + \dfrac{x + a}{a + b} = \dfrac{x + b}{a + b} + \dfrac{2(x - b)}{a - b}$

g) $p(x)$: $(a + x)(b + x) - a(b + c) = \dfrac{a^2c}{b} + x^2$

h) $p(x)$: $\dfrac{(a + b)^2(x + 1) - (a + b)(x + 1) + (x + 1)}{a + b + 1} = (a + b)^2 - (a + b) + 1$

i) $p(x)$: $\dfrac{x}{ab} + \dfrac{x}{bc} + \dfrac{x}{ac} - 1 = abc - x(a + b + c)$

79. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $q(x)$: $\dfrac{4}{x + 4} + \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{3}{x + 1} = 0$

b) $p(x)$: $\dfrac{3x}{2x + 1} - \dfrac{x + 5}{x + 1} = \dfrac{x - 19}{2x^2 + 3x + 1}$

c) $m(x)$: $\dfrac{3a + x}{3a - x} + \dfrac{2a - 3x}{2a + 3x} = \dfrac{9}{2}$

d) $p(x)$: $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b} = \dfrac{1}{x - c}$

e) $q(x)$: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a + b - x}$

f) $r(x)$: $\dfrac{6}{x + 4} - \dfrac{x + 4}{x - 4} + \dfrac{7x^2 + 50}{3(x^2 - 16)} = \dfrac{4}{3}$

g) $q(x)$: $\dfrac{x + a + b}{x + a} = \dfrac{x + a - b}{x - a} - \dfrac{a^2 + b^2}{x^2 - a^2}$

h) $p(x)$: $\dfrac{\dfrac{x + 1}{x - 1}}{1 + \dfrac{2x}{x - 1}} = \dfrac{1}{2}$

80. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $r(x)$: $\sqrt{x^2 - 7} = 3$

b) $m(x)$: $\sqrt{x + 1} = x - 1$

c) $p(x)$: $\sqrt{x} + \sqrt{3x + 4} = \sqrt{4 - x}$

d) $q(x)$: $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{2a}$

e) $r(x)$: $\dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}} = x - 3$

f) $m(x)$: $\dfrac{1}{\sqrt{3a+x} - \sqrt{a-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{3a+x} + \sqrt{a-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

g) $p(x)$: $\dfrac{1}{\sqrt{4a+x} + \sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{4a+x} - \sqrt{a}} = \dfrac{4}{3\sqrt{a}}$

h) $p(x)$: $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 2}$

i) $q(x)$: $\sqrt{4x + 3} + 1 = \sqrt{2x - 2}$

j) $p(x)$: $\sqrt{x + 4} = 1 + \sqrt{2x - 2}$

k) $r(x)$: $\sqrt{x} + \sqrt{x + 2} = 3$

81. Hallar el conjunto de verdad de:

$$p(x): \frac{x - 2}{\sqrt{2x - 7}} = \sqrt{x - 4}$$

82. Hallar el valor de k para que el conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $kx^2 + 3x + 1 = 0$ tenga solución única.

83. Si un cuerpo recorre la mitad de la distancia total de caída libre durante el último segundo de su movimiento, a partir del reposo, calcular el tiempo y la altura desde la cual cae. (Sugerencia: use la ecuación cuadrática del tiempo $y = v_0 t + gt^2$).

84. Un ciclista acelera a $4m/seg^2$ para un cierto punto a $3m/seg$. Calcular el tiempo necesario para que el ciclista esté a 20 metros del punto. (Sugerencia: use la ecuación cuadrática del tiempo)

2.9 Inecuaciones

85. Dado el predicado $p(x)$: $||x - 1| + 1| \leq 0$, y sea x elemento de los $\mathbb{R}$, entonces $N(Ap(x)) = 0$.

a) Verdadero b) Falso

86. Si $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|x - a| < \delta$, entonces $Ap(x) = (a - \delta, a + \delta)$.

a) Verdadero b) Falso

87. Si $Re = \mathbb{R}$, $p(x)$: $7x^2 < 3x$ y $q(x)$: $\frac{|2 - x|}{x^2 + 1} \geq 0$, entonces $A(p(x) \wedge q(x))$ es:

a) $\varnothing$ b) $\mathbb{R}$ c) $(0, 3/7)$ d) $[0, 3/7]$ e) $(0, 1)$

88. Si se tienen los predicados $p(x)$: $|7x + 4| \leq 10$ y $q(x)$: $x^2 - 6x < -9$, y x es elemento de los $\mathbb{R}$, entonces es verdad que:

a) $A[p(x) \wedge q(x)] = \varnothing$

b) $A[p(x) \wedge q(x)] = \left(-2, \frac{6}{7}\right)$

c) $A[p(x) \wedge q(x)] = \left[-2, \frac{6}{7}\right]$

d) $A[p(x) \wedge q(x)] = \left[-\frac{6}{7}, 3\right)$

e) $A[p(x) \wedge q(x)] = [-2, 3)$

89. Los valores reales de x que satisfacen la inecuación $1 - x \geq 2x + 6$, son:

a) $x \geq -\frac{5}{3}$ b) $x \leq \frac{5}{3}$ c) $x \geq \frac{2}{3}$ d) $x \leq -\frac{5}{3}$ e) $(0, +\infty)$

90. Si $Re = \mathbb{N}$ y $p(n)$: $|2n - 5| \leq 7$, entonces es verdad que:

a) $Ap(n)$ tiene 8 elementos.
b) La suma de los elementos de $Ap(n)$ es 20.
c) $Ap(n) = [-1, 6]$
d) $Ap(n)$ tiene 6 elementos.
e) No es posible determinar la cantidad de elementos que tiene $Ap(n)$.

91. Escribir el conjunto de los números reales no negativos como un intervalo.

92. Expresar los siguientes conjuntos como una operación de intervalos:

a) $(x \leq 14) \wedge (x > 2)$

b) $[(x \leq -3) \wedge (x > 2)] \vee [(x \geq 3) \wedge (x \leq 5)]$

93. Resolver las siguientes inecuaciones, considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $5(x-1) - x(7-x) > x^2$

b) $|2x+4| < 10$

c) $\left|\frac{x-3}{x-4}\right| < \frac{5}{2}$

d) $\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x+2} > 1$

e) $|x-1| \geq \frac{x+1}{2}$

f) $\frac{3x}{2} + 3|x-2| \leq 3$

94. Determine el conjunto de verdad de las siguientes desigualdades, considere $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $2 + 4x < 6x + 7$

b) $q(x)$: $2 < 2x - 2 \leq 12$

c) $r(x)$: $8 - 3x \leq 2x - 7 < x - 13$

d) $m(x)$: $\frac{8}{x} \geq 3$

e) $p(x)$: $\frac{2x}{x-4} \leq 8$

f) $n(x)$: $2x^3 - 5x^2 + 2x \leq 0$

g) $p(x)$: $\frac{x^2 - 3x - 18}{13x - x^2 - 42} \geq 0$

h) $q(x)$: $\frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 1} \leq 1$

95. Demostrar que si $a \geq 0 \wedge b \geq 0$, entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (desigualdad de Cauchy).

96. Demostrar que si $ab > 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

97. Demostrar que: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c$$

98. Demostrar que si $a + b + c \geq 0$, entonces $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

99. Demostrar que si $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$, entonces:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

100. Demostrar que si $a \geq 0$; $b \geq 0$; $c \geq 0$ y $d \geq 0$, entonces:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

2.10 Inducción matemática

101. Demostrar que: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

102. Considere $n \in \mathbb{N}$. Empleando inducción matemática:

a) Demostrar que $2^{2n} + 5$ es divisible por 3.

b) Demostrar que $2^{2n} + 3n - 1$ es divisible por 3.

c) Demostrar que $a^n - b^n$ es divisible por $(a - b)$.

d) Demostrar que $a^{2n} - 1$ es divisible por $(a + 1)$.

e) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$; $r \neq 1$

f) $a_1 + [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + \ldots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d] = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

103. Demostrar por inducción matemática que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es:

$$S = \pi(n-2),\ n \geq 3$$

104. Demostrar que: $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$.

105. Demostrar que: $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2(2^n - 1)$.

106. Demostrar que: $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

107. Demostrar que: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

108. Demostrar que: $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$.

109. Demostrar que: $k + k^2 + k^3 + ... + k^n = \frac{k}{k-1}(k^n - 1)$; $k \neq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$.

2.11 Técnicas de Conteo

110. La cantidad de números de 2 dígitos que pueden formarse a partir de los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$, si no se ha de repetir dígito alguno en un número, es 20.

a) Verdadero b) Falso

111. ¿De cuántas maneras pueden 5 personas tomar asiento en un automóvil, si 2 han de viajar en el asiento delantero y 3 en el asiento posterior, dado que 2 personas determinadas no han de viajar en la posición del conductor?

112. Cuántas permutaciones se pueden hacer con las letras de la palabra MONDAY si:
a) 4 letras son usadas al mismo tiempo.
b) Se usan todas las letras.
c) Se usan todas las letras eligiendo una vocal para la primera posición.

113. De cuántas maneras puede elegirse un comité de entre 18 personas si el comité debe tener:

a) 3 miembros. b) 14 miembros.

114. De cuántas maneras pueden 7 maestros de matemáticas ser empleados en la ESPOL de entre 10 catedráticos varones y 7 catedráticas mujeres si:

a) 3 han de ser hombres. b) 3 ó 4 han de ser hombres.

115. Si un hospital cuenta con 21 cirujanos, entonces una guardia de tres cirujanos se puede seleccionar de:

a) 1300 maneras diferentes.
b) 300 maneras diferentes.
c) 1000 maneras diferentes.
d) 330 maneras diferentes.
e) 1330 maneras diferentes.

2.12 Teorema del binomio

116. Si en el desarrollo del binomio $(x+k)^5$ el coeficiente de x^2 es 80, entonces el valor de k es:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3

117. Escribir en cada literal el desarrollo del binomio indicado:

a) $(1-2a)^3$ b) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^5$

118. Encontrar el séptimo término del desarrollo de $\left(\frac{1}{2}u-2v\right)^{10}$.

119. Encontrar el término medio en el desarrollo de $\left(2x+\frac{3}{y}\right)^6$.

120. Encontrar el término que no contiene x en el desarrollo de $\left(6x-\frac{1}{2x}\right)^{10}$.

121. ¿Cuál es el coeficiente del término en x del desarrollo de $\left(x^2+\frac{3}{x^3}\right)^7$? ¿Existen términos en x? Justifique su respuesta.

122. Hallar el término independiente de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

123. Hallar el término que contiene x^{10} en el desarrollo de $(5+2x^2)^7$.

124. El término del desarrollo de $\left(x^2+\frac{y}{x}\right)^5$ que contiene x^3 es:

a) 21
b) 30
c) -12
d) 72
e) No existe tal término.

2.13 Sucesiones

125. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es 168. El primer término es 30 y la diferencia es -2. Determinar:

a) Los posibles valores de n.

b) Los posibles valores de a_n.

126. Los primeros 10 términos de una progresión aritmética suman 35 y el primer término es 10, entonces el décimo término es:

a) -5
b) 2
c) -1
d) 10
e) -3

127. Al sumar un número natural n con el doble de su sucesor, se obtiene 44; entonces, el número $n + 3$ es:

a) 14
b) 11
c) 17
d) 13
e) 16

128. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:

a) $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050$

b) $\dfrac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}} = \dfrac{11}{21}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, n! = n(n-1)!$

e) $2\binom{1000}{2} = 1000$

129. Sea una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la suma de los tres primeros términos es 86, entonces es verdad que:

a) La media geométrica de los tres primeros números es $-\dfrac{1}{2}$.

b) Hay un solo valor posible de la razón (r).

c) La suma de los valores de r es -1.

d) La suma de los valores de r es 13.

e) La suma de los valores de r es -13.

130. En cada uno de los siguientes literales, indicar si la sucesión dada es una progresión aritmética o geométrica. En cada caso, determinar la diferencia o la razón.

a) $f(n) = (-1)^n$

b) $f(n) = \frac{1}{3^n}$

c) $f(n) = \frac{1}{n^2}$

d) $f(n) = \frac{1}{n!}$

131. El valor de $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$ es:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $2^{\frac{31}{32}}$ d) $2^{\frac{5}{2}}$ e) $2^{\frac{5}{32}}$

132. En cada literal, indicar una regla de correspondencia que defina la sucesión. Por ejemplo, para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, ...$ una regla de correspondencia es $f(n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

a) $\frac{1}{1001}, \frac{1}{2001}, \frac{1}{3001}$ b) $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}$

133. Hallar $f(4)$, $f(6)$ y $f(11)$ de una progresión geométrica si $f(1) = 3$ y $r = 2$.

134. Hallar $f(3)$ de una progresión geométrica compuesta de números reales, si $f(5) = 162$ y $f(8) = 4\ 372$.

135. En una progresión geométrica compuesta de números reales, hallar P_{10} si se conoce que $P_3 = 9$ y $P_6 = -63$.

136. Un hombre jugó durante 10 días y cada día ganó $\frac{1}{2}$ de lo que ganó el día anterior. Si el décimo día ganó $\$10$, ¿cuánto ganó el primer día?

137. Un hombre que ahorra $\frac{2}{5}$ de lo que ahorró el año anterior, ahorró el décimo año $\$150$. ¿Cuánto ha ahorrado en los 10 años?

138. Representar con una fracción simplificada los siguientes números decimales:

a) $0.675675675...$
b) $3.4738247382...$
c) $0.3754337543...$
d) $12.213333213333...$

139. Una progresión geométrica tiene todos sus términos positivos. La suma de los dos primeros términos es 15 y la suma de los infinitos términos de la sucesión tiende a 27. Hallar el valor de:

a) La razón común.
b) El primer término.

140. Un individuo está de acuerdo en pagar una deuda libre de interés de $\$5\ 800$ en cierto número de pagos, cada uno de ellos (empezando por el segundo) debiendo exceder al anterior por $\$20$. Si el primer pago es de $\$100$, calcular:

a) Cuántos pagos deberá efectuar con objeto de finiquitar la deuda.
b) Cuánto cancela en el último pago.

141. Considerar el préstamo del banco al Sr. Dorado por $\$5\ 000$ a un interés mensual del 2%. Cada mes paga $\$200$ al capital más el interés mensual del balance pendiente. Calcular:

a) El número de pagos.
b) El último pago.
c) El monto total pagado.
d) El interés cancelado.

142. Una empresa instala una máquina con un costo de $\$1\ 700$. El valor de la máquina se depreció anualmente en $\$150$ y su valor de desecho es de $\$200$. ¿Cuál es la vida útil de la máquina?

143. Una compañía manufacturera instaló una máquina a un costo de $\$1\ 500$, al cabo de nueve años la máquina tiene un valor de $\$420$. Suponiendo que la depreciación anual es constante, calcule la depreciación anual.

144. Si una máquina tiene un costo de $\$2\ 000$ y ésta se deprecia anualmente $\$160$, ¿cuál es la duración de la máquina (vida útil) si su valor de desecho fue de $\$400$?

145. Los pagos mensuales del Sr. Piedra al banco, ocasionados por un préstamo forman una progresión aritmética. Si el octavo y décimo quintos pagos son de $\$153$ y $\$181$, respectivamente, hallar:

a) La diferencia.
b) El primer pago.
c) El vigésimo pago.

146. En el ejercicio anterior, suponga que el Sr. Piedra pagó un total de $\$5\,490$ al banco.

a) Calcule el número de pagos que efectuó al banco.
b) ¿De cuánto fue su último pago?

147. Debe saldarse una deuda de $\$1\,800$ en un año, efectuando un pago de $\$150$ al término de cada mes, más el interés a una tasa del 1% mensual sobre el balance restante. Hallar:

a) El valor del primer pago.
b) El valor del último pago.
c) Cuánto paga en total.
d) Cuánto paga por concepto de intereses.

148. ¿Cuántos términos de la sucesión $9, 12, 15,...$ es necesario considerar, de modo que su suma sea 306?

149. ¿Cuántos términos de la sucesión $-12, -7, -2, 3, 8,...$ deben sumarse, de tal manera que la suma sea 105?

150. Si Luisa compra 50 libros, donde el precio por libro es: $\$8$ el primer libro, $\$11$ el segundo libro, $\$14$ el tercer libro; y de esta manera el costo de cada libro es $\$3$ más que el precio del libro anterior, entonces Luisa pagó por los 50 libros:

a) $\$3000$
b) $\$2935$
c) $\$3700$
d) $\$4075$
e) $\$3075$

151. La suma de todos los números de tres cifras que son múltiplos de 7 es:

a) 70000
b) 60000
c) 70300
d) 60360
e) 70336



Capítulo 3
Funciones de una Variable Real

Introducción

Es posible que la idea central en matemáticas sea el concepto de función. Al parecer, esta palabra fue introducida por Descartes en 1637. Para él, una función significaba tan sólo cualquier potencia entera positiva de una variable x. Leonard Euler identificaba cualquier ecuación o fórmula que contuviera variables y constantes, con la palabra función; esta idea es similar a la utilizada ahora en los cursos precedentes al de cálculo. Posteriormente, el uso de funciones en el estudio de las ecuaciones sobre el flujo de calor, condujo a una definición muy amplia gracias a Dirichlet, la cual describe a una función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos, definición que ya utilizamos en el primer capítulo de este libro y que ahora ampliaremos al conjunto de los números reales.

3.1 Funciones de variable real

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras el concepto de función de variable real y los elementos que constituyen su regla de correspondencia.
* Dada una expresión que relaciona dos números reales, encontrar un conjunto de partida que convierta la relación en función.
* Dada la regla de correspondencia de una función de variable real, identificar su rango.

El concepto de función aparece con frecuencia en el estudio de álgebra, trigonometría y geometría analítica. En los cursos de cálculo ocupa un lugar central, ya que nos permite conocer el comportamiento de cualquier función y facilita su graficación.

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, el ingreso I que resulta de la venta de x artículos vendidos a $5 cada uno, es $I = 5x$. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular el ingreso I. Esto es un ejemplo de función. En nuestra vida diaria, también encontramos ejemplos de funciones: el valor facturado por consumo de energía eléctrica que depende del número de kilovatios consumidos durante un mes; el valor de una casa que básicamente depende del terreno que ocupa en metros cuadrados; la estatura en centímetros de una persona que depende de su edad; un courier establece el costo por envío de encomiendas en base a su peso en kilogramos.

Definición 3.1 (Función de una variable real)

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, subconjuntos de los números reales. Una función de variable real de X en Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. Esto se representa simbólicamente por:

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

A la variable x se le llama variable independiente y a la variable y se la conoce como variable dependiente.

La definición de función asegura que no pueden existir dos valores diferentes de y (variable dependiente) para un mismo valor de x (variable independiente). A la variable x de una función a veces se la denomina **argumento** de la función. Pensar en la variable independiente como un argumento, en ocasiones facilita la aplicación de la regla de correspondencia de la función.

De acuerdo a las definiciones dadas en el capítulo 1 de este libro, todos los elementos del conjunto de partida X deben estar relacionados con algún elemento de Y. Tanto X como Y pueden ser el conjunto de los números reales o un subconjunto del mismo.

Cualquier símbolo puede ser utilizado para representar las variables independiente y dependiente. Por ejemplo, si f es la función cúbica, entonces puede ser definida por $f(x) = x^3$, $f(t) = t^3$ o $f(z) = z^3$. Las tres reglas de correspondencia son idénticas: cada una indica que debemos obtener el cubo de la variable independiente.

El conjunto de partida de una función puede presentar restricciones físicas o geométricas. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ está definida para todos los números reales, sin embargo, si f es utilizada como la regla de correspondencia para obtener el área de la superficie de un cuadrado, conociendo la longitud x de su lado, debemos restringir el valor x solamente para los números reales positivos, ya que la medida de la longitud de un lado no puede ser negativa.

Definición 3.2 (Dominio de una función de variable real)

Sea f una función de variable real f: $X \to Y$. El conjunto X para el cual se encuentra definida, constituye el dominio de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por $dom\, f$.

Se puede expresar el dominio de una función mediante la notación de intervalos, la notación de conjuntos, o con palabras, según sea lo más conveniente.

Se dijo anteriormente que el dominio de una función lo constituyen los valores posibles de x, estos valores serán aquellos para los cuales la expresión $y = f(x)$ esté definida en los reales. A partir de esto, podemos anotar lo siguiente:

- Si $f(x)$ contiene un cociente, este no existe si el denominador se hace cero, por lo que se deben excluir del dominio aquellos valores de x que provocan esta situación.
- Si $f(x)$ contiene una raíz de índice par, esta existirá sólo si el radicando es positivo o cero.

Existen otras restricciones que se aplican a funciones de variable real, las cuales se irán analizando en secciones posteriores.

Dada la regla de correspondencia de una función, encontrar su dominio constituye una actividad que se reduce a manipulación de expresiones algebraicas.

Ejemplo 3.1 Dominio de una función de variable real.

Determinar el dominio de la función $f(x) = 3x + 2$.

Solución:

Resulta evidente que la regla de correspondencia dada no presenta restricción alguna.

Por lo tanto, $dom\, f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2 Dominio de una función de variable real.

Determinar el dominio de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

Solución:

El cociente $\frac{2x+1}{x-3}$ está definido cuando $x - 3 \neq 0$, es decir, cuando $x \neq 3$.

Por lo tanto, $dom\, f = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Ejemplo 3.3 Dominio de una función de variable real.

Determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Solución:

El radical $\sqrt{x^2 - 4}$ está definido cuando $x^2 - 4 \geq 0$, es decir, cuando $|x| \geq 2$.

Por lo tanto, $dom\, f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Ejemplo 3.4 Dominio de una función de variable real.

Determinar el dominio de la función $f(x) = \frac{3}{\sqrt{|x-1| - 2}}$.

Solución:

Como el radical está en el denominador, la expresión $|x-1| - 2$ solamente puede ser positiva y no puede tomar el valor de cero.

$|x-1| - 2 > 0$
$|x-1| > 2$
$(x - 1 > 2) \vee (x - 1 < -2)$
$(x > 3) \vee (x < -1)$

Por lo tanto, $dom\, f = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Como podemos observar, una función se puede expresar mediante una regla de correspondencia que permita calcular las imágenes de los elementos del dominio. Estos valores calculados y definidos en el conjunto de llegada de la función, conforman su rango.

Definición 3.3 (Rango de una función de variable real)

Sea f una función de variable real f: X → Y, el conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio, constituye el rango de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por $rg\, f$.

Un procedimiento para obtener la imagen de una función $y = f(x)$, es el siguiente:

- Despejar algebraicamente la variable x en la función.
- El rango será el conjunto de valores que puede tomar la variable y, una vez despejada la variable x.

Ejemplo 3.5 Rango de una función de variable real.

Determinar el rango de la función $f(x) = 2x - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

Siguiendo el procedimiento antes descrito, tenemos:

$$y = 2x - 3$$

$$x = \frac{y+3}{2}$$

Resulta evidente que para todo valor de y, existe un valor de x.

Por lo tanto, $rg\,f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.6 Rango de una función de variable real.

Determinar el rango de la función $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

Solución:

$y = \frac{x+1}{x}$ Reemplazamos $f(x)$ por y.

$xy = x + 1$ Multiplicamos ambos miembros por x.

$x(y - 1) = 1$ Factorizamos.

$x = \frac{1}{y-1}$ Despejamos x.

El cociente $\frac{1}{y-1}$ está definido cuando $y - 1 \neq 0$, es decir, cuando $y \neq 1$.

Por lo tanto, $rg\,f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ejemplo 3.7 Rango de una función de variable real.

Determinar el rango de la función $f(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

$y = x^2 + 1$ Reemplazamos $f(x)$ por y.
$x^2 = y - 1$ Despejamos x.
$x = \pm\sqrt{y-1}$ Extraemos la raíz cuadrada.

El radical está definido cuando $y - 1 \geq 0$, es decir, cuando $y \geq 1$.

Por lo tanto, $rg\,f = [1, +\infty)$.

En la primera parte de este capítulo, hemos visto que una función se puede expresar verbal o algebraicamente enunciando su regla de correspondencia, aunque también se puede representar numéricamente a través de una tabla de valores, o gráficamente por una figura.

3.2 Representación gráfica de funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una gráfica, reconocer si representa a una función de variable real.
* Dada la gráfica de una función de variable real, identificar su dominio y rango como los intervalos de proyección de la gráfica sobre los ejes X e Y, respectivamente.
* Dada la gráfica de una función de variable real, reconocer sus intersecciones con los ejes coordenados.
* Dada la gráfica de una función de variable real, encontrar elemento(s) del dominio que corresponde(n) a un valor del rango especificado.



René Descartes, matemático francés (1596 - 1650)

Un electrocardiograma es un examen efectuado por un dispositivo que realiza la gráfica de una función en base a los impulsos eléctricos producidos por el corazón de una persona en cada instante de tiempo. Examinando tal gráfica, un médico puede determinar si el corazón de la persona está o no saludable.
De las representaciones gráficas de una función, quizás la más importante es la que se realiza en el plano cartesiano (en honor a Descartes).

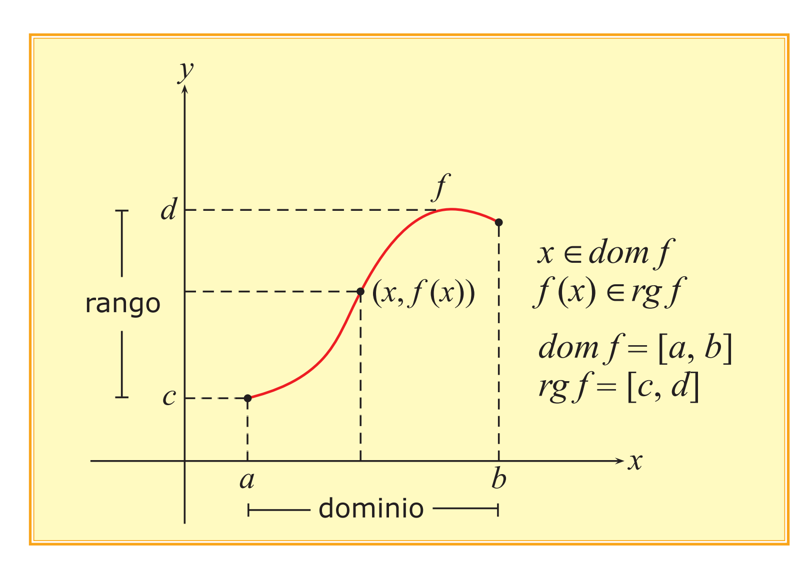


Figura 3.1: Representación gráfica de una función de variable real.

En la mayoría de los casos no es posible representar todos los pares ordenados $(x, f(x))$ que constituyen la función de variable real, puesto que son infinitos. Por lo tanto, para graficar una función se representan unos cuantos puntos significativos y se dibuja el resto de la gráfica de acuerdo a las características de cada función.

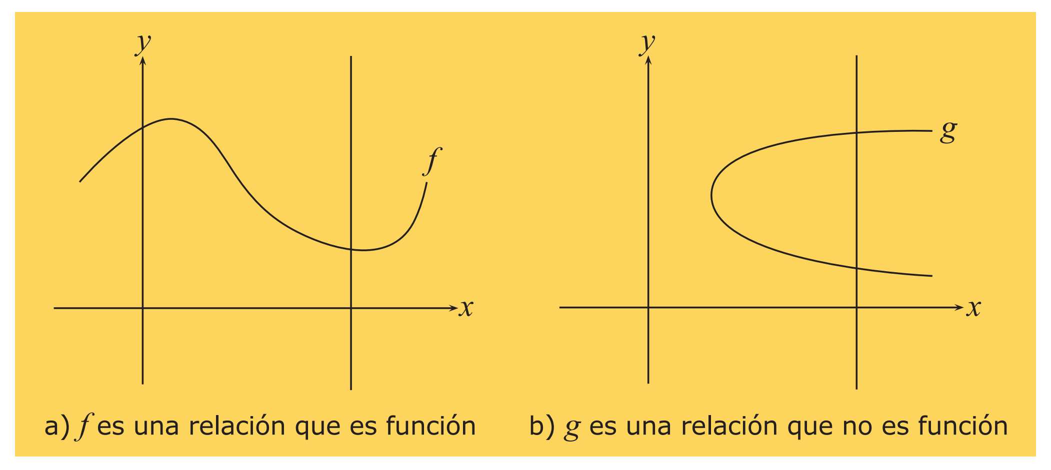
Definición 3.4 (Gráfica de una función de variable real)

Si f es una función de A en B, entonces la gráfica de f es el conjunto de puntos o pares ordenados de A x B, tales que sus coordenadas (x, y) pertenecen a f.

La convención a utilizar es que los elementos del conjunto A se representen sobre una recta real horizontal, y los del conjunto B sobre una recta real vertical. La intersección de estas rectas se conoce como el origen del sistema de graficación y sus coordenadas son $(0, 0)$.

Teorema 3.1 (Criterio de la recta vertical)

Una curva en el plano cartesiano representa una función, si cualquier recta vertical interseca la gráfica, como máximo, en un punto.



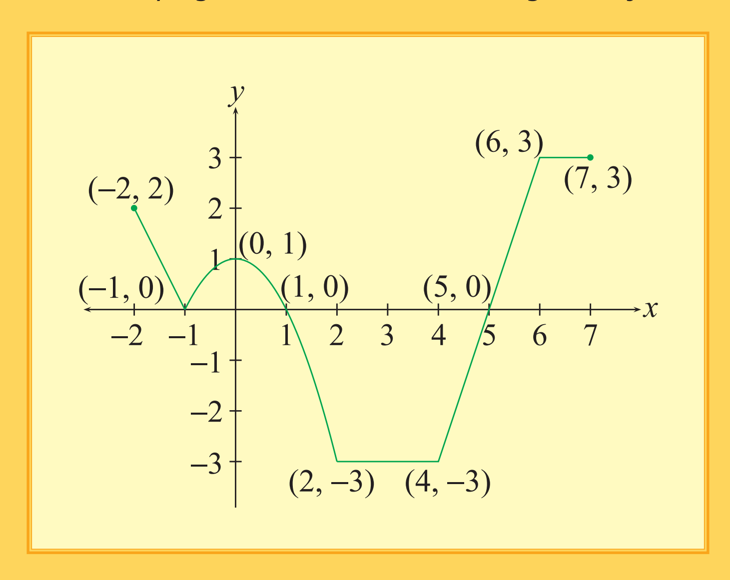
a) f es una relación que es función   b) g es una relación que no es función

Figura 3.2: Criterio de la Recta Vertical.

Utilizando este teorema, es sencillo verificar cuándo una gráfica representa una función y cuándo no lo es. Observe la figura 3.2; de acuerdo al criterio anterior, la relación g no es una función de variable real.

Ejemplo 3.8 Gráfica de una función de variable real.

Sea f la función cuya gráfica está dada en la figura adjunta:



Determine:

- El valor de la función cuando $x = -2$, $x = 2$, $x = 6$.
- El dominio de la función.
- El rango de la función.
- Las intersecciones con los ejes coordenados.

Solución:

- Como $(-2, 2)$ está en la gráfica de f, la ordenada 2 es el valor de f cuando la abcisa toma el valor de -2. Como $(2, -3)$ está en la gráfica de f, la ordenada -3 es el valor de f cuando la abcisa toma el valor de 2. Como $(6, 3)$ está en la gráfica de f, la ordenada 3 es el valor de f cuando la abcisa toma el valor de 6.
- Para determinar el dominio de la función, observamos que todos los puntos en la gráfica de f tienen abcisas entre -2 y 7, inclusive; y para cada número x entre -2 y 7 existe un punto $(x, f(x))$ en la gráfica. Por lo tanto, $dom\ f = \{x/ -2 \leq x \leq 7\}$ o el intervalo $[-2, 7]$.
- Todos los puntos en la gráfica de la función, tienen ordenadas entre -3 y 3, inclusive; y para cada número y existe al menos un número x en el dominio. Por lo tanto, $rg\ f = \{y/ -3 \leq y \leq 3\}$ o el intervalo $[-3, 3]$.
- Las intersecciones con el eje X están dadas por los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$. Por otra parte, la intersección con el eje Y está dada por el punto $(0, 1)$.

Resulta interesante estudiar el comportamiento de las funciones para identificar sus características más relevantes, tales como: unicidad en los elementos del rango, igualdad entre el rango y el conjunto de llegada, intervalos de crecimiento o decrecimiento (monotonía), puntos donde la función no está definida o tiene saltos (discontinuidad), puntos de intersección con los ejes coordenados, simetrías, comportamiento idéntico de funciones en determinados intervalos, valores máximos y/o mínimos, cotas superiores o inferiores, tendencias de valores de la función.

3.3 Tipos de Funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar y definir el concepto de función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, constante, creciente, decreciente, estrictamente creciente, estrictamente decreciente, par, impar, acotada y periódica.
* Dada una función periódica, identificar su período fundamental.
* Dada la gráfica de una función de variable real, reconocer todas las características antes mencionadas.

3.3.1 Funciones Inyectivas

Utilizando la definición dada en el capítulo 1 y la representación gráfica de una función, tenemos que f es inyectiva si para cualquier elección de un número x que pertenece al dominio de f, existe exclusivamente un valor y en el rango. En otras palabras, ningún valor y en el rango es imagen de más de un valor x en el dominio.

Estas funciones también son denominadas **uno a uno**.

Definición 3.5 (Función Inyectiva)

Una función $f: X \rightarrow Y$ es inyectiva, si y sólo si para cualquier elección de números x_1 y x_2, si $x_1 \neq x_2$ en el dominio de f, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in X\ [(x_1 \neq x_2) \rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))]$$

Teorema 3.2 (Criterio de la recta horizontal)

Una curva en el plano cartesiano representa una función inyectiva, si y sólo si cualquier recta horizontal interseca su gráfica, como máximo, en un punto.

La aplicación de este teorema se puede observar en la figura 3.3. En el literal (a), la recta horizontal $y = k$ interseca a la gráfica en dos puntos distintos, (x_1, k) y (x_2, k), con la misma ordenada. Por lo tanto, f no es inyectiva.

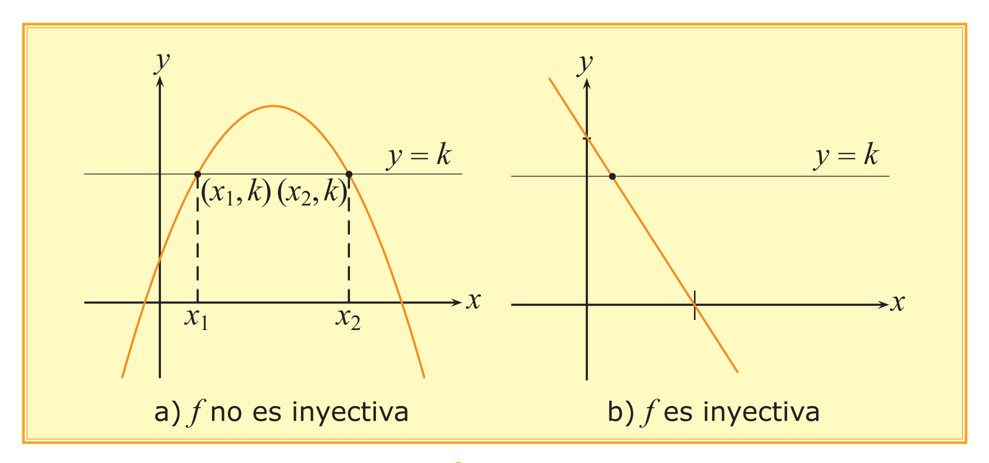


Figura 3.3: Gráficas de Funciones.

Se puede observar también en la figura 3.3 (b) la gráfica de una función inyectiva.

3.3.2 Funciones Sobreyectivas

Utilizando la definición dada en el capítulo 1 y la representación gráfica de una función, tenemos que f es sobreyectiva si todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con por lo menos un elemento del dominio. Por lo tanto, el rango de f debe coincidir con el conjunto de llegada.

Una función puede ser sobreyectiva y no ser inyectiva. Para concluir que una función $f: X \to Y$ es sobreyectiva, se tendrá que conocer el conjunto de llegada Y.

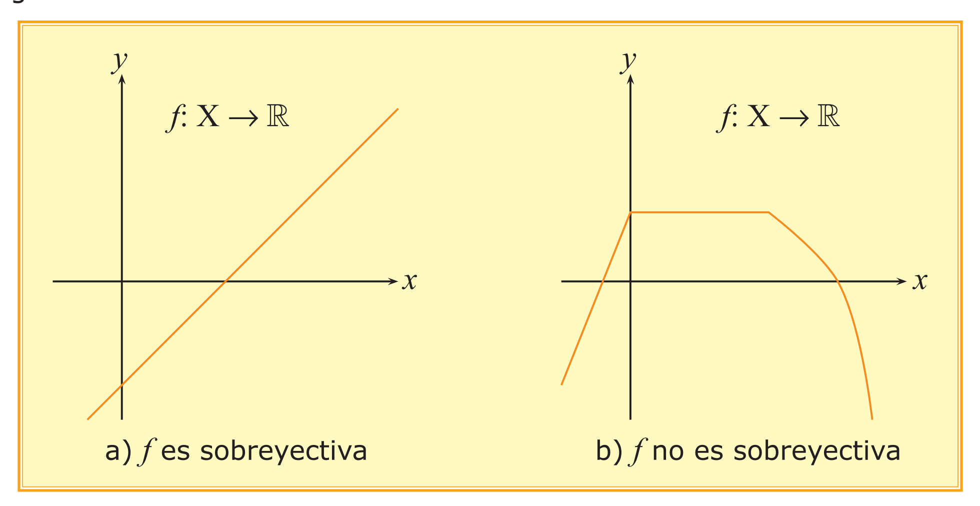


Figura 3.4: Gráficas de Funciones.

La figura 3.4 (a) corresponde a la gráfica de una función sobreyectiva, mientras que la figura 3.4 (b) no lo es.

Definición 3.6 (Función Sobreyectiva)

Una función $f: X \to Y$ es sobreyectiva, si y sólo si todo elemento de Y se encuentra relacionado con algún elemento de X, lo cual se representa por:

$$\forall y \in Y \; \exists \, x \in X \; [y = f(x)]$$

A partir de esta definición, se deduce que si f es sobreyectiva, $rg\, f = Y$.

3.3.3 Funciones Crecientes

Quizás haya escuchado el viejo refrán: "Sólo existen dos cosas seguras en la vida, la muerte y los impuestos". El impuesto a la renta que se debe pagar al Estado ecuatoriano, depende del nivel de ingresos de la persona que tributa. Dicho valor se calcula en base a la siguiente tabla (actualizada a marzo de 2004):

Fracción Básica	Exceso hasta	Impuesto Fracción Básica	% Impuesto Fracción Excedente
—	7,200	—	0%
7,200	14,400	—	5%
14,400	28,800	360	10%
28,800	43,200	1,800	15%
43,200	57,600	3,960	20%
57,600	En adelante	6,840	25%

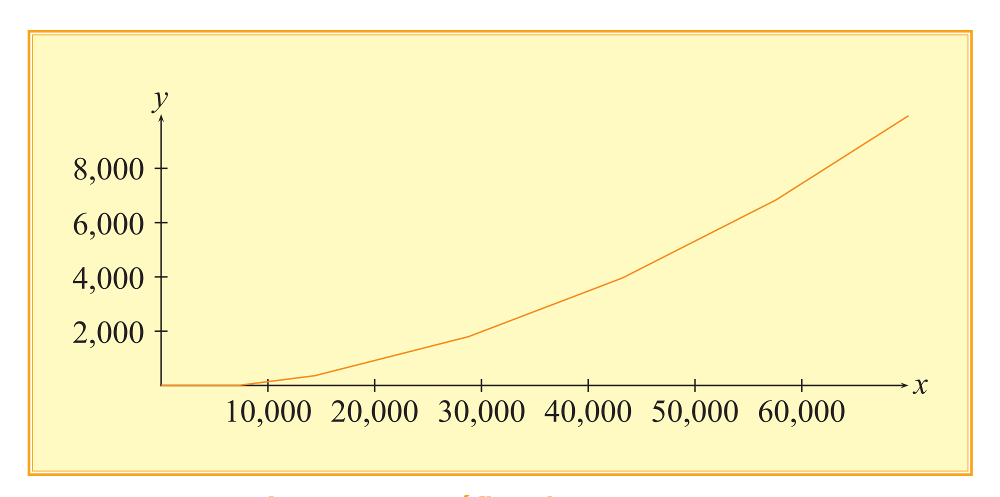


Figura 3.5: Gráfica de Impuestos.

Como se puede observar en la figura 3.5, mientras mayores sean los ingresos (eje horizontal) se debe pagar un porcentaje mayor por el impuesto a la renta (eje vertical), es decir, existe una relación directa de crecimiento entre las variables. Así como este ejemplo, existen otros con similares características.

Definición 3.7 (Función Creciente)

Una función f es creciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in I\,[(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))]$$

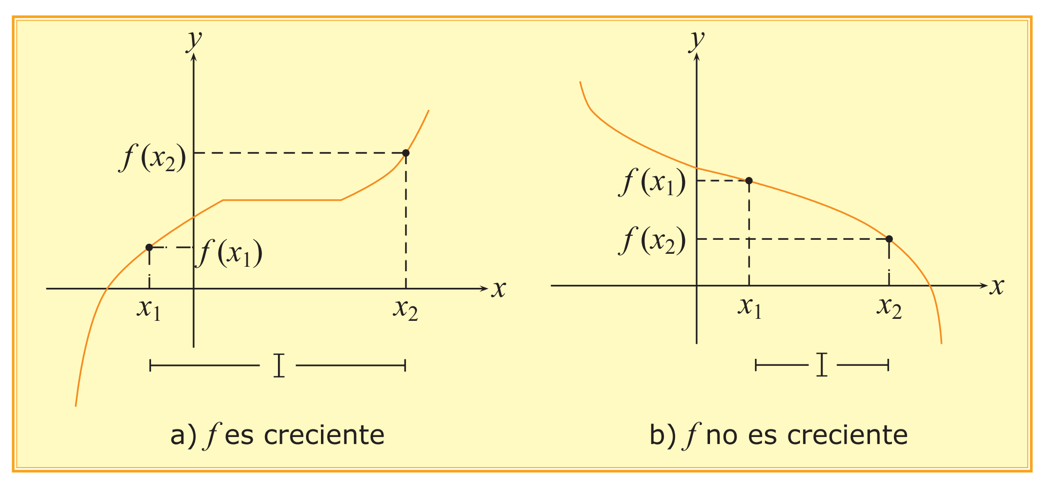


Figura 3.6: Gráficas de Funciones.

Se puede notar en la figura 3.6 (a) que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo $\mathbb{I}$, los valores de $f(x)$ también aumentan o se mantienen iguales. Por otra parte, la gráfica de la figura 3.6 (b) no corresponde a una función creciente, ya que no cumple con la definición dada.

Definición 3.8 (Función Estrictamente Creciente)

Una función f es estrictamente creciente en un intervalo $\mathbb{I}$, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en $\mathbb{I}$, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_2)$. Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I} \, [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))]$$

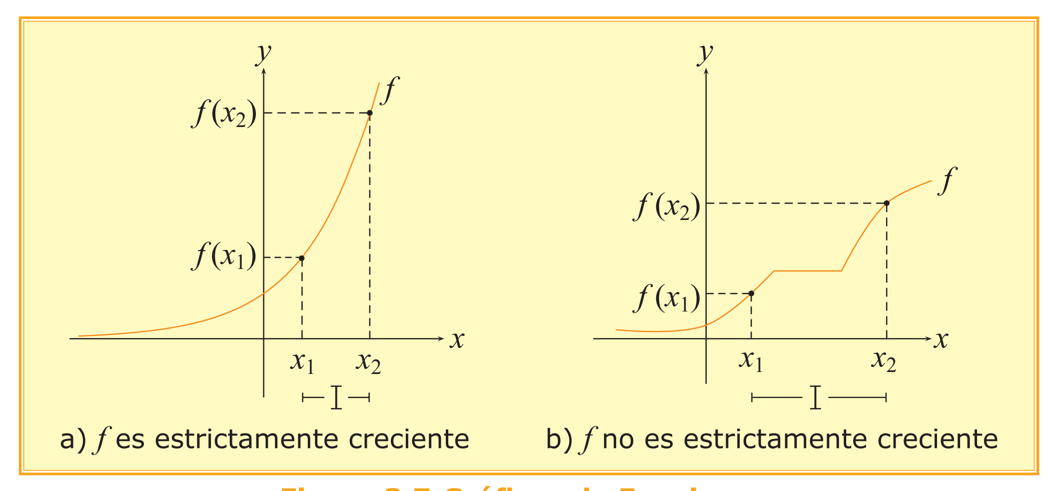


Figura 3.7:Gráficas de Funciones.

En la gráfica de la figura 3.7 (a) se aprecia que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo I, los valores de $f(x)$ únicamente aumentan.

La figura 3.7 (b) nos indica que la función es creciente, pero no estrictamente creciente.

3.3.4 Funciones Decrecientes

En aplicaciones económicas, para cada nivel de precio de un producto, existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante algún período. Por lo general, a mayor precio del producto, la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja, la cantidad demandada aumenta.

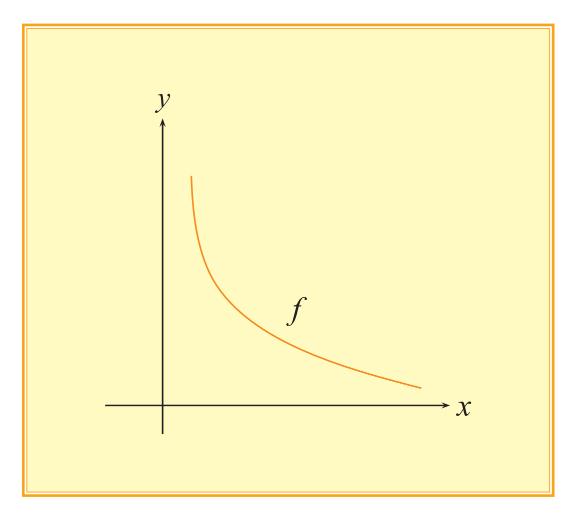


Figura 3.8: Curva de Demanda.

En la figura 3.8, x representa la cantidad demandada por un producto en particular, mientras que y representa el precio por unidad. Casos como estos hacen necesario el estudio de las funciones con características de decrecimiento.

Definición 3.9 (Función Decreciente)

Una función f es decreciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}\ [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))]$$

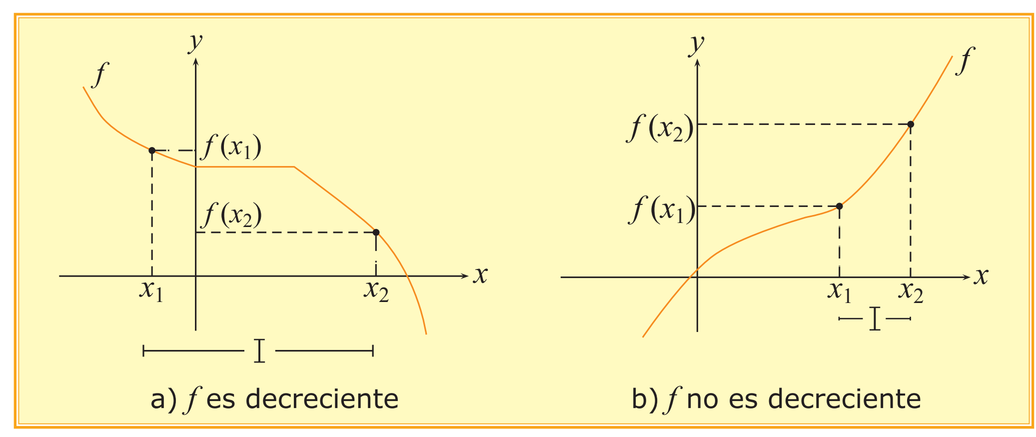


Figura 3.9: Gráficas de Funciones.

Se puede notar en la figura 3.9 (a) que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo $\mathbb{I}$, los valores de $f(x)$ disminuyen o se mantienen iguales, mientras que la gráfica de la figura 3.9 (b) no corresponde a una función decreciente.

Definición 3.10 (Función Estrictamente Decreciente)

Una función f es estrictamente decreciente en un intervalo $\mathbb{I}$, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en $\mathbb{I}$, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) > f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}\ [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) > f(x_2))]$$

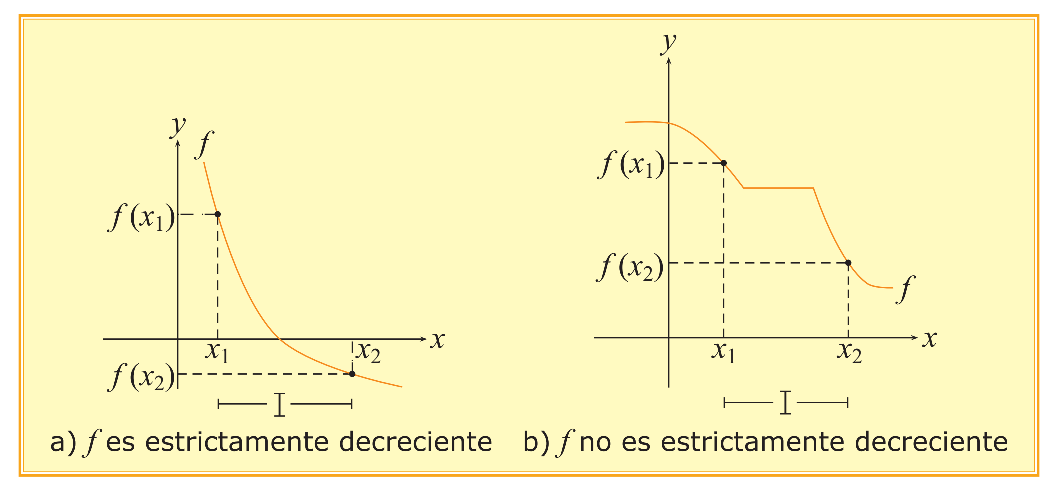


Figura 3.10: Gráficas de Funciones.

En la gráfica de la figura 3.10 (a) se aprecia que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo I, los valores de $f(x)$ únicamente disminuyen.

La figura 3.10 (b) nos indica que la función es decreciente, pero no estrictamente decreciente.

Definición 3.11 (Función Monótona)

Se dice que f es una función monótona en un intervalo I, si y sólo si f es o estrictamente creciente o estrictamente decreciente en ese intervalo.

De acuerdo a esta definición, se puede considerar la monotonía de una función por intervalos, existiendo otros casos en los que las funciones son monótonas en todo su dominio.

3.3.5 Funciones Pares o Impares

Algunas funciones pueden ser simétricas respecto a una recta o a un punto. Si la recta a la cual se hace referencia es el eje Y, tenemos funciones pares; mientras que si el punto al cual se hace referencia es el origen de coordenadas, tenemos funciones impares.

Definición 3.12 (Función Par)

Una función f es par si para todo x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y además, $f(-x) = f(x)$.

$$\forall x \in dom\, f\,[f(-x) = f(x)]$$

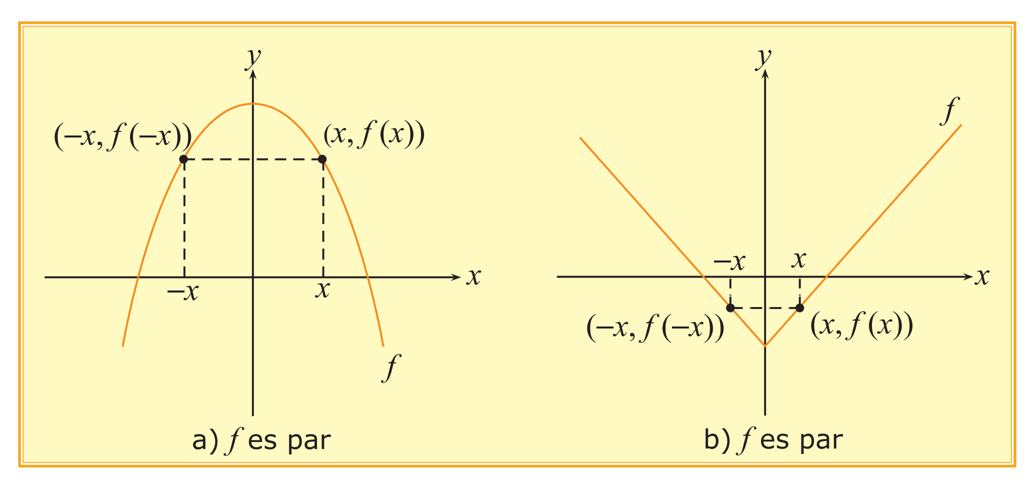


Figura 3.11: Funciones Pares.

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y. En las figuras 3.11 (a) y 3.11 (b) tenemos ejemplos de funciones pares. Observe que en ambos casos $f(-x) = f(x)$.

Definición 3.13 (Función Impar)

Una función f es impar si para todo x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y además, $f(-x) = -f(x)$.

$$\forall x \in dom\, f\, [f(-x) = -f(x)]$$

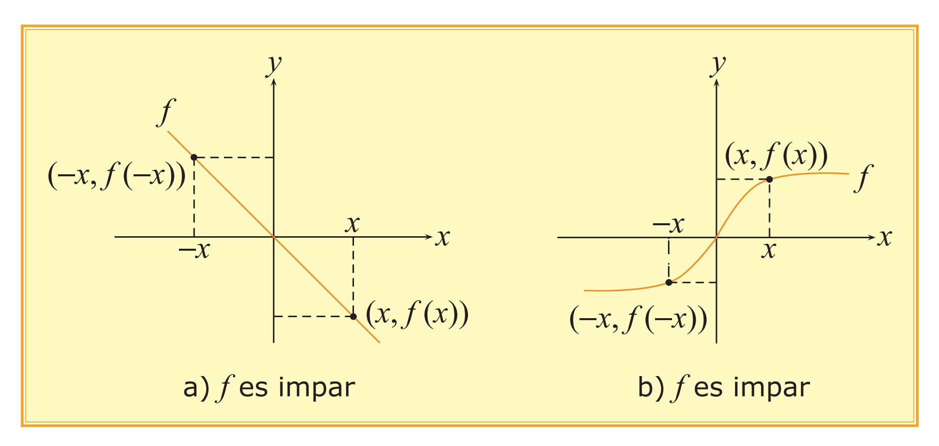


Figura 3.12: Funciones Impares.

Una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas. En las figuras 3.12 (a) y 3.12 (b) tenemos ejemplos de funciones impares. Observe que en ambos casos $f(-x) = -f(x)$.

3.3.6 Funciones Periódicas

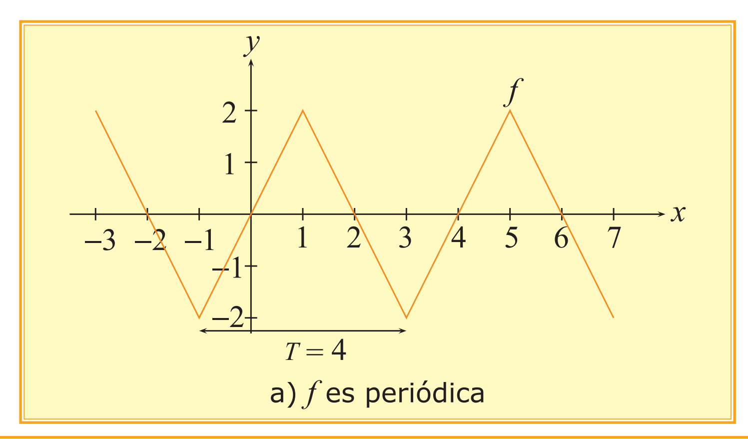
Algunas funciones tienen la característica de repetir los valores de su rango, así como su comportamiento gráfico, cada cierto intervalo de su dominio. Esto constituye la periodicidad de la función.

Definición 3.14 (Función Periódica)

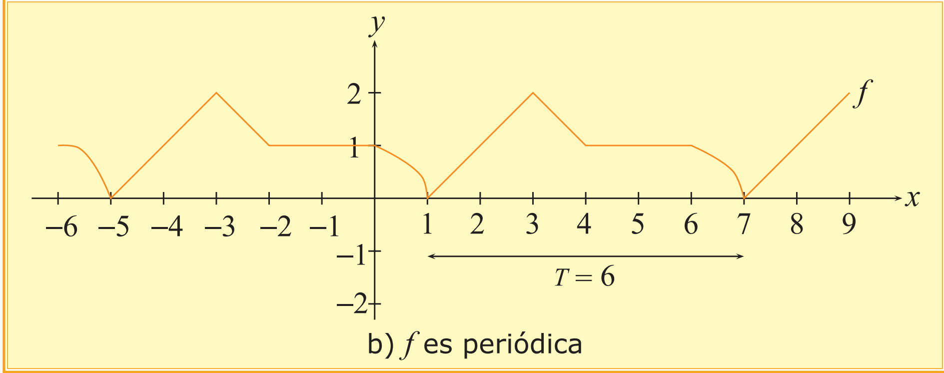
Una función $f(x)$ que cumple la propiedad:

$$\exists T \in \mathbb{R}^+ \forall x \in dom\, f\ [f(x+T) = f(x)]$$

se denomina periódica con período T.



a) f es periódica



b) f es periódica

Figura 3.13: Funciones Periódicas.

Las gráficas de las figuras 3.13 corresponden a funciones periódicas. En la figura 3.13 (a), el período de la función es $T = 4$, aunque también se podría considerar $T = 8$ o $T = 12$. En la figura 3.13 (b), el período de la función es $T = 6$, aunque también se podría considerar $T = 12$ o $T = 18$.

De aquí que el mínimo valor de T que satisfaga la definición de función periódica se conoce como **período fundamental $\boldsymbol{T}$**. En los ejemplos anteriores, el período fundamental de las funciones dadas es 4 y 6, respectivamente.

La función constante es una función periódica, puesto que para cualquier número T, $f(x + T) = f(x)$. Nótese, sin embargo, que esta función carece de período fundamental.

En general, para cualquier función periódica no constante, el período fundamental está definido de modo único y todos los demás períodos son múltiplos de él.

Un ejemplo de función periódica no constante sin período fundamental, lo constituye la función de Dirichlet, definida para todos los reales con regla de correspondencia.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^C \end{cases}$$

3.3.7 Funciones Acotadas

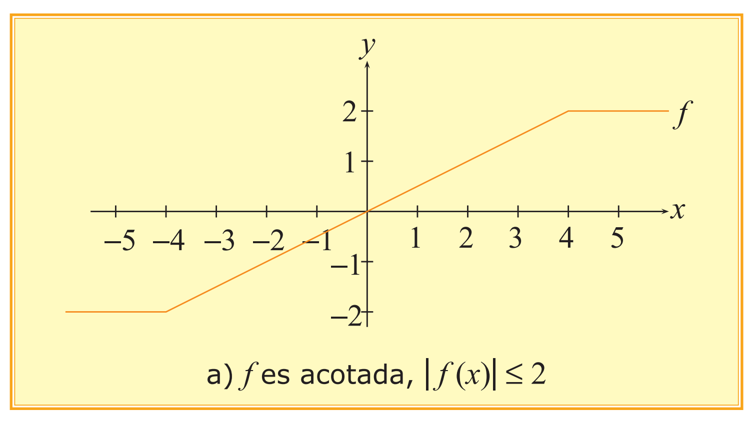
Cuando el rango de una función está contenido en un cierto intervalo limitado, se dice que f es acotada.

Definición 3.15 (Función Acotada)

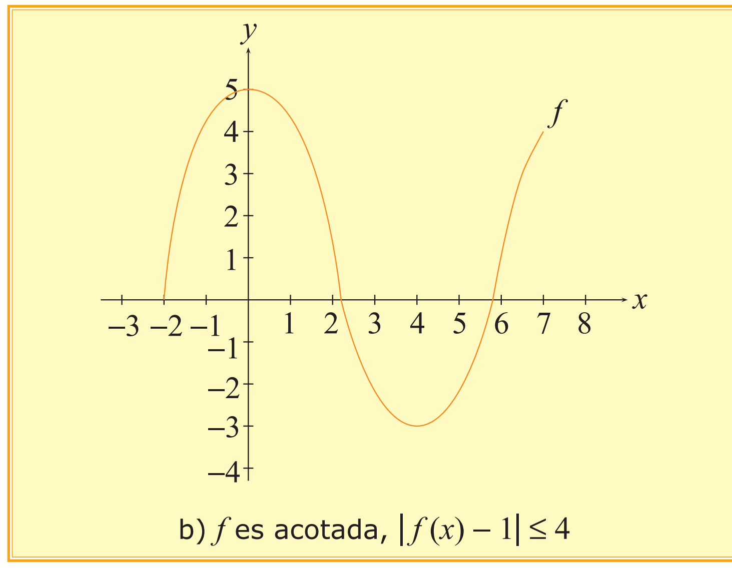
Una función f que tiene la propiedad:

$$\exists \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbb{R}\ \forall x \in dom\, f\, [\mathrm{N} \leq f(x) \leq \mathrm{M}]$$

se dice que es una función acotada, donde M y N son valores reales que se denominan cota superior y cota inferior, respectivamente.



a) f es acotada, $|f(x)| \leq 2$

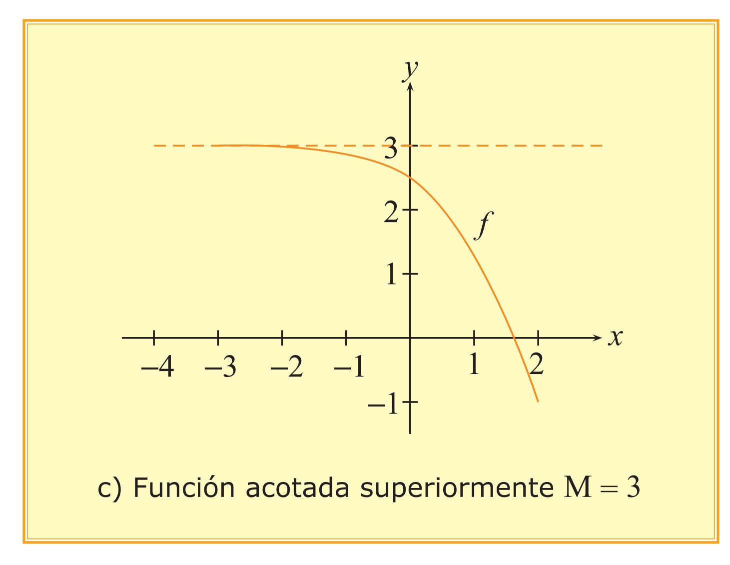


b) f es acotada, $|f(x) - 1| \leq 4$

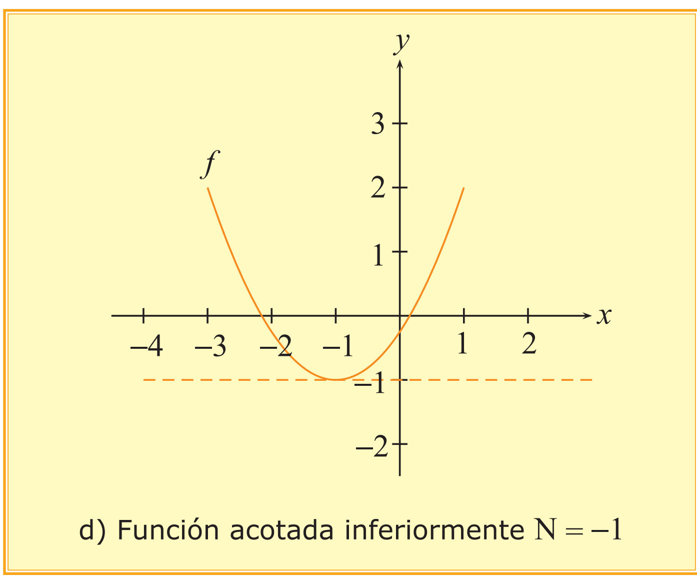
Figura 3.14: Funciones Acotadas.

Las gráficas (a) y (b) de la figura 3.14 corresponden a funciones acotadas. En la figura 3.14 (a), la cota superior de f es $M = 2$ y la cota inferior de f es $N = -2$. En la figura 3.14 (b), la cota superior de f es $M = 5$ y la cota inferior de f es $N = -3$.

Existen funciones que solamente tienen cota superior o cota inferior; en tales casos, se dice que la función es acotada superiormente o acotada inferiormente según corresponda, tal como se lo muestra en las figuras 3.14 (c) y 3.14 (d):



c) Función acotada superiormente $M = 3$



d) Función acotada inferiormente $N = -1$

Figura 3.14: Funciones Acotadas.

Cabe recalcar que las cotas son números reales que no necesariamente deben pertenecer al $rg\, f$.

3.4 Asíntotas de la gráfica de una función de variable real

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar el concepto de asíntota de la gráfica de una función de variable real.
* Dada la gráfica de una función de variable real, reconocer la existencia de sus asíntotas verticales y horizontales.

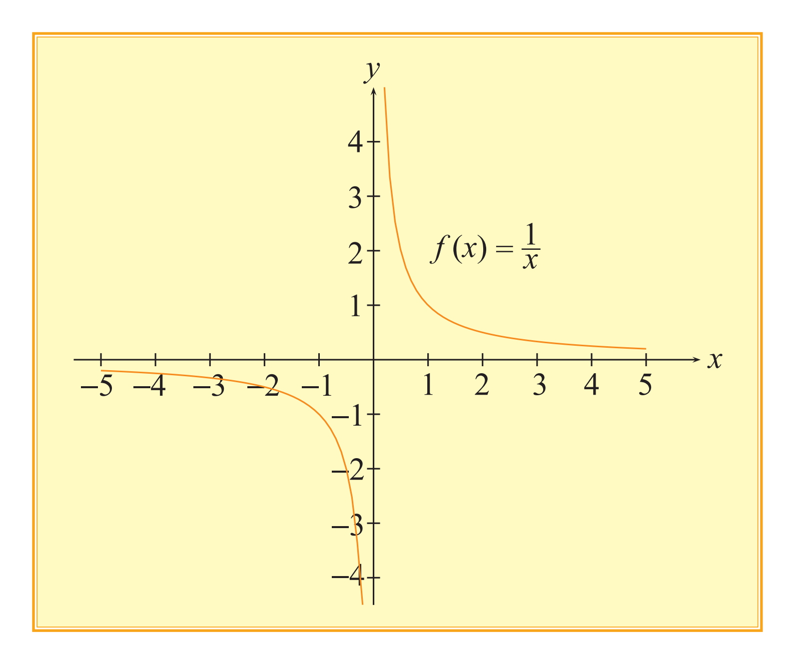


Figura 3.15: Asíntotas de la Gráfica de una Función.

En la figura 3.15, note que conforme x se vuelve "más negativa", esto es, cuando se hace no acotada en la dirección negativa ($x \to -\infty$, se lee "x tiende a menos infinito"), los valores de $f(x)$ tienden a cero. Lo mismo ocurre cuando x se vuelve "más positiva", esto es, cuando se hace no acotada en la dirección positiva ($x \to +\infty$, se lee "x tiende a más infinito"). Por otra parte, cuando $x \to 0$, es decir, en la vecindad de cero, podemos observar que los valores de $f(x)$ tienden a $\pm\infty$.

Estos comportamientos para las gráficas de una función determinan la existencia de asíntotas.

Definición 3.16 (Asíntota horizontal)

Si cuando $x \to -\infty$, o cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ tienden a algún número fijo L, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

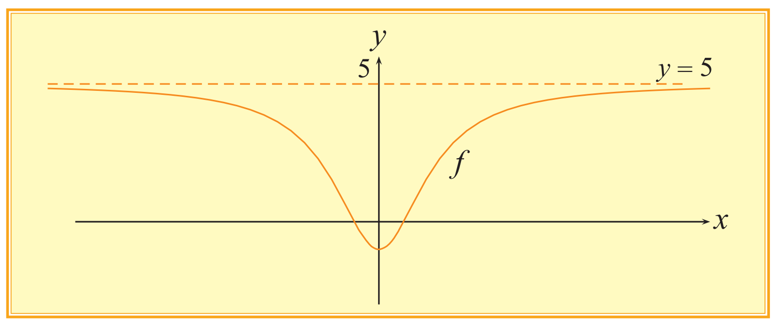


Figura 3.16: Función con Asíntota Horizontal.

En la figura 3.16, se aprecia que la recta $y = 5$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Definición 3.17 (Asíntota vertical)

Si cuando x se aproxima a algún número c, los valores $|f(x)| \to \infty$, entonces la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

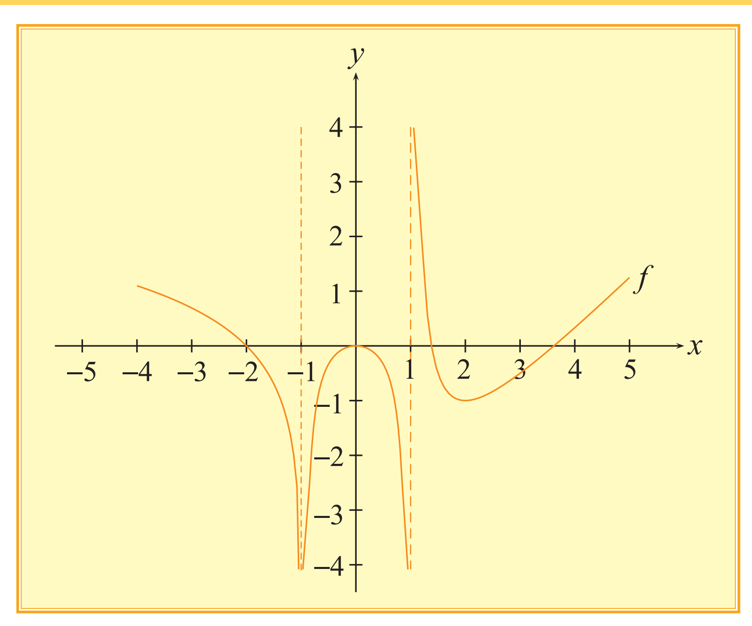


Figura 3.17: Función con Asíntotas Verticales.

En la figura 3.17 se aprecia que las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la gráfica de f.

3.5 Funciones definidas por tramos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada la regla de correspondencia de una función de variable real definida por tramos, identificar los elementos del rango sobre el intervalo respectivo.
* Reconocer gráficamente la continuidad o discontinuidad de funciones definidas por tramos.

Hasta este momento hemos graficado funciones del tipo $y = f(x)$, donde una misma expresión nos describe el comportamiento de la función en todo su dominio. Sin embargo, podemos tener funciones que presenten diferente comportamiento en distintos intervalos de su dominio.

Ejemplo 3.9 Funciones definidas por tramos.

Para la función f:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -2 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Determine:

- $f(-1), f(2)$ y $f(5)$.
- $dom\, f$
- $rg\, f$

Solución:

Para determinar $f(-1)$, la ecuación para f es $f(x) = x - 1$, por lo tanto, $f(-1) = -1 - 1 = -2$.

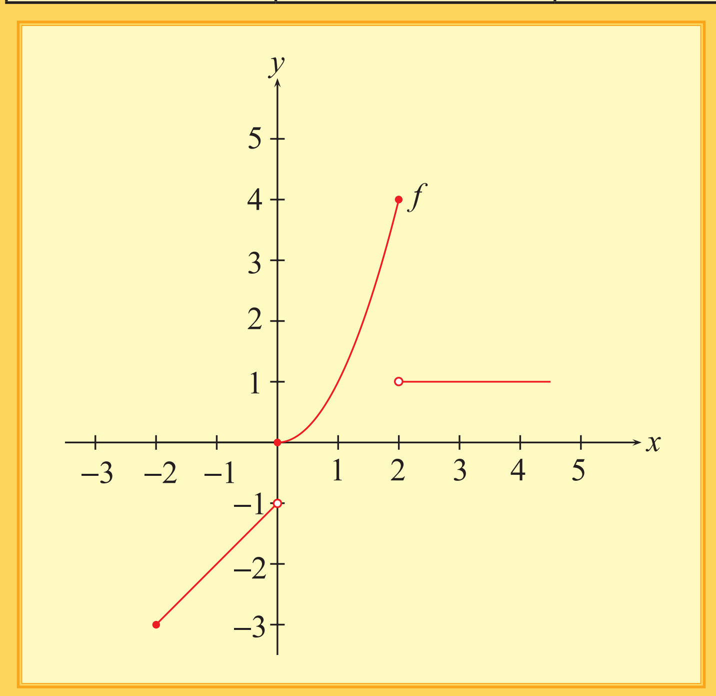
Para determinar $f(2)$, la ecuación para f es $f(x) = x^2$, por lo tanto, $f(2) = 2^2 = 4$.

Para determinar $f(5)$, la ecuación para f es $f(x) = 1$, por lo tanto, $f(5) = 1$.

Para determinar el dominio de f, observamos su definición y concluimos que $dom\ f = \{x/x \geq -2\}$ o $[-2, +\infty)$.

Para determinar el rango de f, podemos hacerlo algebraicamente o gráficamente:

$x \in [-2, 0)$	$x \in [0, 2]$	$x \in (2, +\infty)$
$-2 \leq x < 0$ $-2 - 1 \leq x - 1 < -1$ $-3 \leq f(x) < -1$ $rg\ f = [-3, -1)$	$0 \leq x \leq 2$ $0 \leq x^2 \leq 4$ $0 \leq f(x) \leq 4$ $rg\ f = [0, 4]$	$f(x) = 1$ $rg\ f = \{1\}$



y concluir que $rg\ f = [-3, -1) \cup [0,4]$.

Este ejemplo nos induce al concepto de continuidad de una función de variable real, el cual se definirá con la rigurosidad matemática necesaria en cursos superiores.

Si dibujamos la gráfica de una función f con un lápiz, diremos que f es continua si podemos dibujarla sin tener que levantar el lápiz. Sin embargo, la función es discontinua en un punto, cuando no está definida en él o bien porque en dicho punto hay un salto. En el ejemplo 3.9, se puede notar que f es discontinua en $x = 0$ y en $x = 2$.

Ejemplo 3.10 Aplicación de funciones definidas por tramos.

En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo h (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en grados centígrados) del cultivo. Si esta función está dada por:

$$h = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & , 30 \leq T < 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & , 36 \leq T \leq 39 \end{cases}$$

Determine:

- El intervalo de temperaturas en el cual es válido el comportamiento referido.
- El tiempo en el cual se duplica el cultivo de bacterias a una temperatura de 30°C.

Solución:

Lo que se está pidiendo en primera instancia es el $dom\, h$. Para determinarlo, observamos su definición y concluimos que $dom\ h = \{T / 30 \leq T \leq 39\}$ o $T \in [30, 39]$.

Lo que se está pidiendo en segunda instancia es $h = f(30)$.

Para determinarlo, la ecuación para h es $f(T) = \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}$, por lo tanto, $f(30) = \frac{30}{24} + \frac{11}{4} = \frac{96}{24} = 4$. Esto quiere decir que cuando la temperatura es de 30°C, el cultivo se duplica cuando han transcurrido 4 horas.

3.6 Técnicas de Graficación de Funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada la gráfica de una función de variable real, construir la gráfica de una nueva función aplicando técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión horizontales.

* Dada la gráfica de una función de variable real, construir la gráfica de una nueva función aplicando técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión verticales.
* Dada la gráfica de una función de variable real, construir la gráfica de una nueva función aplicando la definición de valor absoluto sobre la variable del dominio y del rango.

Mediante una gráfica conocida es posible obtener nuevas gráficas que tengan alguna relación con ella. Estas relaciones matemáticamente se las representa mediante sumas o productos de constantes con las variables del dominio y rango de la función original.

El resultado es una nueva gráfica desplazada horizontal o verticalmente respecto a la original, reflejada horizontal o verticalmente o con algún efecto de alargamiento o compresión tanto horizontal como vertical. También es posible que el valor absoluto esté presente sobre una de las variables. Todos estos efectos sobre la gráfica conocida se pueden interpretar de acuerdo a las reglas que se describen a continuación.

Desplazamientos

Pueden darse horizontal o verticalmente, es decir, podemos mover la gráfica de una función hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo.

Dada la regla de correspondencia de f, siendo $c > 0$, se pueden generar las nuevas funciones:

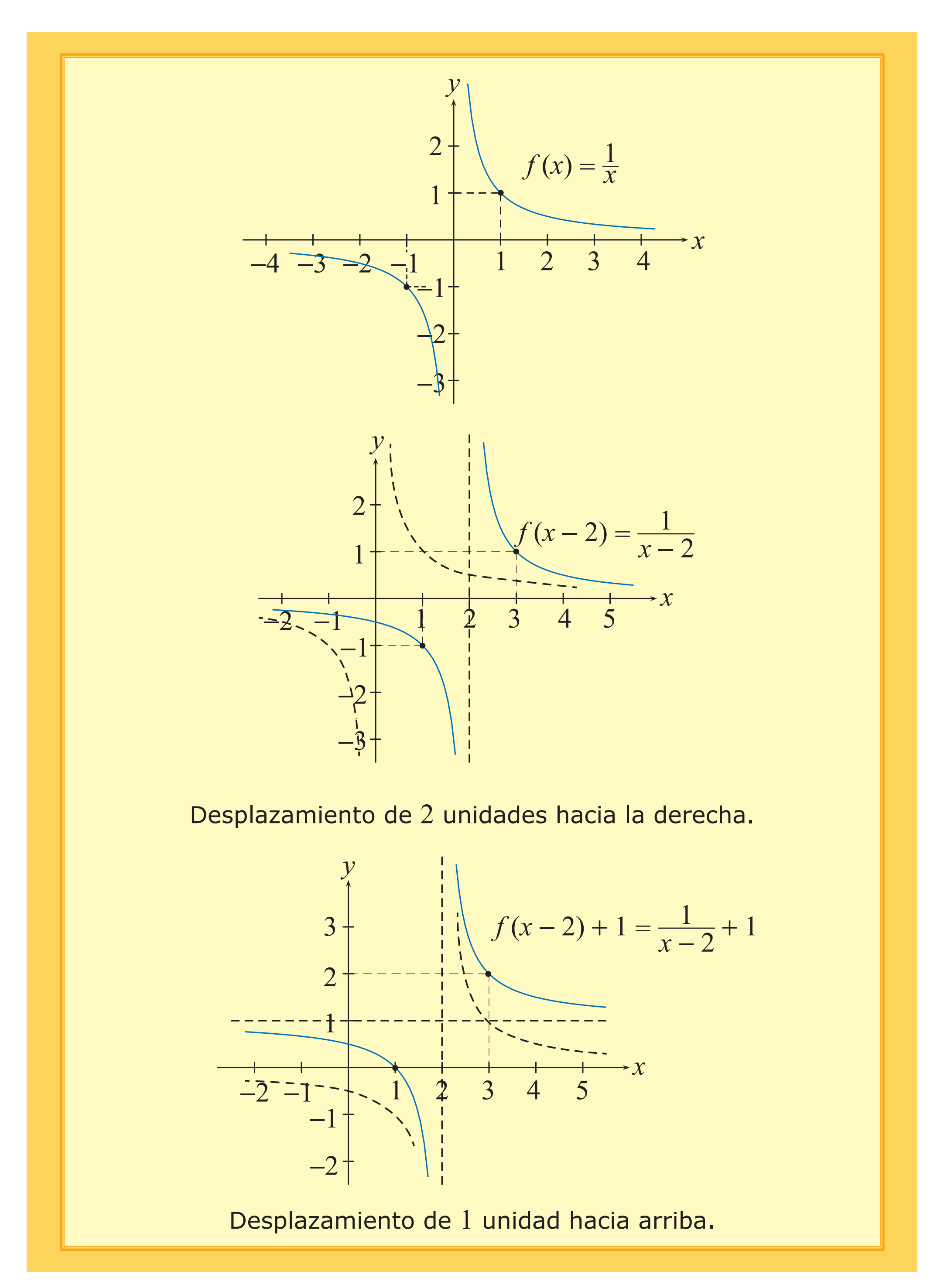
- $y = f(x + c)$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia la izquierda.
- $y = f(x - c)$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia la derecha.
- $y = f(x) + c$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia arriba.
- $y = f(x) - c$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia abajo.

Ejemplo 3.11 Desplazamientos de una función.

Grafique la función $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ indicando sus características.

Solución:

Se puede deducir que la gráfica solicitada proviene de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$. Luego, la nueva función será el resultado de desplazar f dos unidades hacia la derecha y, finalmente, una unidad hacia arriba.



Desplazamiento de 2 unidades hacia la derecha.

Desplazamiento de 1 unidad hacia arriba.

Intersección con el eje X: $(1, 0)$

Intersección con el eje Y: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntota vertical: $x = 2$

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{2\}$. El rango de f es $\mathbb{R} - \{1\}$. La función f es: inyectiva, estrictamente decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y discontinua en $x = 2$.

Reflexiones

Pueden ser con respecto a alguno de los ejes coordenados.

Dada la regla de correspondencia de f, se pueden generar las nuevas funciones:

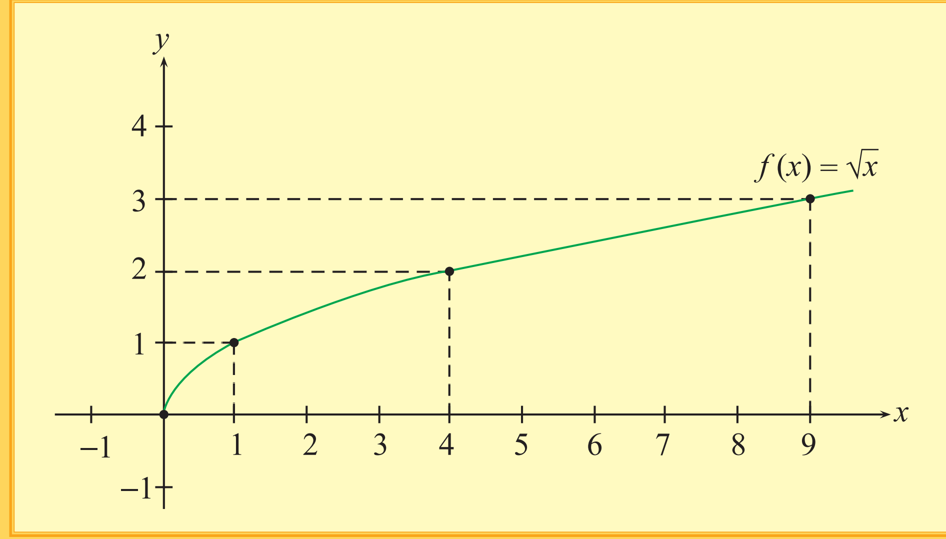
- $y = f(-x)$: reflexión de la gráfica de f con respecto al eje Y.
- $y = -f(x)$: reflexión de la gráfica de f con respecto al eje X.

Ejemplo 3.12 Reflexiones de la gráfica de una función.

A partir de la gráfica de la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, grafique las funciones $g(x) = \sqrt{-x}$ y $h(x) = -\sqrt{x}$, indicando sus características.

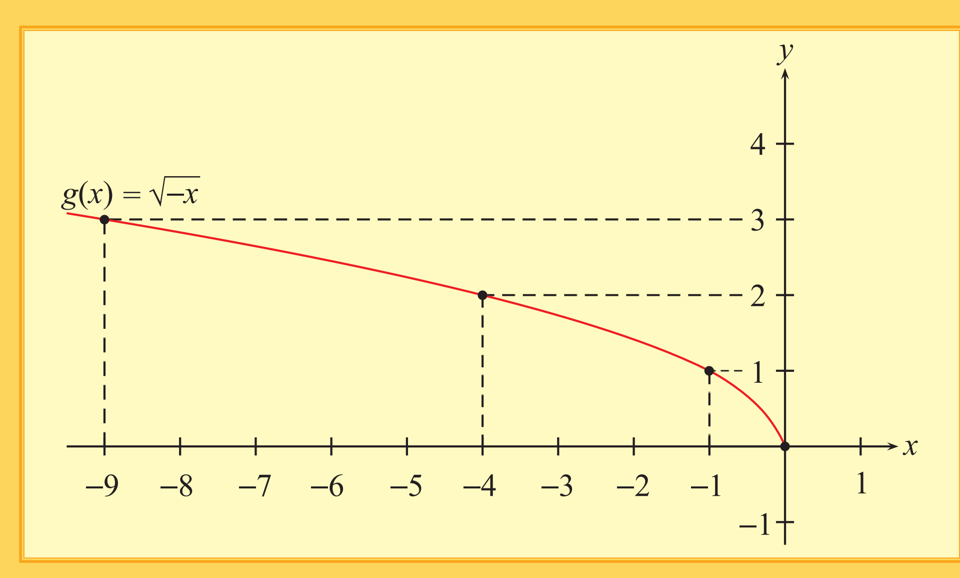
Solución:

Podemos notar que $dom\, f = [0, +\infty)$ y evaluando se obtiene la siguiente gráfica para f:



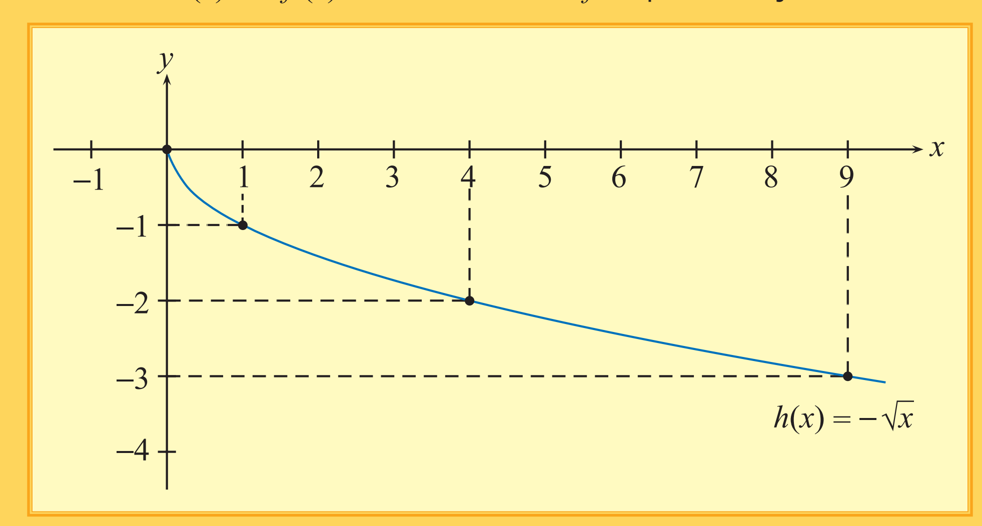
El rango de f es $[0, +\infty)$. La función f es: inyectiva y monótona.

La función $g(x) = f(-x)$ constituye la reflexión de f respecto al eje Y.



El rango de g es $[0, +\infty)$. La función g es: inyectiva y monótona. Note que su dominio es $(-\infty, 0]$.

La función $h(x) = -f(x)$ es la reflexión de f respecto al eje X.



El rango de h es $(-\infty, 0]$. La funcion h es: inyectiva y monótona. Note que su dominio es $[0, +\infty)$.

Compresiones o alargamientos

Dada la regla de correspondencia de f, siendo $k > 0$, se pueden generar las nuevas funciones:

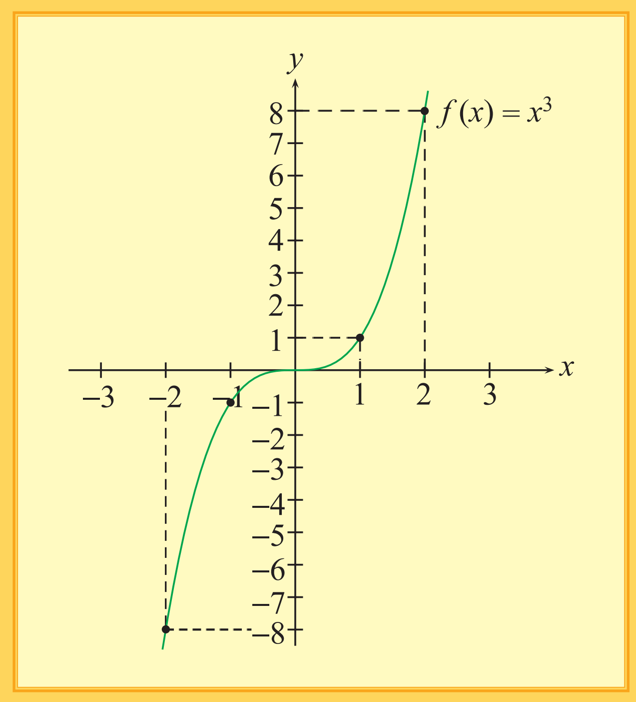
- $y = kf(x)$: si el valor de $0 < k < 1$, la gráfica de f se comprime verticalmente y si $k > 1$, la gráfica de f evidencia un alargamiento vertical.
- $y = f(kx)$: la gráfica de f presenta compresión horizontal si $k > 1$ y alargamiento en sentido horizontal si $0 < k < 1$.

Ejemplo 3.13 Compresiones o alargamientos de una función.

A partir de la gráfica de la función cúbica $f(x) = x^3$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ grafique las funciones $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)x^3$, $h(x) = 2x^3$, $m(x) = (2x)^3$, indicando sus características.

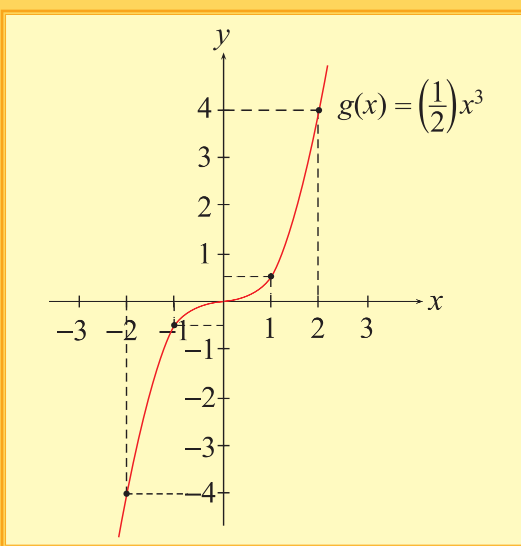
Solución:

Podemos notar que $dom\, f = \mathbb{R}$ y evaluando se obtiene la siguiente gráfica para f:



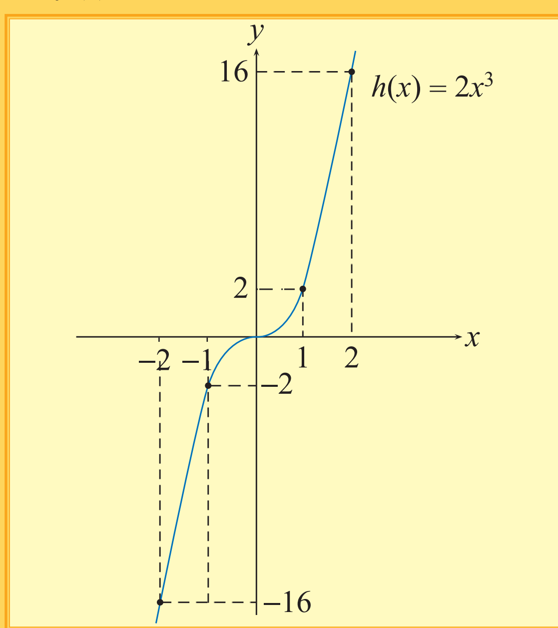
La función f es: inyectiva, sobreyectiva, monótona e impar.

La función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right) f(x)$ representa una compresión vertical de la función f.



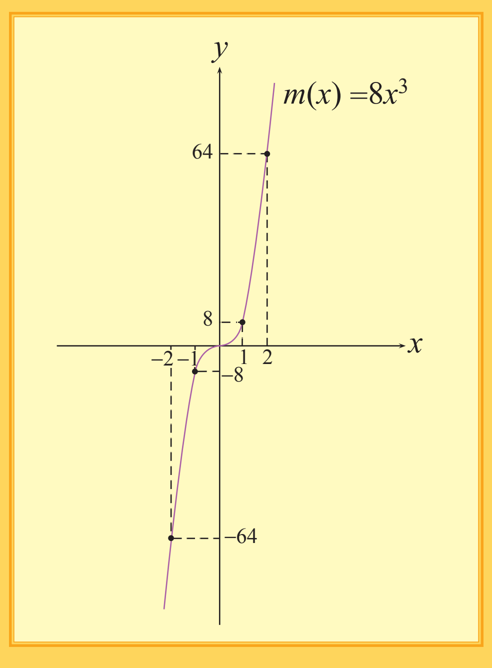
La función g es: inyectiva, sobreyectiva, monótona e impar.

La función $h(x) = 2f(x)$ representa un alargamiento vertical de la función f.



La función h es: inyectiva, sobreyectiva, monótona e impar.

La función $m(x) = f(2x)$ representa una compresión horizontal de la función f.



La función m es: inyectiva, sobreyectiva, monótona e impar.

Valores Absolutos

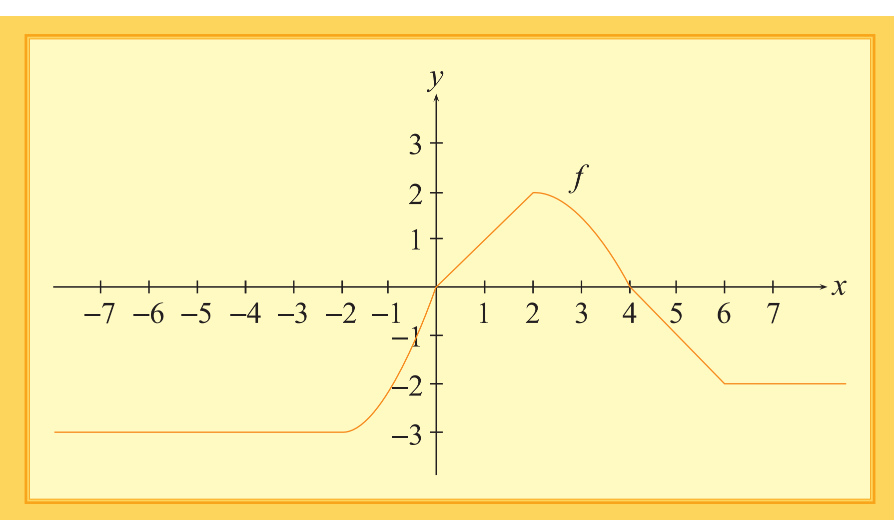
Dada la regla de correspondencia de f, se pueden generar las nuevas funciones:

- $f(|x|)$: Reflexión de la gráfica de f cuando $x > 0$, con respecto al eje Y.
- $f(-|x|)$: Reflexión de la gráfica de f cuando $x < 0$, con respecto al eje Y.
- $|f(x)|$: Reflexión de la gráfica de f cuando $y < 0$, con respecto al eje X.

Nótese que en los dos primeros casos se obtiene una función par, ya que $f(|x|) = f(|-x|)$ y $f(-|x|) = f(-|-x|)$.

Ejemplo 3.14 Valores Absolutos.

A partir de la gráfica de f:



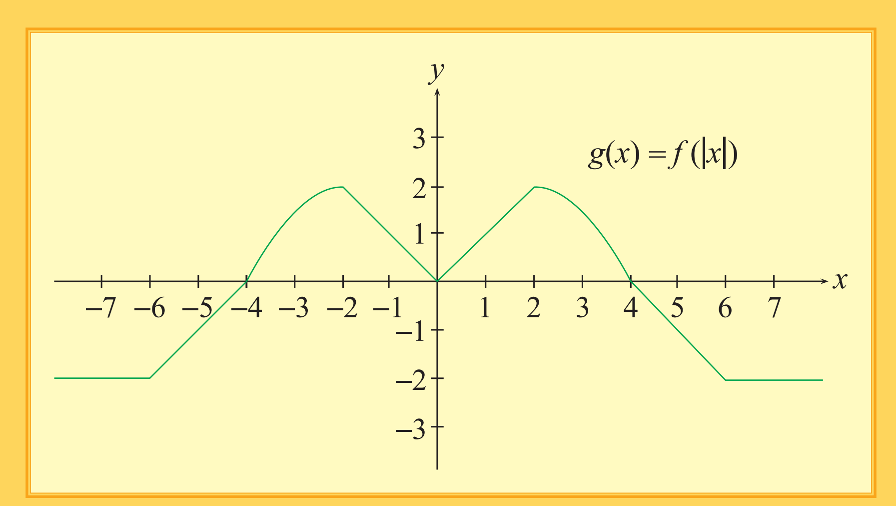
Bosqueje las gráficas de:

a) $g(x) = f(|x|)$
b) $h(x) = f(-|x|)$
c) $m(x) = |f(x)|$

Solución:

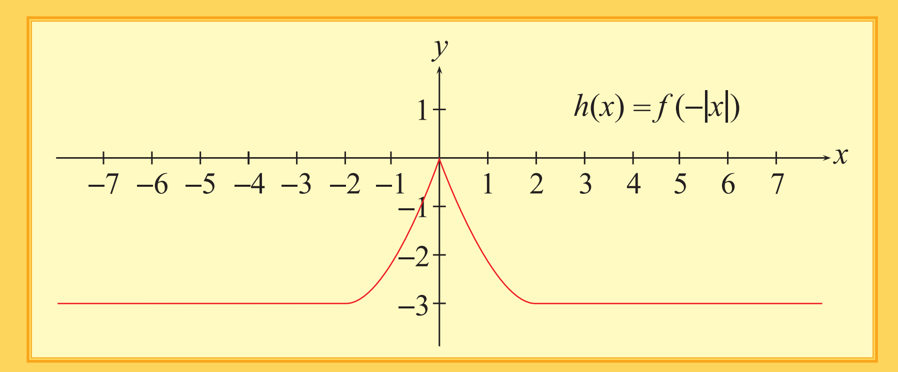
a) $g(x) = f(|x|)$

En este caso se produce la reflexión de la gráfica de f cuando $x > 0$, con respecto al eje Y.



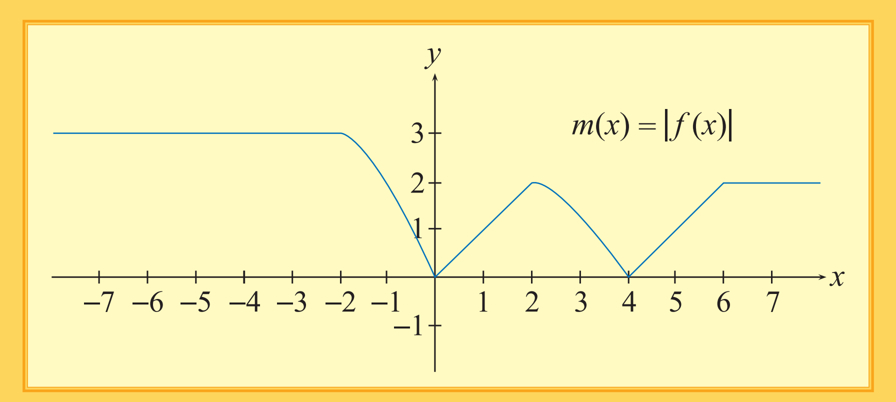
b) $h(x) = f(-|x|)$

En este caso se produce la reflexión de la gráfica de f cuando $x < 0$, con respecto al eje Y.



c) $m(x) = |f(x)|$

En este caso se produce la reflexión de la gráfica de f cuando $y < 0$, con respecto al eje X.



3.7 Funciones Lineales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada la regla de correspondencia de una función de variable real, reconocer los elementos que la definen como lineal.
* Dada una función lineal, interpretar gráfica y analíticamente sus características.
* Dadas las condiciones de un problema real, reconocer si puede ser modelado por una función lineal.

Definición 3.18 (Funciones Lineales)

Sean a y b números reales, la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax + b$, recibe el nombre de función lineal.

Su gráfica representa una recta cuya pendiente está dada por a y su intercepto con el eje Y es el punto $(0, b)$.

Para graficar una recta, es suficiente obtener dos puntos de ella y trazar el segmento ilimitado que los contenga. Se sugiere que estos dos puntos sean las intersecciones con los ejes coordenados, es decir, encontrar el valor de y cuando $x = 0$; y, encontrar el valor de x cuando $y = 0$. Esto no impide que se evalúe otro par de puntos que satisfaga la regla de correspondencia de f.

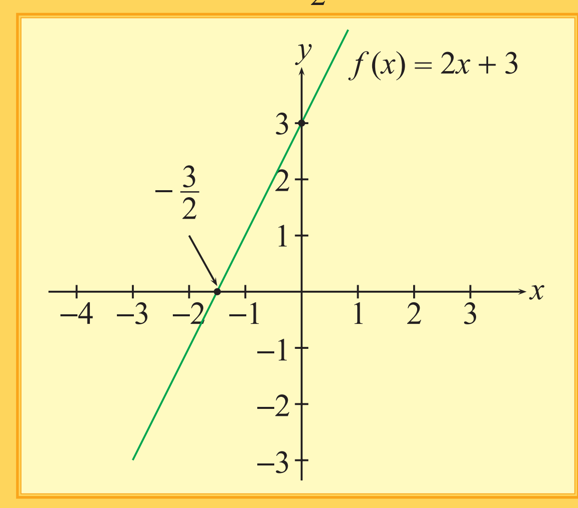
Ejemplo 3.15 Función Lineal.

Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, grafique $f(x) = 2x + 3$ e indique sus características.

Solución:

Cuando $x = 0$, $f(0) = 2(0) + 3 = 3$.

Cuando $f(x) = 0$, $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.



Analizando la gráfica de la función, podemos concluir que: f es inyectiva, sobreyectiva, estrictamente creciente (monótona), no es par ni impar, no es periódica ni acotada.

Nótese que el comportamiento de la función lineal varía según los valores de a y b. Si el valor de a es positivo, la gráfica representa una función estrictamente creciente, tal como lo muestran las figuras 3.18 (a) y 3.18 (b); mientras que cuando a es negativo, su gráfica corresponde a una función estrictamente decreciente, tal como lo indican las figuras 3.18 (c) y 3.18 (d). Si el valor de b es positivo, la intersección con el eje Y se localiza sobre el eje X, como lo muestran las figuras 3.18 (a) y 3.18 (c). Si el valor de b es negativo, la intersección con el eje Y se localiza bajo el eje X, como lo indican las figuras 3.18 (b) y 3.18 (d). Si el valor de b es igual a cero, la gráfica de f interseca a los ejes en el origen.

Por otra parte, la intersección de la función lineal con el eje X estará dada por el valor $-\frac{b}{a}$, el cual se ubicará en el semieje X positivo en los casos (b) y (c), y en el semieje X negativo en los casos (a) y (d).

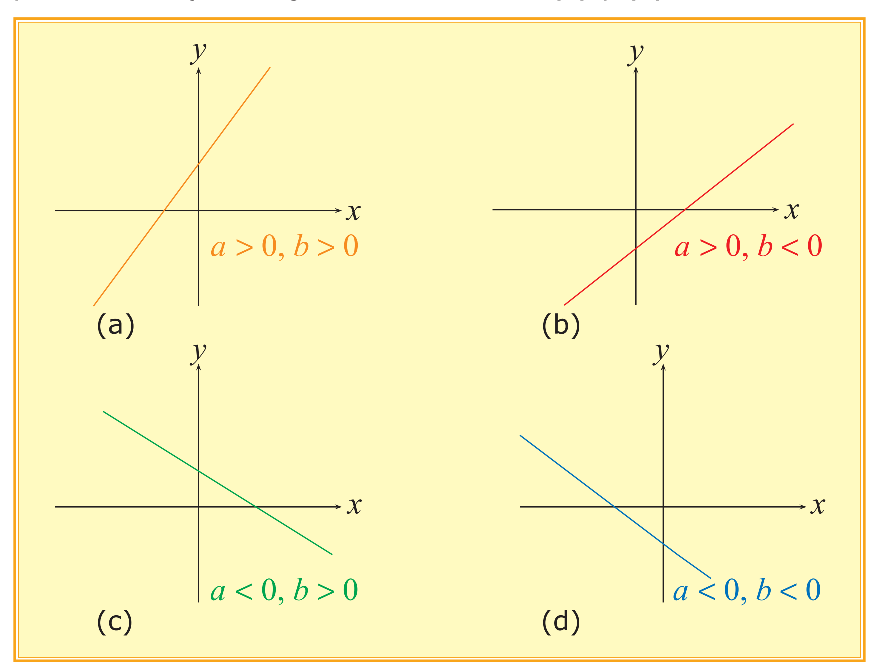


Figura 3.18: Funciones Lineales.

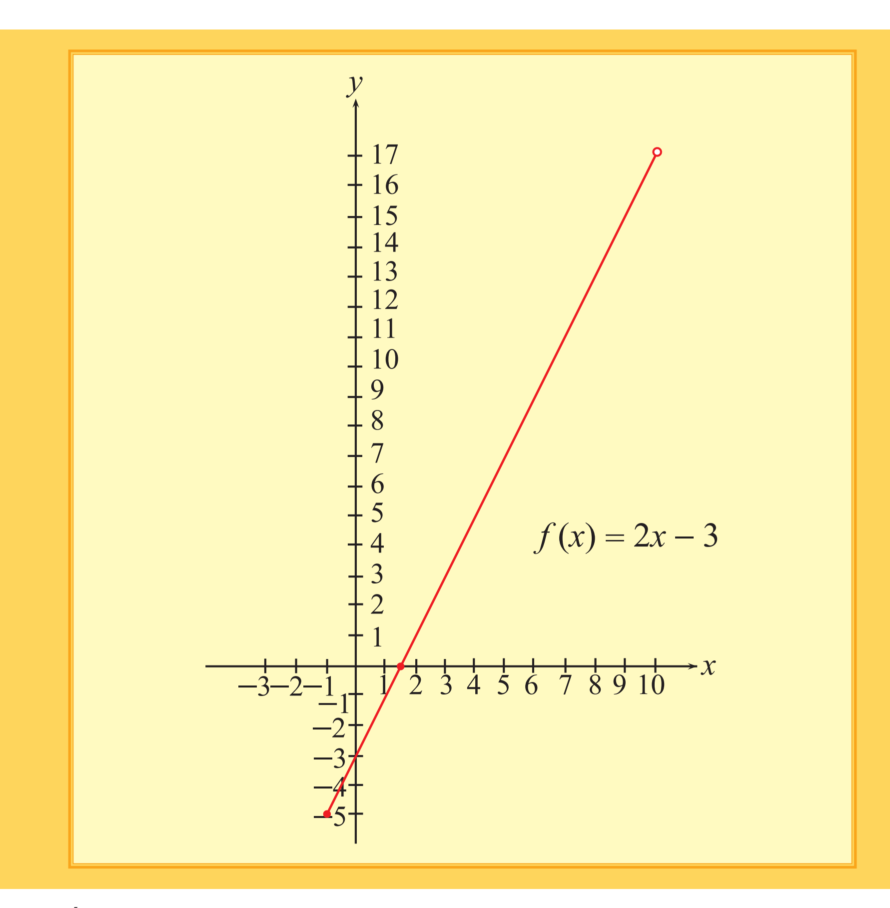
Ejemplo 3.16 Rango de una Función Lineal.

Hallar el rango de la función $f(x) = 2x - 3$; $x \in [-1,10)$.

Solución:

Ahora el rango está condicionado a un valor mínimo cuando x es igual a -1, este es -5. A medida que x se acerca a 10, el valor de f se aproximará a 17, pero sin llegar a tomar este valor, ya que x no llega a ser igual a 10.

Por lo tanto, se deduce que mientras $x \in [-1,10)$, el rango de f es $[-5,17)$.



En la práctica, las funciones lineales se utilizan para modelar procesos o relaciones que se comportan en forma directamente proporcional entre las variables de interés.

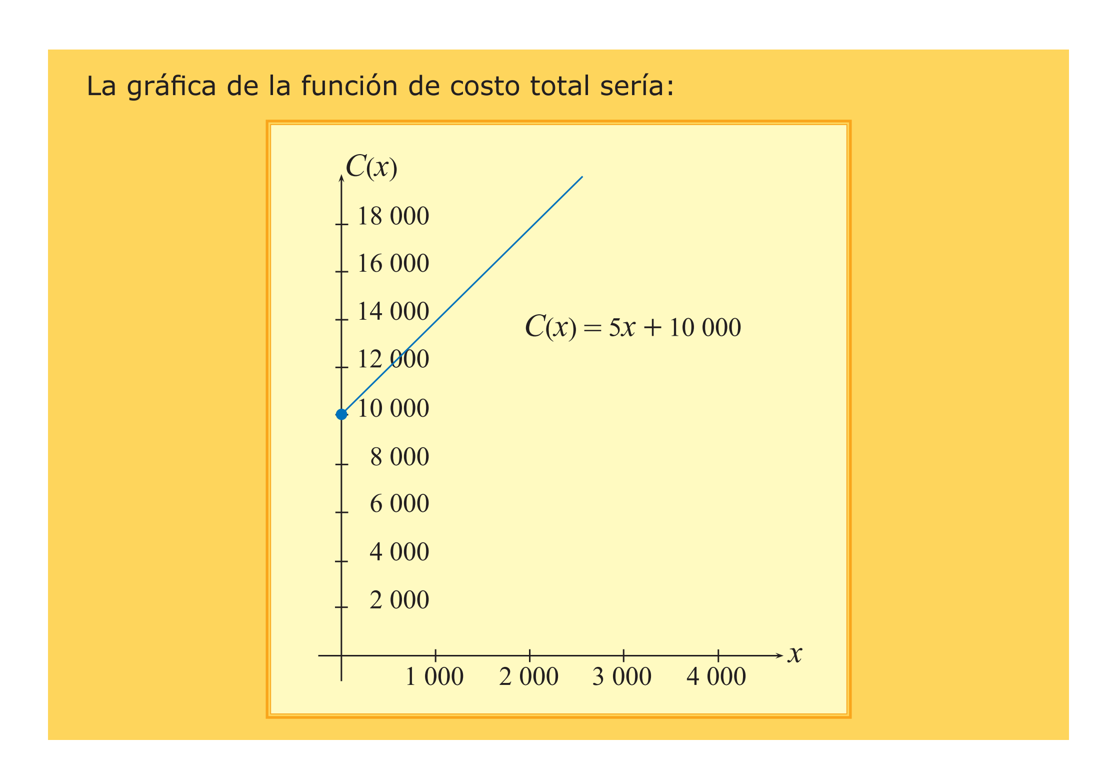
Ejemplo 3.17 Aplicación de funciones lineales.

Los costos fijos de un fabricante son iguales a $\$10\ 000$ mensuales y el costo de fabricar una camisa es de $\$5$. Si se requiere representar matemáticamente la función de costo total de la fábrica al mes, se dirá que x es el número de camisas que se fabrican al mes y el costo total es:

$$C(x) = 5x + 10\ 000$$

La cual es una función lineal con pendiente 5 e intercepto en $10\,000$. Este intercepto es de mucha importancia para el fabricante, porque le indica que aunque no produzca artículo alguno, tiene que cubrir este costo, y cuanto más grande es tal valor, más esfuerzo de producción se requiere.

La gráfica de la función de costo total sería:



Cuando $a = 0$, la función lineal sería $f(x) = (0)x + b = b$, la cual constituye la **función constante**, cuya gráfica es una recta horizontal, como se observa en la figura 3.19, en estos casos $dom\ f = \mathbb{R}$ y $rg\ f = \{b\}$.

Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez.

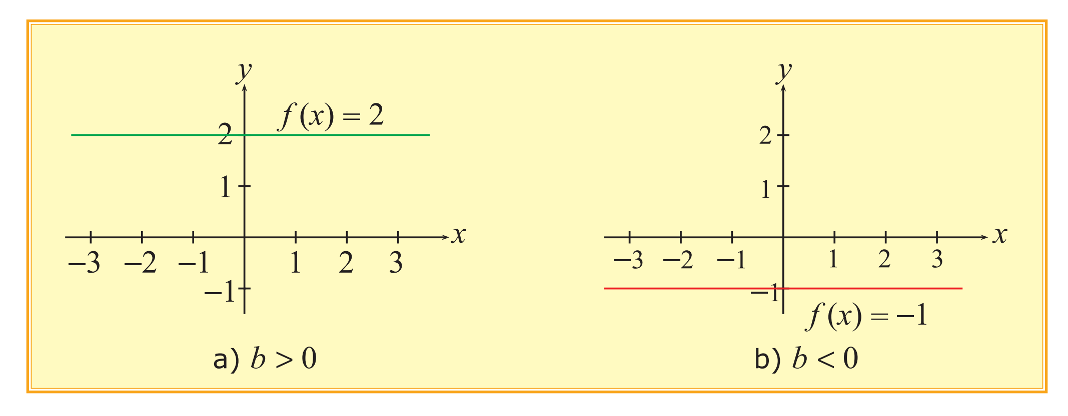


Figura 3.19: Funciones Constantes.

La función constante $f(x) = 0$ es la única función de variable real que es par e impar al mismo tiempo.

Cuando $a = 1$ y $b = 0$, tenemos $f(x) = (1)x + 0$, la cual constituye la **función identidad** $f(x) = x$, siendo $dom\ f = rg\ f = \mathbb{R}$.

A continuación se muestra su gráfica:

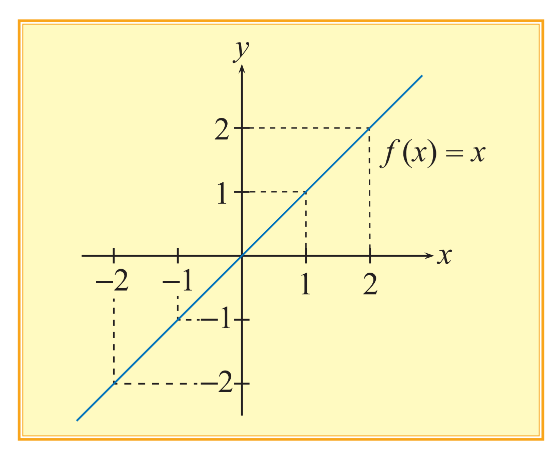


Figura 3.20: Función Identidad.

3.8 Funciones Cuadráticas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada la regla de correspondencia de una función de variable real, reconocer los elementos que la definen como cuadrática.
* Dada la forma general de una función cuadrática, expresarla en su forma canónica.
* Dada una función cuadrática en forma canónica, interpretar gráfica y analíticamente los elementos que la constituyen: vértice, eje de simetría, ceros, discriminante.
* Dada una función cuadrática, discutir sus características.
* Dadas las condiciones de un problema real, reconocer si puede ser modelado por una función cuadrática.
* Graficar funciones por tramos que incluyan expresiones cuadráticas definidas por intervalos.

Definición 3.19 (Funciones Cuadráticas)

Sean a, b y c números reales con $a \neq 0$, la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax^2 + bx + c$, recibe el nombre de función cuadrática.

Su gráfica corresponde geométricamente a una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo.

3.8.1 Forma canónica de la función cuadrática.

Nos proponemos obtener mediante el método de completar cuadrados, una expresión equivalente a $f(x)=ax^2+bx+c$, la misma que será de gran utilidad para el estudio de ciertas propiedades de esta función.

$$\begin{aligned} f(x)=ax^2+bx+c &\equiv f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &\equiv f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\ &\equiv f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\ &\equiv f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\end{aligned}$$

Esta última expresión es la forma canónica de la función cuadrática, siendo $\Delta=b^2-4ac$, valor que se denomina **discriminante**.

El punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ es el vértice de la parábola, punto en el cual la gráfica de f alcanza su valor máximo o mínimo en y.

Ejemplo 3.18 Forma canónica de la función cuadrática.

Obtenga la forma canónica de $f(x)=x^2-5x-6,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Solución:

Observamos que $a=1$
$b=-5$
$c=-6$
$\Delta=49$

Por lo tanto, $f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$.

3.8.2 Rango de la función cuadrática

Se trata de determinar el subconjunto de $\mathbb{R}$ que es el rango de la función cuadrática, esto es, el conjunto de valores que toma $f(x)=ax^2+bx+c$, cuando x varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Consideremos los siguientes casos:

i) $a>0$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Utilizando la forma canónica.

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$$\therefore\ rg\,f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

ii) $a < 0$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \in \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

$$\therefore\ rg\,f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

Ejemplo 3.19 Rango de una función cuadrática.

Obtenga el rango de $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

En el ejemplo anterior se determinó la forma canónica de esta función cuadrática. Por lo tanto, $rg\,f = \left[-\frac{49}{4}, +\infty\right)$.

3.8.3 Forma factorizada de la función cuadrática.

Dada la regla de correspondencia de f, si $\Delta \geq 0$, siempre es posible factorizarla y llevarla a la forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$.

Ejemplo 3.20 Forma factorizada de la función cuadrática.

Obtenga la forma factorizada de $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

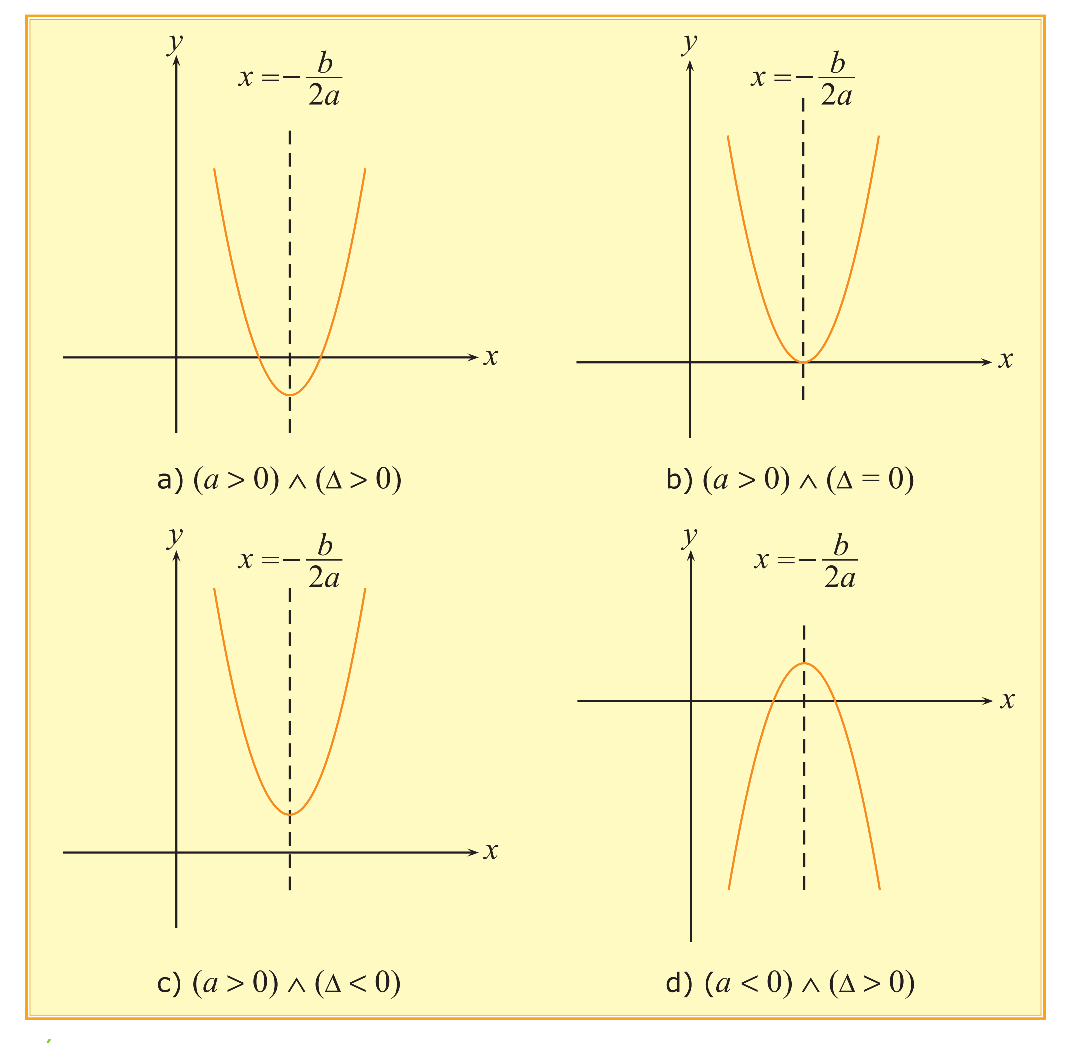
La expresión equivalente factorizada es: $f(x) = (x - 6)(x + 1)$.
Las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ son: $(x = 6) \vee (x = -1)$.

3.8.4 Gráfica de la función cuadrática.

Para graficar la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el plano cartesiano, se debe tener en cuenta que:

- Su gráfica es una parábola.
- Tiene simetría con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2a}$.
- El signo de a indica la concavidad de la curva. Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba; y, si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.
- El signo de Δ está relacionado con la cantidad de intersecciones con el eje X. Si $\Delta > 0$, la gráfica de f tiene dos intersecciones con el eje X. Si $\Delta = 0$, la gráfica de f interseca al eje X en un solo punto. Por último, si $\Delta < 0$, la gráfica de f no interseca al eje X.

En base a lo anotado, se pueden dar los siguientes casos:



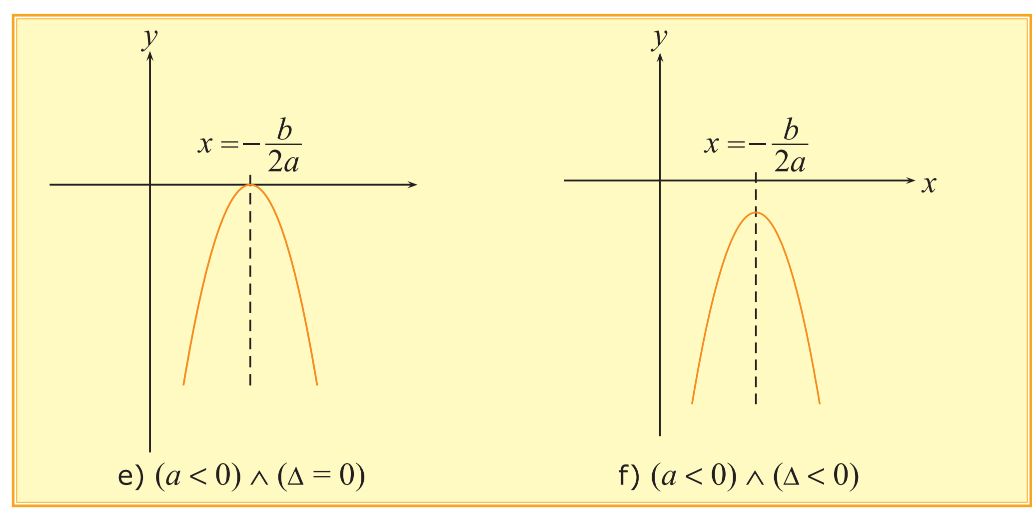


Figura 3.21: Funciones Cuadráticas.

Ejemplo 3.21 Gráfica de la función cuadrática.

Grafique la función $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

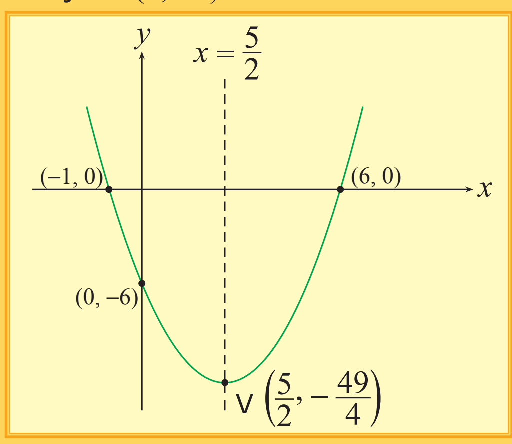
Solución:

Gráfica de f: $(a > 0) \Rightarrow$ Es una curva cóncava hacia arriba.

Eje de simetría: $x = \frac{5}{2}$

Vértice: $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right)$

Intersecciones con el eje X: $(-1, 0)$, $(6, 0)$
Intersección con el eje Y: $(0, -6)$



Ejemplo 3.22 Gráfica de funciones lineales y cuadráticas.

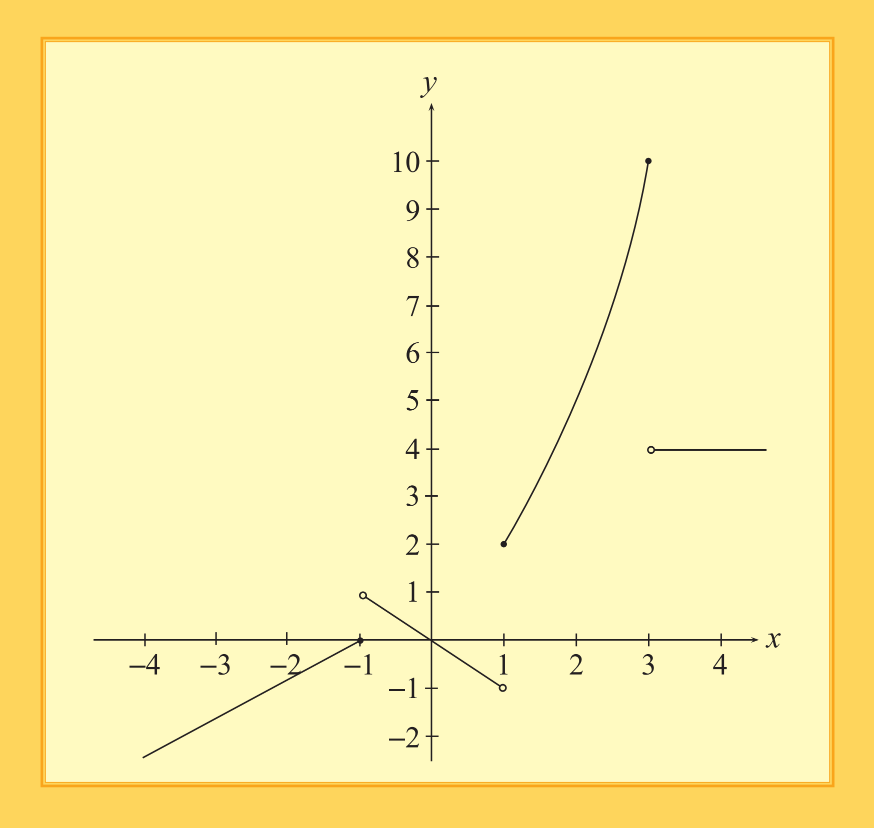
Bosqueje la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1 \\ -x, & |x| < 1 \\ x^2+1, & 1 \leq x \leq 3 \\ 4, & x > 3 \end{cases}$$

Solución:

Procedemos a analizar la función según los tramos o intervalos del dominio:

Función Lineal	Función Lineal	Función Cuadrática	Función Constante
$x \leq -1$ $x+1 \leq 0$ $f(x) \leq 0$ $rg\,f = (-\infty, 0]$	$-1 < x < 1$ $-1 < -x < 1$ $-1 < f(x) < 1$ $rg\,f = (-1, 1)$	$1 \leq x \leq 3$ $1 \leq x^2 \leq 9$ $2 \leq x^2+1 \leq 10$ $2 \leq f(x) \leq 10$ $rg\,f = [2, 10]$	$x > 3$ $rg\,f = \{4\}$



La función f posee las siguientes características:

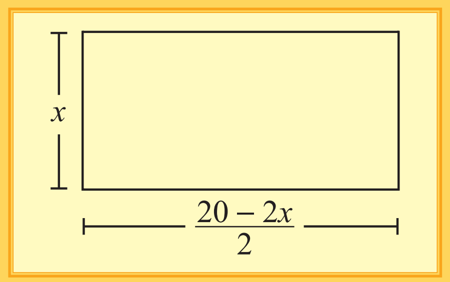
- $dom\, f = \mathbb{R}$.
- $rg\, f = (-\infty, 1) \cup [2, 10]$.
- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-1, 1)$.
- f es creciente y decreciente a la vez en $(3, +\infty)$.
- f es discontinua en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Ejemplo 3.23 Aplicación de funciones cuadráticas.

Considere un alambre de longitud $20cm$, con el que se desea construir un rectángulo cuya área se necesita representar matemáticamente.

Solución:

Si se denomina x la medida de uno de los lados que tendrá el rectángulo, el otro lado medirá $\frac{20 - 2x}{2}$.



Con lo cual, el área de la superficie del rectángulo es:

$$A(x) = x\left(\frac{20 - 2x}{2}\right) = 10x - x^2$$

Ésta es una función cuadrática con vértice en $(5, 25)$ y cóncava hacia abajo. Este vértice y la concavidad son de mucha importancia, porque indican que el valor máximo de área que se puede obtener para el rectángulo construido de esta manera es de 25 unidades cuadradas, con un lado del rectángulo cuya longitud es igual a 5.

En ocasiones, necesitamos realizar operaciones entre funciones de variable real que nos permitan obtener nuevas funciones, a partir de la regla de correspondencia de otras funciones conocidas. En la siguiente sección estudiaremos los diferentes tipos de operaciones que se pueden realizar entre funciones de variable real.

3.9 Operaciones con Funciones de Variable Real

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas las operaciones entre funciones, explicar el efecto sobre la variable del rango de la función resultante.
* Dadas las reglas de correspondencia de dos o más funciones de variable real, encontrar la regla de correspondencia de la función suma, diferencia, producto o división, especificando el dominio de la operación.
* Interpretar el efecto de la suma, producto y división entre funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, constantes, crecientes, decrecientes, pares, impares, acotadas y periódicas.
* Dadas dos funciones de variable real, reconocer si es posible realizar la composición entre ellas.
* Dadas las reglas de correspondencia de dos funciones de variable real, realizar la composición entre ellas.

Cuando estudiamos operadores lógicos, la conjunción, la disyunción, la condicional y la bicondicional se usaron para realizar operaciones entre las proposiciones. En conjuntos, hicimos operaciones con ellos tales como la unión, intersección, diferencia y complementación. En el conjunto de los números reales hemos realizado las operaciones fundamentales con ellos. Ahora tenemos un nuevo conjunto, que es el conjunto de las funciones, así que también podemos definir operaciones en este conjunto.

Al igual que los números, las funciones de variable real se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

Definición 3.20 (Operaciones con Funciones)

Sean f y g dos funciones de variable real, se definen las cuatro operaciones fundamentales así:

Función suma $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Función diferencia $\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Función producto $\quad (fg)(x) = f(x)\,g(x)$

Función cociente $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de los números que son comunes a los dominios de f y g, pero los números x para los cuales $g(x) = 0$ en la función cociente $\frac{f}{g}$, deben excluirse de este dominio.

Algunas propiedades de las operaciones sobre los tipos de funciones son:

- La suma (diferencia) y el producto (cociente) de dos funciones pares es par.
- La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar.
- El producto (cociente) de dos funciones impares es par.
- La suma (diferencia) de una función par y una impar, ambas no nulas, no es par, ni impar.
- El producto (cociente) de una función par y una impar es impar.
- La suma de dos funciones crecientes (o decrecientes) también es creciente (o decreciente).

Estas propiedades pueden ser demostradas aplicando las definiciones dadas para tipos de funciones.

Ejemplo 3.24 Propiedades de las operaciones entre funciones.

Demostrar que la suma de dos funciones pares es par.

Solución:

Sean f y g dos funciones pares. Por definición $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$.

$f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$ Sumando ambas igualdades.

$(f + g)(x) = (f + g)(-x)$ Aplicando la definición de suma de funciones.

Con lo que se concluye que $(f + g)$ también es par.

Ejemplo 3.25 Operaciones con funciones de variable real.

Obtener las funciones $f + g$, $f - g$, (fg) y $\left(\frac{f}{g}\right)$ a partir de:

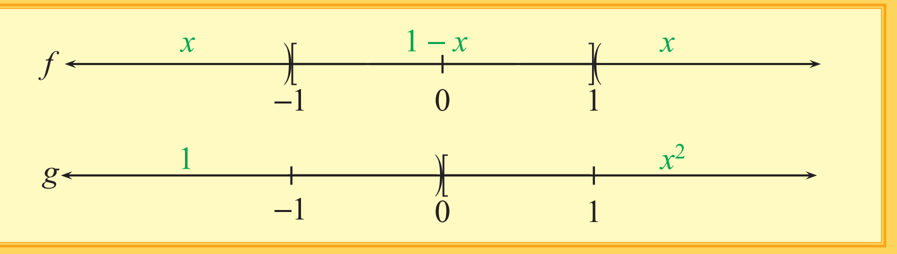
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \qquad\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & |x| \leq 1 \\ x, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Solución:

Para realizar las operaciones solicitadas, marquemos sobre la recta real la regla de correspondencia de cada función con sus intervalos respectivos.



A fin de facilitar nuestro trabajo, marcamos sobre una nueva recta real los intervalos comunes a ambas funciones y efectuamos las operaciones según corresponda.

	$x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x \leq 1$	$x > 1$
$f+g$	$x+1$	$2-x$	x^2-x+1	x^2+x
$f-g$	$x-1$	$-x$	$-x^2-x+1$	$-x^2+x$
fg	x	$1-x$	$-x^3+x^2$	x^3
$\frac{f}{g}$	x	$1-x$	$\frac{1-x}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

Las reglas de correspondencia son, respectivamente:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 2-x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2 - x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases} x-1, & x<-1 \\ -x, & -1\leq x<0 \\ -x^2-x+1, & 0\leq x\leq 1 \\ -x^2+x, & x>1 \end{cases}$$

$$(f\,g)(x)=\begin{cases} x, & x<-1 \\ 1-x, & -1\leq x<0 \\ -x^3+x^2, & 0\leq x\leq 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} x, & x<-1 \\ 1-x, & -1\leq x<0 \\ \dfrac{1-x}{x^2}, & 0<x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

Ejemplo 3.26 Operaciones con funciones de variable real.

Dadas las funciones de variable real:

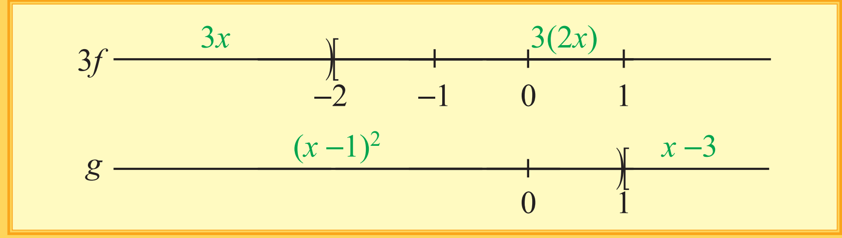
$$f(x)=\begin{cases} x, & x<-2 \\ 2x, & x\geq -2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x-3, & x\geq 1 \end{cases}$$

Realice las operaciones:

a) $3f+g$
b) $f-2g$
c) $-fg$
d) $\dfrac{3}{4}\dfrac{f}{g}$

Solución:

a) $(3f+g)(x)$



$$(3f+g)(x)=\begin{cases}3x+(x-1)^2, & x<-2\\ 6x+(x-1)^2, & -2\le x<1\\ 6x+x-3, & x\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3x+x^2-2x+1, & x<-2\\ 6x+x^2-2x+1, & -2\le x<1\\ 6x+x-3, & x\ge 1\end{cases}$$

$$(3f+g)(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<-2\\ x^2+4x+1, & -2\le x<1\\ 7x-3, & x\ge 1\end{cases}$$

b) $(f-2g)\,(x)$

f: x for $x<-2$; $2x$ for $x\ge -2$ (marks at -2, -1, 0, 1)

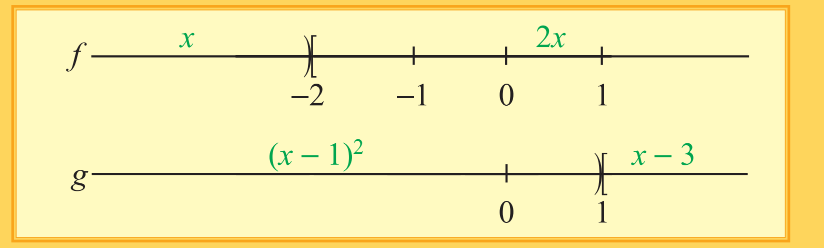
$2g$: $2(x-1)^2$ for $x<1$; $2(x-3)$ for $x\ge 1$ (marks at 0, 1)

$$(f-2g)(x)=\begin{cases}x-2\,(x-1)^2, & x<-2\\ 2x-2\,(x-1)^2, & -2\le x<1\\ 2x-2\,(x-3), & x\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-2\,(x^2-2x+1), & x<-2\\ 2x-2\,(x^2-2x+1), & -2\le x<1\\ 2x-2x+6, & x\ge 1\end{cases}$$

$$(f-2g)(x)=\begin{cases}-2x^2+5x-2, & x<-2\\ -2x^2+6x-2, & -2\le x<1\\ 6, & x\ge 1\end{cases}$$

c) $(-fg)\,(x)$



$$-fg\,(x) = \begin{cases} -x\,(x-1)^2, & x < -2 \\ -2x\,(x-1)^2, & -2 \leq x < 1 \\ -2x\,(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x\,(x^2-2x+1), & x < -2 \\ -2x\,(x^2-2x+1), & -2 \leq x < 1 \\ -2x\,(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$-fg\,(x) = \begin{cases} -x^3+2x^2-x, & x < -2 \\ -2x^3+4x^2-2x, & -2 \leq x < 1 \\ -2x^2+6x, & x \geq 1 \end{cases}$$

d) $\frac{3}{4}\frac{f}{g}\,(x)$

$$\frac{3}{4}\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{4(x-1)^2}, & x < -2 \\ \dfrac{3x}{2(x-1)^2}, & -2 \leq x < 1 \\ \dfrac{3x}{2(x-3)}, & (1 \leq x < 3) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Ya hemos estudiado, en el capítulo 1, la composición de funciones para conjuntos finitos; vamos a ampliar ahora este concepto para funciones de variable real. Una composición de funciones tiene por objetivo combinarlas para formar una nueva función y sus aplicaciones son diversas.

Por ejemplo, un CD-RW cuesta x dólares al mayoreo. El precio que el almacén paga al distribuidor está dado por la función $p(x) = x + 0.25$. El precio que el cliente paga en el almacén es $c(x) = \left(\frac{7}{5}\right) x$. Si un CD-RW cuesta \$ 0.25 al mayoreo, el distribuidor lo vende al almacén a \$ 0.50 y el almacén se lo vende al cliente a \$ 0.70. Podemos notar que lo que debe pagar el cliente, en general, es $c(p(x)) = \left(\frac{7}{5}\right)(x + 0.25)$, es decir, se tiene un precio compuesto para el consumidor final.

Definición 3.21 (Composición de Funciones de Variable real)

Sean f y g dos funciones de variable real:

- La función compuesta de g con f denotada por $g \circ f$ se define por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

que se lee "g compuesta con f".

Para que esta función compuesta exista, es necesario que $rg\, f \subseteq dom\, g$.

Se puede verificar que $dom\,(g \circ f) = dom\, f$.

- La función compuesta de f con g denotada por $f \circ g$ se define por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

que se lee "f compuesta con g".

Para que esta función compuesta exista, es necesario que $rg\, g \subseteq dom\, f$.

Se puede verificar que $dom\,(f \circ g) = dom\, g$.

Ejemplo 3.27 Composición de funciones de variable real.

Sean $f(x) = \sqrt{x - 1}$ y $g(x) = x^2 + 2$, obtenga las reglas de correspondencia de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

$(f \circ g)(x) \;= \sqrt{(x^2 + 2) - 1} = \sqrt{x^2 + 1};\ \forall x \in \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 + 2 = x - 1 + 2 = x + 1;\ \forall x \geq 1$

Ejemplo 3.28 Composición de funciones de variable real por tramos.

Sea $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 2 \\ 1, & x \leq 2 \end{cases}$

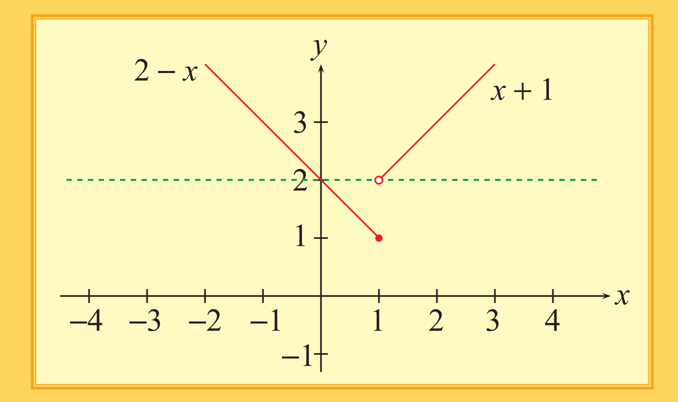
Encuentre $(g \circ f)(x)$.

Solución:

Aplicando la definición:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} [f(x)]^2, & f(x) > 2 \wedge x \in dom\, f \\ 1, & f(x) \leq 2 \wedge x \in dom\, f \end{cases}$$

Nos podemos ayudar con la gráfica de f:



- $f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

Por lo tanto:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (2-x)^2, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x+1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3.29 Composición de funciones.

Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 2 \\ 4, & 2 < x < 4 \\ 2 - x, & x \geq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

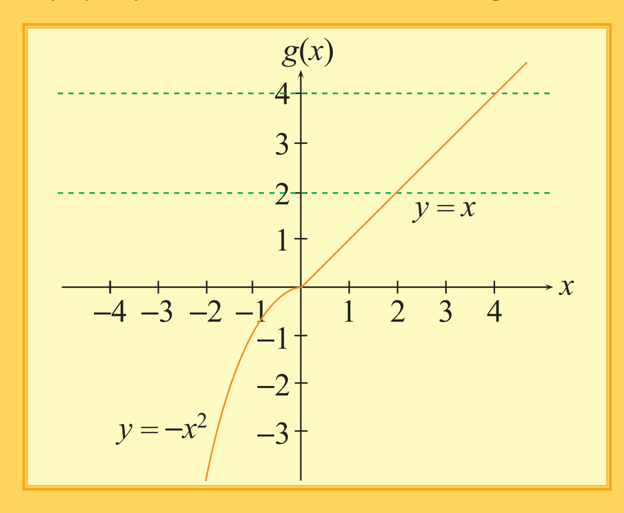
Construya $(f \circ g)(x)$.

Solución:

Aplicando la definición:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} [g(x)]^2 + 1, & g(x) \leq 2 \quad \wedge x \in dom\ g \\ 4, & 2 < g(x) < 4 \quad \wedge x \in dom\ g \\ 2 - g(x), & g(x) \geq 4 \quad \wedge x \in dom\ g \end{cases}$$

Nos podemos apoyar para nuestro análisis en la gráfica de la función g.



- $g(x) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup [0, 2]$
- $2 < g(x) < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (2, 4)$
- $g(x) \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [4, +\infty)$

Para luego concluir que:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4, & 2 < x < 4 \\ 2 - x, & x \geq 4 \end{cases}$$

A más de las funciones estudiadas, existen algunas que por su utilidad, precisan ser analizadas.

3.10 Funciones Especiales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una expresión numérica que involucre a las funciones valor absoluto, escalón, signo o entero mayor, calcular su valor empleando la definición de estas funciones.

* Dada una función especial, discutir sus características.

Capítulo 3

Funciones de una Variable Real

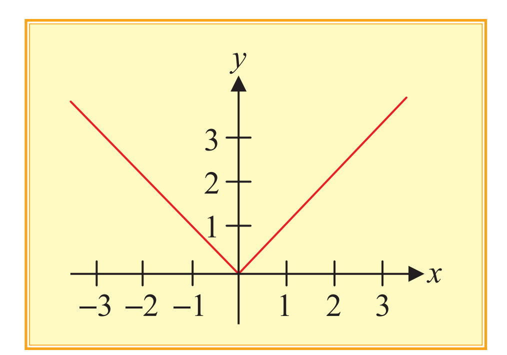
* Construir y graficar composiciones con funciones especiales, relacionando el dominio y rango especificados en la definición.
* Dada una ecuación o inecuación con funciones especiales, resolverla gráficamente.

Función Valor Absoluto

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x|$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



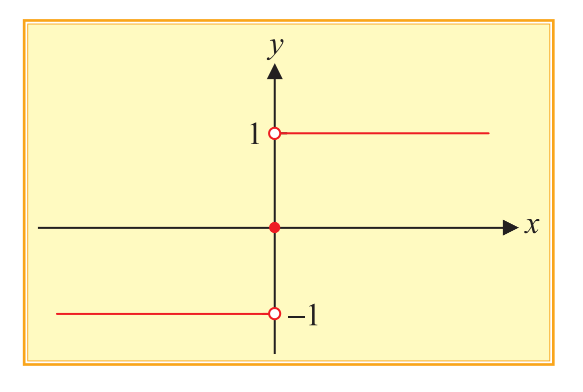
Se puede observar que $dom\, f = \mathbb{R}$, $rg\, f = [0, +\infty)$, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$, f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, f es par y f es continua en $\mathbb{R}$.

Función Signo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

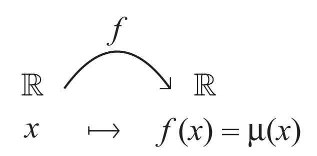
$$x \mapsto f(x) = sgn\,(x)$$

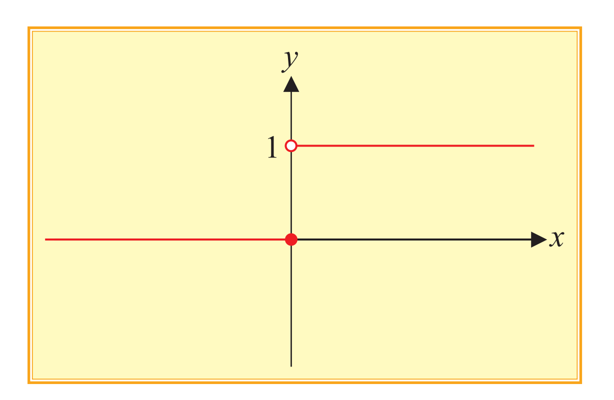
$$f(x) = sgn\,(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Se puede observar que $dom\, f = \mathbb{R}$, $rg\, f = \{-1, 0, 1\}$, f es creciente en $\mathbb{R}$, f es impar, f presenta una discontinuidad en $x = 0$.

Función Escalón





$$f(x) = \mu(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

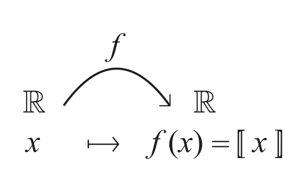
Se puede observar que $dom\, f = \mathbb{R}$, $rg\, f = \{0, 1\}$, f es creciente en $\mathbb{R}$, f presenta una discontinuidad en $x = 0$.

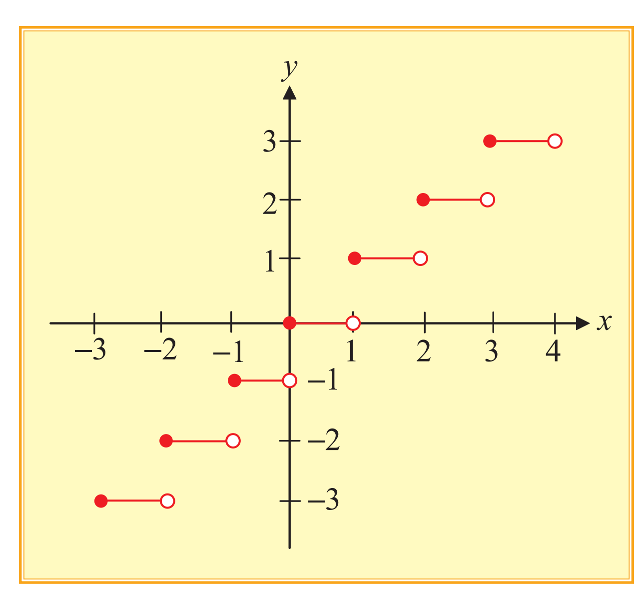
Función Máximo Entero o Entero Mayor

La función entero mayor se puede describir para un número real x como el mayor entero menor o igual que x.

A partir de esta descripción, el entero mayor de 2.1 es 2, de -1.05 es -2, el de π es 3, el de $-e$ es -3, el de -5 es -5, y así podemos verificar para otros números.

Esto permite definir y graficar esta función especial de la siguiente manera:





$$f(x) = [\![x]\!] = n, \qquad n \leq x < n + 1;\ x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}$$

Se puede observar que $dom\,f=\mathbb{R}$, $rg\,f=\mathbb{Z}$, f es creciente en $\mathbb{R}$, las intersecciones con el eje X son todos los números reales del intervalo $[0, 1)$, f es constante en todo intervalo de la forma $[k, k+1)$; siendo k un número entero, f presenta discontinuidades para todos los valores enteros del dominio de f.

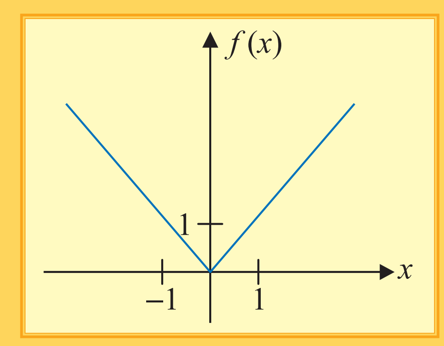
Ejemplo 3.30 Función Valor Absoluto.

Construya la gráfica de la función: $f(x) = -|2x+1| + 3$.

Solución:

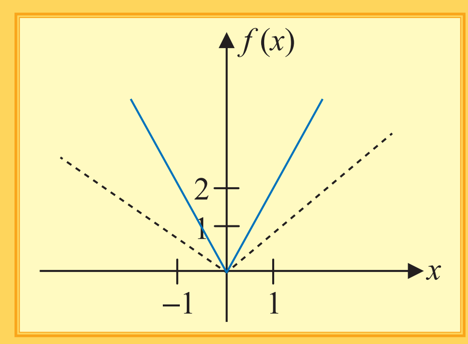
Se puede obtener la función solicitada mediante los siguientes pasos:

1) $f(x) = |x|$



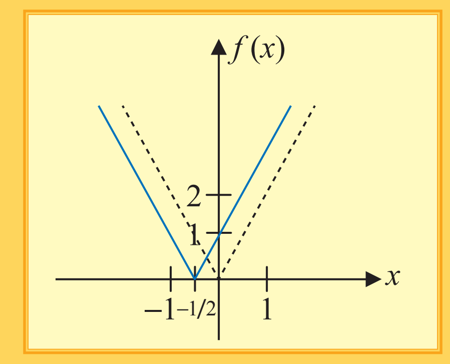
2) $f(x) = |2x|$

Experimenta una compresión horizontal.



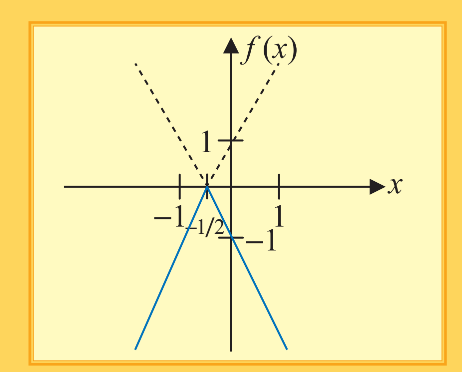
3) $f(x) = |2x+1|$

Desplazamiento de $\frac{1}{2}$ unidades a la izquierda.



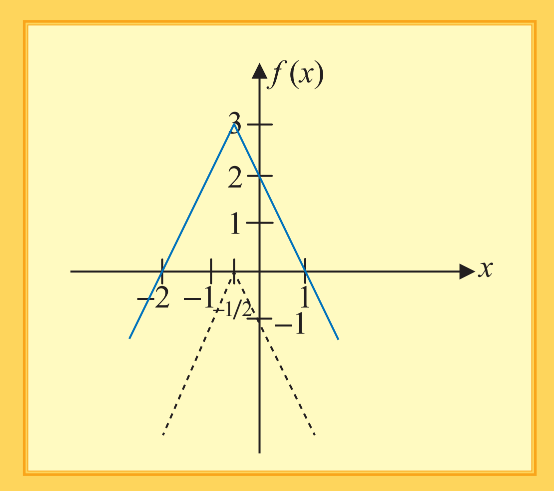
4) $f(x) = -|2x+1|$

Reflexión con respecto al eje x.



$5)\ f(x) = -|2x+1| + 3$

Desplazamiento de 3 unidades hacia arriba.



Ejemplo 3.31 Operaciones entre función signo y escalón.

Realice la siguiente operación: $f(x) = sgn(x-2) + 2\mu(x+1)$, y grafique la función resultante.

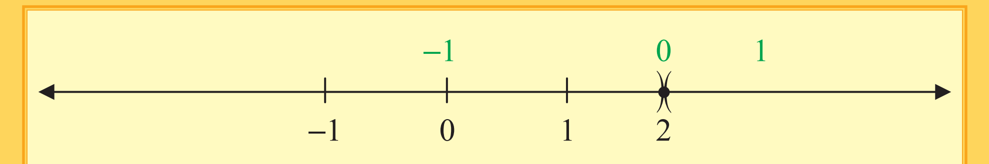
Solución:

Determinamos la regla de correspondencia para las funciones involucradas:

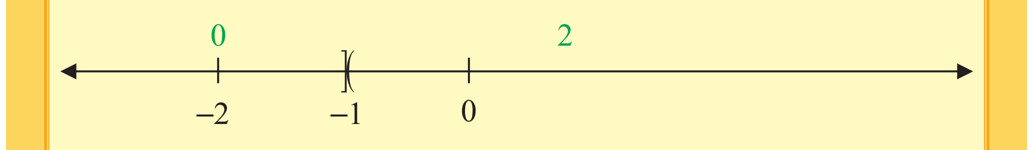
$$sgn(x-2) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ 0, & x = 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases} \qquad 2\mu(x+1) = \begin{cases} 2, & x > -1 \\ 0, & x \leq -1 \end{cases}$$

Graficamos los dominios de ambas funciones:

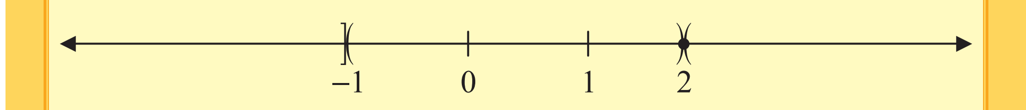
$sgn\ (x-2)$



$2\mu(x+1)$



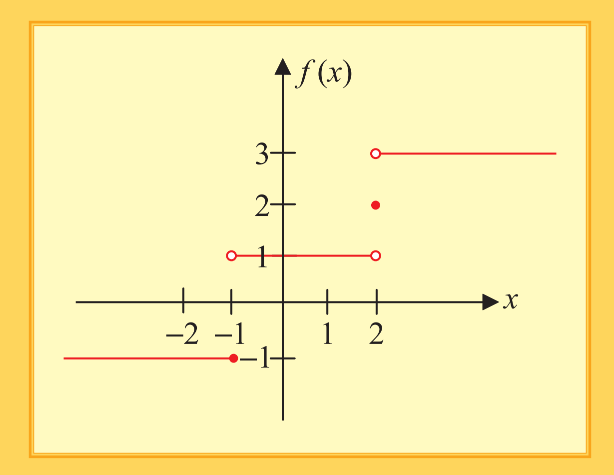
Graficamos el dominio común:



Planteamos la suma de las funciones:

$$sgn(x-2)+2\mu(x+1)=\begin{cases} -1, & x \leq -1 \\ 1, & -1 < x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$$

Graficamos la función resultante:



Ejemplo 3.32 Composición entre funciones especiales.

Sean:

$$f(x)=\begin{cases} [\![x]\!]-1, & x\leq -2 \\ |x|+2, & -2<x\leq 1 \\ 2\ sgn(x), & x>1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1-|x|, & x\leq 0 \\ sgn(2x), & 0<x\leq 2 \\ [\![x]\!]+\mu(x), & x>2 \end{cases}$$

Evalúe:

a) $(f \circ g)(3.5)$

b) $(g \circ f)(-2.5)$

Solución:

a) $(f \circ g)(3.5)=f(g(3.5))$

Evaluando $g(3.5)=[\![3.5]\!]+\mu(3.5)=3+1=4$.

Luego, evaluando $f(4)=2\ sgn(4)=2(1)=2$.

$\therefore\ (f \circ g)(3.5)=2$

b) $(g \circ f)(-2.5)=g(f(-2.5))$

Evaluando $f(-2.5)=[\![-2.5]\!]-1=-3-1=-4$.

Luego, evaluando $g(-4)=1-|-4|=1-4=-3$.

$\therefore\ (g \circ f)(-2.5)=-3$

Como ya se estudió anteriormente, es posible realizar composiciones con funciones especiales graficando la función dominio, y aplicando sobre esta gráfica la definición de la función especial.

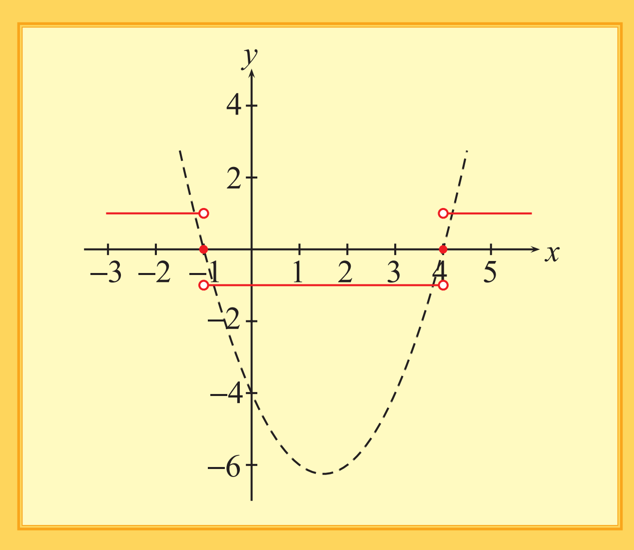
Ejemplo 3.33 Graficación de funciones de variable real.

Se requiere la gráfica de $f(x)=sgn\ (x^2-3x-4),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Solución:

Basta graficar la parábola y, sobre los intervalos correspondientes, emplear la definición de la función signo, tomando en cuenta que el argumento de esta función es el rango de la función cuadrática.

Así, se obtiene la siguiente gráfica:



Gráficamente también se pueden resolver ecuaciones o inecuaciones. Así, si se requiere determinar el conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $sgn(x^2 - 3x - 4) = 1$ con $\text{Re} = \mathbb{R}$, basta graficar la función $sgn(x^2 - 3x - 4)$ y en la gráfica se observa que su rango es 1 si y sólo si $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$. Por lo tanto, este conjunto es $\text{A}p(x)$.

3.11 Función Inversa de una Función Biyectiva

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar las condiciones para la existencia de la inversa de una función de variable real.
* Dada una función biyectiva, encontrar la regla de correspondencia de su inversa.
* Interpretar la relación entre la gráfica de una función y la de su inversa.

Ya hemos mencionado que una función f es inversible si y sólo si es biyectiva.

Definición 3.22 (Función Biyectiva)

Una función de variable real f es biyectiva si y sólo si:

- f es inyectiva, y
- f es sobreyectiva

Para obtener la inversa de una función biyectiva f^{-1}, debemos realizar lo siguiente:

- Cambiar $f(x)$ por x; y reemplazar x por y.
- Despejar y.

La regla de correspondencia de f^{-1} sería la ecuación obtenida, con el conjunto de partida de f como el conjunto de llegada de la inversa, y el conjunto de llegada de f como el conjunto de partida de la inversa. Es decir, $dom\, f = rg\, f^{-1}$ y $rg\, f = dom\, f^{-1}$.

Gráficamente, cuando se representan f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano, ambas son simétricas con respecto a la función identidad $f(x) = x$.

Otro aspecto a considerar, es que la monotonía de f se mantiene con respecto a su función inversa. Si f es estrictamente creciente, f^{-1} también lo es; mientras que si f es estrictamente decreciente, f^{-1} presenta la misma característica.

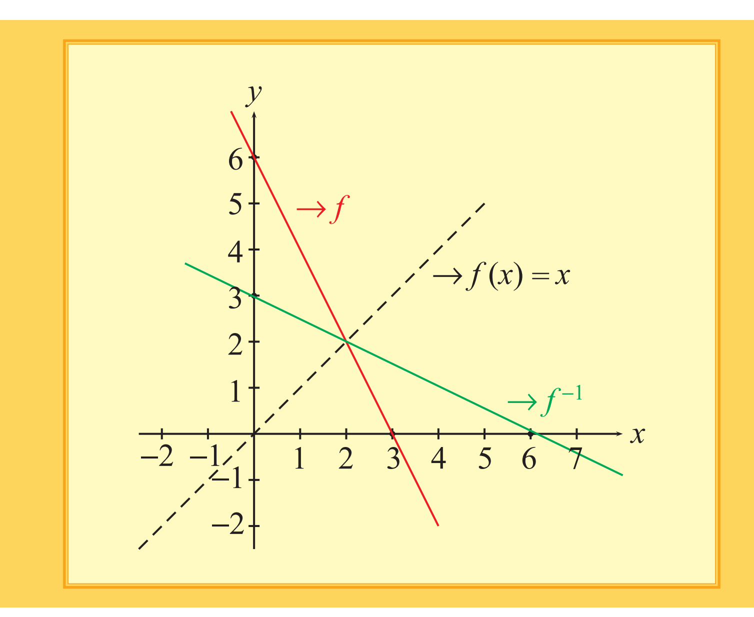
No hay que olvidar que la composición entre la función y su inversa constituye una función identidad en X, mientras que la composición entre la inversa y la función permite construir una función identidad en Y, lo cual ratifica que la composición de funciones no es conmutativa.

Ejemplo 3.34 Función Inversa.

Sea $f(x) = -2x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$ encuentre f^{-1} y grafíquela.

Solución:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) = \quad & f(f^{-1}(x)) = x \\ & -2f^{-1}(x) + 6 = x \\ & -2f^{-1}(x) = x - 6 \\ & f^{-1}(x) = \frac{6-x}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Ejemplo 3.35 Función Inversa.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$, encuentre f^{-1} y grafíquela.

Solución:

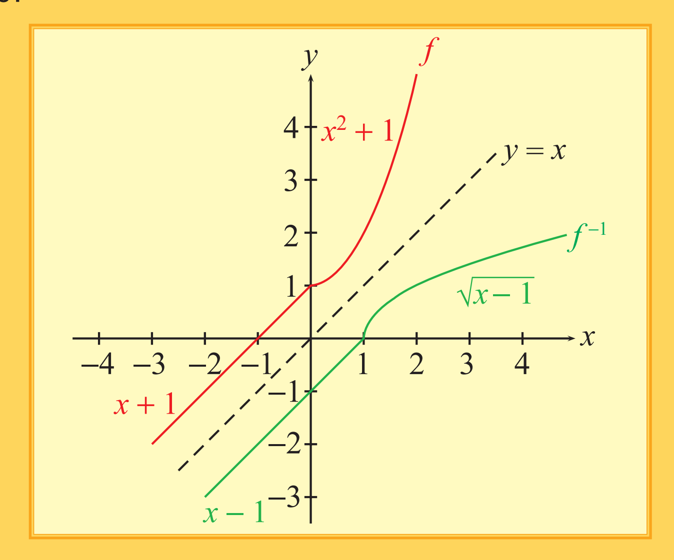
Si $x \geq 0$
$f(x) = x^2 + 1, \ rg\, f = [1, +\infty)$
$x = y^2 + 1$
$y = \pm\sqrt{x - 1}$

Si $x < 0$
$f(x) = x + 1, \ rg\, f = (-\infty, 1)$
$x = y + 1$
$y = x - 1$

Construimos la regla de correspondencia:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

Graficando:



Nótese que cuando se despejó $y = \pm\sqrt{x-1}$, se seleccionó la raíz positiva. El lector puede analizar que y es la variable del rango de f^{-1} que corresponde al dominio de f, en x^2+1, por tanto y debe ser positiva.

3.12 Funciones Polinomiales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar los elementos que constituyen un polinomio de grado n.
* Dadas dos funciones polinomiales, realizar operaciones entre ellas.
* Dadas dos funciones polinomiales, dividirlas y especificar el polinomio dividendo, divisor, cociente y residuo.
* Dada una división entre polinomios, obtener el residuo de la división empleando el teorema del residuo.
* Dada una división entre polinomios, reconocer si es exacta empleando el teorema del factor.
* Dada una ecuación polinomial, analizar e interpretar sus raíces.
* Dado un polinomio definido sobre un intervalo cerrado, inspeccionar la existencia de un cero en ese intervalo.
* Definir una función racional.

En este mismo capítulo hemos construido las gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, este tipo de funciones pertenecen a la clase de las funciones polinomiales.

Definición 3.23 (Función Polinomial)

Una función polinomial es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son números reales, y $n \in \mathbb{Z}^+$. El dominio de esta función lo constituyen todos los números reales.

El grado de una función polinomial es el mayor exponente de la variable presente en el polinomio, en este caso el exponente n, si $a_n \neq 0$.

Ejemplo 3.36 Identificación de funciones polinomiales.

Determinar cuáles de las siguientes funciones son polinomiales:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $g(x) = \sqrt{x-1}, \forall x \geq 1.$

c) $h(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$

d) $m(x) = \dfrac{x-2}{x+1}, \forall x \neq -1.$

Solución:

a) f es una función polinomial de grado tres.

b) g no es una función polinomial. La variable $(x - 1)$ está elevada a la potencia $\frac{1}{2}$, que es un número fraccionario.

c) h es una función polinomial de grado cero.

d) m no es una función polinomial, ya que está dada por el cociente entre dos polinomios.

3.12.1 Gráficas de Funciones Polinomiales

Definición 3.24 (Función Potencia)

Una función potencia de grado n es de la forma:

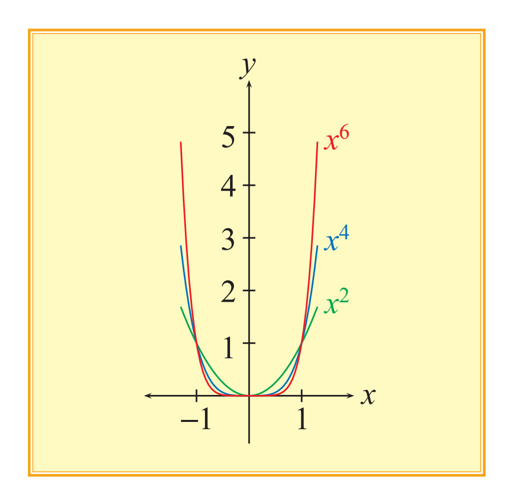
$$f(x) = ax^n$$

donde $dom\, f = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

La gráfica de una función potencia de grado 1, $f(x) = ax$, es una recta con pendiente a que contiene al origen de coordenadas. El rango de esta función incluye todos los reales.

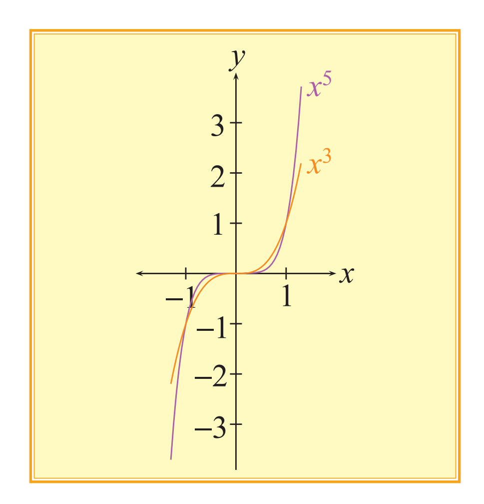
La gráfica de una función potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola que contiene al origen de coordenadas y que es cóncava hacia arriba si $a > 0$ o cóncava hacia abajo si $a < 0$.

La gráfica de una función potencia de grado n, $f(x) = ax^n$, siendo n un número par y mayor que uno, tiene un comportamiento similar al de la función cuadrática.



A medida que n crece, la función potencia sufre un alargamiento vertical cuando $|x| > 1$ y una compresión vertical cuando $|x| < 1$. El rango de estas funciones incluye el cero y todos los reales positivos.

La gráfica de una función potencia de grado n, $f(x) = ax^n$, siendo n un número impar y mayor que uno, tiene un comportamiento similar al de la función cúbica.



A medida que n crece, la función potencia sufre un alargamiento vertical cuando $|x| > 1$, y una compresión vertical cuando $|x| < 1$. El rango de estas funciones incluye todos los reales.

Para graficar la mayoría de las funciones polinomiales de grado 3 o superior, se necesitan otras técnicas. Sin embargo, la gráfica de toda función polinomial es **suave** y **continua**. Por suave queremos decir que la gráfica no tiene esquinas o puntas; continua significa que la gráfica no tiene saltos y que puede ser graficada sin interrupciones.

Si se factoriza completamente una función polinomial f, es fácil resolver la ecuación polinómica $f(x) = 0$ y localizar las intersecciones con el eje X. En general, si f es una función polinomial y r es un número real para el cual $f(r) = 0$, entonces r es llamado cero o raíz de f. Por lo tanto, los ceros reales de la función polinomial son las intersecciones de su gráfica con el eje X.

Si el mismo factor $(x - r)$ aparece más de una vez, entonces r es llamado cero repetido o cero múltiple de f.

Definición 3.25 (Cero de Multiplicidad m)

Si $(x - r)^m$ es un factor de la función polinomial f y $(x - r)^{m+1}$ no es factor de f, entonces r es llamado cero de multiplicidad m de f.

Si r es un cero de multiplicidad par, el signo de f no cambia localmente de un lado al otro de r. La gráfica interseca al eje X en r.

Si r es un cero de multiplicidad impar, el signo de f cambia localmente de un lado al otro de r. La gráfica interseca al eje X en r.

Ejemplo 3.37 Identificación de ceros y de sus multiplicidades.

Identifique la multiplicidad de los ceros de la función polinomial:

$$f(x) = (x - 3)\,(x + 2)^2\left(x - \frac{1}{3}\right)^4,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

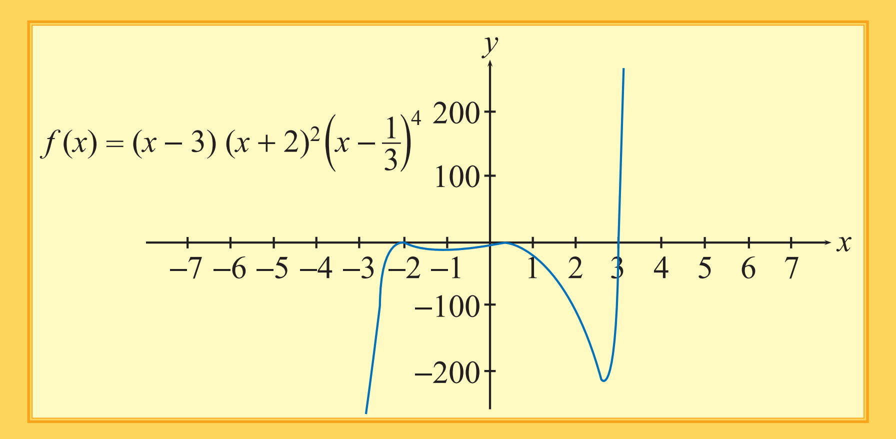
Solución:

3 es un cero de multiplicidad 1.

-2 es un cero de multiplicidad 2.

$\frac{1}{3}$ es un cero de multiplicidad 4.

Podemos bosquejar la gráfica de f:



Ejemplo 3.38 Identificación de ceros y de sus multiplicidades.

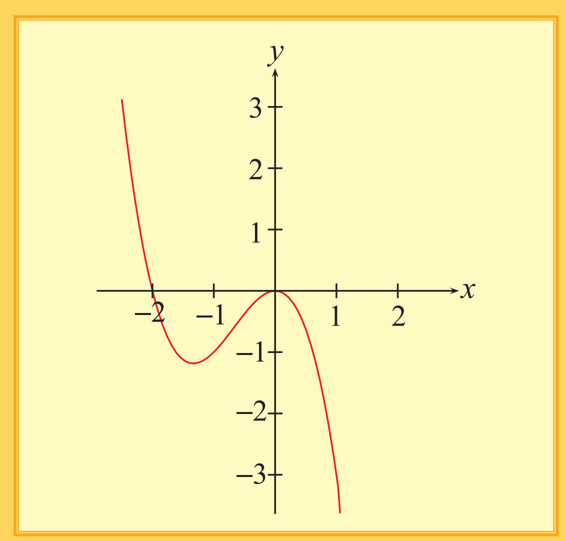
Bosquejar la gráfica de $f(x) = -x^2(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

0 es una raíz de multiplicidad 2. En $x = 0$, la gráfica de f interseca al eje X.
-2 es un cero de multiplicidad 1. En $x = -2$, la gráfica de f interseca al eje X.

Para $x \in (-\infty, -2)$, f es positiva.
Para $x \in (-2, 0)$, f es negativa.
Para $x \in (0, +\infty)$, f es negativa.

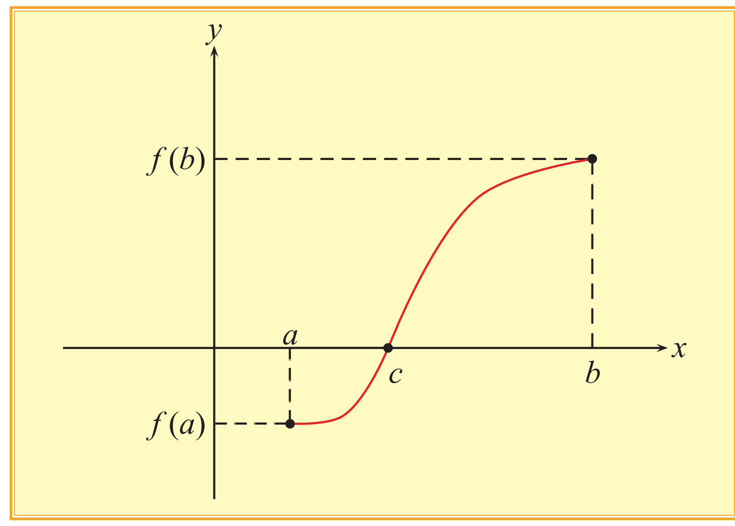
La gráfica de la función f sería:



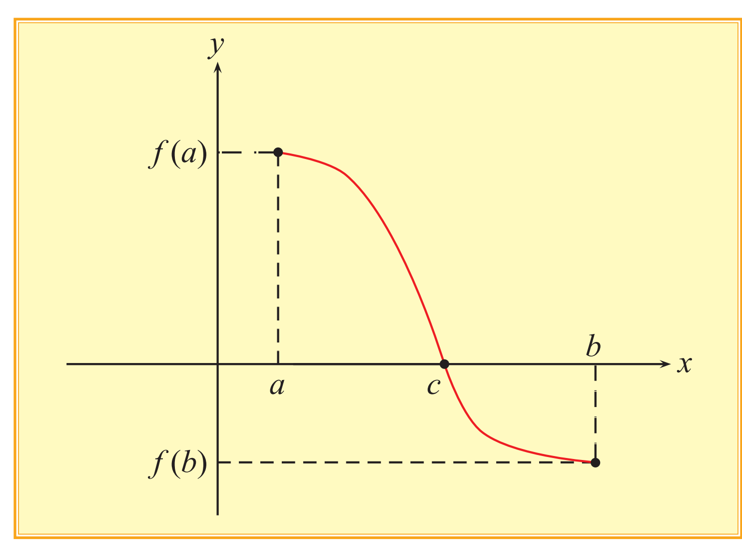
Teorema 3.3 (Valor intermedio)

Sea f una función polinomial. Si $a < b$ y además $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces hay al menos un cero de f entre a y b.

Aunque la demostración de este teorema demanda métodos avanzados de cálculo, es fácil verificar por qué es verdadero en la siguiente figura.



$(f(a) < 0) \wedge (f(b) > 0)$



$(f(a) > 0) \wedge (f(b) < 0)$

Ejemplo 3.39 Aplicación del teorema del Valor Intermedio.

Con respecto a la función polinomial $f(x) = 8x^4 - 2x^2 + 5x - 1$, demuestre que tiene una raíz en $[0, 1]$.

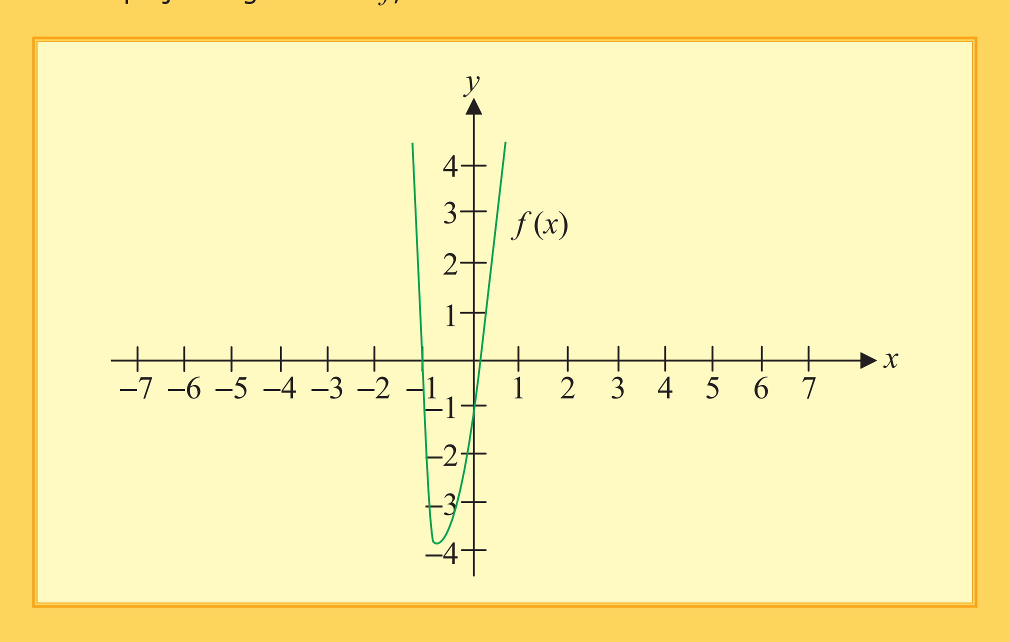
Solución:

Lo que debemos verificar es que hay un cambio de signo al evaluar la función en $x = 0$ y $x = 1$.

$f(0) = -1$
$f(1) = 8(1)^4 - 2(1)^2 + 5(1) - 1 = 8 - 2 + 5 - 1 = 10$

Como $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$, entonces efectivamente hay una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

Al bosquejar la gráfica de f, se obtiene:



3.12.2 Operaciones con funciones polinomiales

De las operaciones que pueden realizarse con las funciones polinomiales: suma, diferencia, producto o cociente, nos interesa de manera particular esta última. Las tres primeras operaciones se realizan de acuerdo a las definiciones dadas en la sección 3.9 de este capítulo, empleando las mismas reglas para realizar operaciones con expresiones algebraicas.

Ejemplo 3.40 Operaciones con funciones polinomiales.

Dadas las funciones $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$ y $g(x)=-x^3-x^2+x+3$, encuentre: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$.

Solución:

- $$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (3x^3-2x^2+x+2)+(-x^3-x^2+x+3)\\ (f+g)(x) &= 2x^3-3x^2+2x+5,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(f-g)(x) &= (3x^3-2x^2+x+2)-(-x^3-x^2+x+3)\\ (f-g)(x) &= 4x^3-x^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(fg)(x) &= (3x^3-2x^2+x+2)(-x^3-x^2+x+3)\\ &= -3x^6-3x^5+3x^4+9x^3+2x^5+2x^4-2x^3-6x^2-x^4-x^3+x^2\\ &\quad +3x-2x^3-2x^2+2x+6\\ (fg)(x) &= -3x^6-x^5+4x^4+4x^3-7x^2+5x+6,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(f/g)(x) &= (3x^3-2x^2+x+2)\div(-x^3-x^2+x+3)\\ (f/g)(x) &= -3+\frac{-5x^2+4x+11}{-x^3-x^2+x+3};\ \forall x\in\mathbb{R},\ x^3+x^2-x-3\neq 0\end{aligned}$$

En la división hay cuatro elementos esenciales que serán frecuentemente utilizados en futuras aplicaciones. Estos son el polinomio dividendo, el divisor, el cociente y el residuo, tal como en la división de números reales.

Esto permite que la división entre dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ pueda expresarse de la forma:

$$p(x)=c(x)q(x)+r(x)$$

donde $c(x)$ y $r(x)$ son el polinomio cociente y residuo de la división respectivamente.

Respecto a los grados de los polinomios, hay que recalcar que para sumar dos polinomios, restarlos o multiplicarlos, pueden tener diferentes grados, mientras que para la división es necesario que el dividendo tenga un grado no menor al del divisor. De esta forma, si el grado del dividendo es n y el del divisor es m, el cociente tendrá grado $n-m$ y el residuo será de grado $m-1$.

La división entre polinomios da lugar a una nueva función denominada función racional.

Definición 3.26 (Función Racional)

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios. Se dice que la función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con dominio $\mathbb{R} - \{x \,/ q(x) = 0\}$ es una función racional.

Es decir, una función racional es aquella que puede expresarse como la división de dos polinomios.

De acuerdo a la representación de una división entre polinomios, la función racional también puede expresarse como:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

División Sintética

Para encontrar el cociente y el residuo, cuando se divide una función polinomial de mayor grado o igual a 1 entre $g(x) = x - c$, una versión abreviada de la división tradicional, llamada división sintética, hace la tarea más sencilla.

Para observar cómo se realiza la división sintética, usaremos la división tradicional al dividir la función polinomial $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$ entre $g(x) = x - 2$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -3x^2 & -8x & +4 & x-2 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+5x+2 \\
\cline{1-2}
 & 5x^2 & -8x & & \\
 & -5x^2 & +10x & & \\
\cline{2-3}
 & & 2x & +4 & \\
 & & -2x & +4 & \\
\cline{3-4}
 & & & 8 &
\end{array}$$

El proceso de la división sintética surge de reescribir la división tradicional en forma compacta, en la cual no se considera la variable x, sino solamente los coeficientes de la función polinomial. Considere los siguientes pasos:

1. Escriba los coeficientes de la función polinomial $f(x)$ en potencias descendentes de x en el primer renglón y complete con ceros en caso de no existir algún coeficiente.
2. Traslade el término de la izquierda del primer renglón al tercer renglón.
3. Multiplique dicho término por el valor c de la función polinomial $g(x)$, coloque este resultado bajo la segunda columna del segundo renglón y efectúe la suma algebraica.
4. Este nuevo resultado colóquelo en la segunda columna del tercer renglón.

5. Repita los pasos 3 y 4 para los siguientes términos hasta completar la operación.
6. La última entrada del tercer renglón representa el residuo de la división.
7. Las otras entradas representan los coeficientes en orden descendente del cociente de la división, cuyo grado es uno menos que el del dividendo.

Ejemplo 3.41 División sintética.

Utilice la division sintética para dividir la función polinomial $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$ entre $g(x) = x - 2$.

Solución:

	4	−3	−8	4
2		8	10	4
	4	5	2	8

Como resultado de la división, se obtiene:

- Cociente: $4x^2 + 5x + 2$
- Residuo: 8

Ejemplo 3.42 División sintética.

Utilice la división sintética para dividir la función polinomial $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$ entre $g(x) = x + 3$.

Solución:

	4	0	−3	0	1
−3		−12	36	−99	297
	4	−12	33	−99	298

Como resultado de la división, se obtiene:

- Cociente: $4x^3 - 12x^2 + 33x - 99$
- Residuo: 298

Esto nos induce al siguiente teorema, que facilita la división de una función polinomial entre una lineal.

Teorema 3.4 (Teorema del residuo)

Sea f una función polinomial, si $f(x)$ es dividida entre $(x - c)$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo 3.43 Teorema del residuo.

Encontrar el residuo si $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se divide entre:
a) $x - 2$
b) $x + 3$

Solución:

a) $f(2) = (2)^3 - (2)^2 + 2(2) + 4$
$f(2) = 8 - 4 + 4 + 4$
$f(2) = 12$

b) $f(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 + 2(-3) + 4$
$f(-3) = -27 - 9 - 6 + 4$
$f(-3) = -38$

Ejemplo 3.44 Teorema del residuo.

Determine la suma de los valores de k_1 y k_2 para que el polinomio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + k_1x + k_2$ sea divisible por el trinomio $q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solución:

Primer método:

Realizamos la división por el método tradicional de $p(x)$ por $q(x)$:

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 5x^3 + 2x^2 + k_1x + k_2 & \underline{|\, x^2 - 5x + 6} \\
\underline{-x^4 + 5x^3 - 6x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2 - 4 \\
-4x^2 + k_1x + k_2 & \\
\underline{+4x^2 - 20x + 24} & \\
(k_1 - 20)x + (k_2 + 24) &
\end{array}$$

Puesto que la división debe ser exacta, el residuo será cero, a partir de lo cual se puede concluir que:

$k_1 - 20 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 20$
$k_2 + 24 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -24$

Segundo método:

Debido a que $p(x)$ es divisible por $f(x)$, factorizando $q(x)$ se obtiene:
$q(x) = x^2 - 5x + 6$
$q(x) = (x - 3)(x - 2)$

Aplicamos el teorema del residuo, según el cual al ser $p(x)$ divisible por $q(x)$, $p(3) = p(2) = 0$, con lo que resultan las ecuaciones (I) y (II):

$p(3) = (3)^4 - 5(3)^3 + 2(3)^2 + k_1(3) + k_2 = 0$

$p(3) = 81 - 135 + 18 + 3k_1 + k_2 = 0$

$3k_1 + k_2 = 36$ (I)

$p(2) = (2)^4 - 5(2)^3 + 2(2)^2 + k_1(2) + k_2 = 0$

$p(2) = 16 - 40 + 8 + 2k_1 + k_2 = 0$

$2k_1 + k_2 = 16$ (II)

Resolviendo el sistema con las ecuaciones (I) y (II), se concluye también que:

$(k_1 = 20) \wedge (k_2 = -24)$.

Ejemplo 3.45 Aplicación del teorema del residuo.

Al dividir cierto polinomio $p(x)$ por $(x - 1)$, el residuo es 2; y al dividirlo por $(x - 2)$, el residuo es 5. Determine el residuo al dividir $p(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$.

Solución:

Si analizamos la división de un polinomio por otro, notaremos que el grado del polinomio del residuo es menor en uno al grado del polinomio del divisor.

Como en este caso se va a dividir $p(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$, el grado del residuo debe ser 1, es decir, $r(x)$ tendrá forma lineal.

$r(x) = ax + b$

Por lo tanto, se cumple que: $p(x) = c(x)(x - 1)(x - 2) + r(x)$, siendo $c(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo.

Esto es, $p(x) = c(x)(x - 1)(x - 2) + ax + b$.

Aplicando el teorema del residuo, se tiene que:

$p(1) = a + b$
$p(2) = 2a + b$

Por condición del problema $p(1) = 2$ y $p(2) = 5$, con lo que se puede construir el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Obteniéndose los siguientes valores de a y b:

$(a = 3) \wedge (b = -1)$.

Es decir, el residuo será:

$r(x) = 3x - 1$

En algunos problemas sobre división de polinomios, es de interés saber si ésta es exacta; dicho de otra forma, si el polinomio divisor es factor del polinomio dividendo, o el polinomio dividendo es divisible para el polinomio divisor.

Tal como ocurre con los números, una división entre polinomios es exacta si y sólo si su residuo es cero. De acuerdo a esto, se puede deducir un teorema para el caso de las divisiones exactas, conocido como el teorema del factor.

Teorema 3.5 (Teorema del factor)

Sea f una función polinomial, entonces $(x - c)$ es un factor de $f(x)$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo 3.46 Teorema del factor.

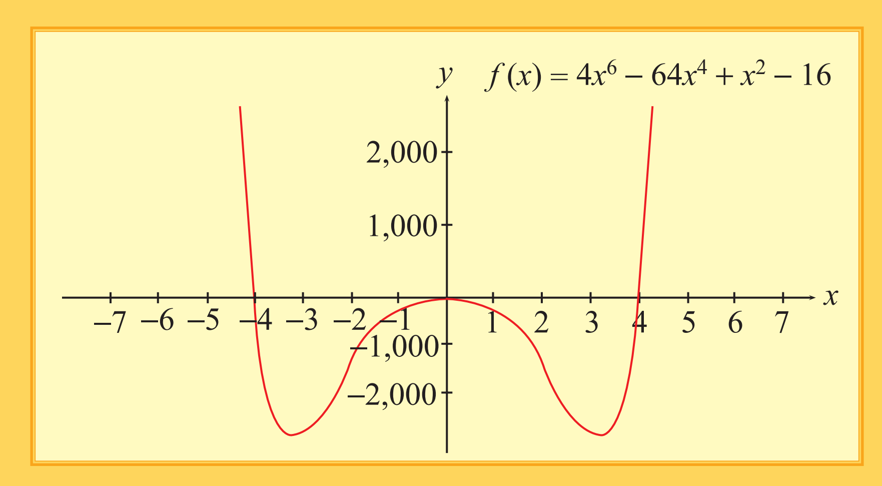
Utilice el teorema del factor para verificar que $x + 4$ es un factor de la función $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 16$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

$f(-4) = 4(-4)^6 - 64(-4)^4 + (-4)^2 - 16$
$f(-4) = 16384 - 16384 + 16 - 16 = 0$

Como $f(-4) = 0$, concluimos por el teorema del factor que $x + 4$ es un factor de la función polinomial $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 16$.

Pero también $f(4) = 0$, porque f es una función par.



Puesto que este teorema es una equivalencia lógica, en caso de que $f(c) \neq 0$, se concluye que la división no es exacta, y por tanto, $(x - c)$ no es factor de f.

Forma anidada de una función polinomial

Considere la función polinomial $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$, podemos factorizar $f(x)$ y se puede expresar como $f(x) = [(x - 1)\,x + 2]\,x + 4$. Observe que esta forma sólo contiene expresiones lineales. Una función polinomial escrita de esta manera se dice que está en forma anidada.

Si queremos evaluar f en $x = 4$:

- Sin forma anidada, $f(4) = 4^3 - 4^2 + 2(4) + 4 = 64 - 16 + 8 + 4 = 60$. Se tienen que realizar 6 multiplicaciones y 3 sumas algebraicas.
- Con forma anidada, $f(4) = [(4 - 1)4 + 2]\,4 + 4 = 60$. Se tienen que realizar 2 multiplicaciones y 3 sumas algebraicas.

La ventaja de evaluar un polinomio que está en forma anidada, es que se evita realizar la potenciación de un número, lo que en una calculadora o computadora puede causar graves errores de redondeo. Además, las computadoras pueden realizar la suma mucho más rápido que la multiplicación, y la forma anidada necesita de menos multiplicaciones que la forma ordinaria de un polinomio.

3.12.3 Raíces de una ecuación polinómica

Los ceros reales de una función polinomial f son las soluciones reales, si las hay, de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ y gráficamente representan las intersecciones de f con el eje X.

Ya hemos visto la importancia de localizar los ceros para construir la gráfica de una función polinomial. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los ceros de una función polinomial son difíciles de encontrar, ya que no hay fórmulas sencillas disponibles como en el caso de la ecuación cuadrática. Para encontrar los ceros de una función polinomial, se dispone de otros teoremas: del número de ceros, regla de los signos de Descartes, de los ceros racionales y el teorema fundamental del álgebra.

Teorema 3.6 (Teorema del número de ceros)

Una función polinomial no puede tener más ceros que el valor de su grado.

La demostración está basada en el teorema 3.5. Si r es un cero de una función polinomial f, entonces $f(r) = 0$ y $(x - r)$ es un factor de $f(x)$, por lo tanto, cada cero corresponde a un factor de grado 1. El resultado es consecuencia de que f no puede tener más factores de primer grado que el valor de su grado.

Teorema 3.7 (Regla de los signos de Descartes)

Sea f una función polinomial:

- El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, o es igual que ese número menos un entero par.
- El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$, o es igual que ese número menos un entero par.

Ejemplo 3.47 Regla de los signos de Descartes.

Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros positivos y negativos puede tener la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$
Tiene una variación de signo, por lo tanto, puede tener una raíz positiva.
$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - 5(-x) - 6 = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ tiene dos variaciones de signo, por lo tanto, puede tener dos raíces negativas o ninguna.

Aunque realmente no hemos encontrado los ceros en este ejemplo, sabemos algo acerca de su número y cuántos podrían ser positivos o negativos. El siguiente teorema proporciona información acerca de los ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema 3.8 (Teorema de los ceros racionales)

Sea f una función polinomial de grado 1 o superior, de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$$

donde cada coeficiente es un entero. Si $\frac{p}{q}$ irreducible es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de a_n.

Ejemplo 3.48 Teorema de los ceros racionales.

Utilice el teorema de los ceros racionales para determinar las posibles raíces de la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

$a_0 = -6 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$a_n = 1 \Rightarrow q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ (son las posibles raíces).

Probando para los primeros valores con el teorema del residuo:

- $f(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = -8 < 0$
- $f(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$

Con el último valor y aplicando la división sintética:

	1	2	−5	−6
2		2	8	6
	1	4	3	0

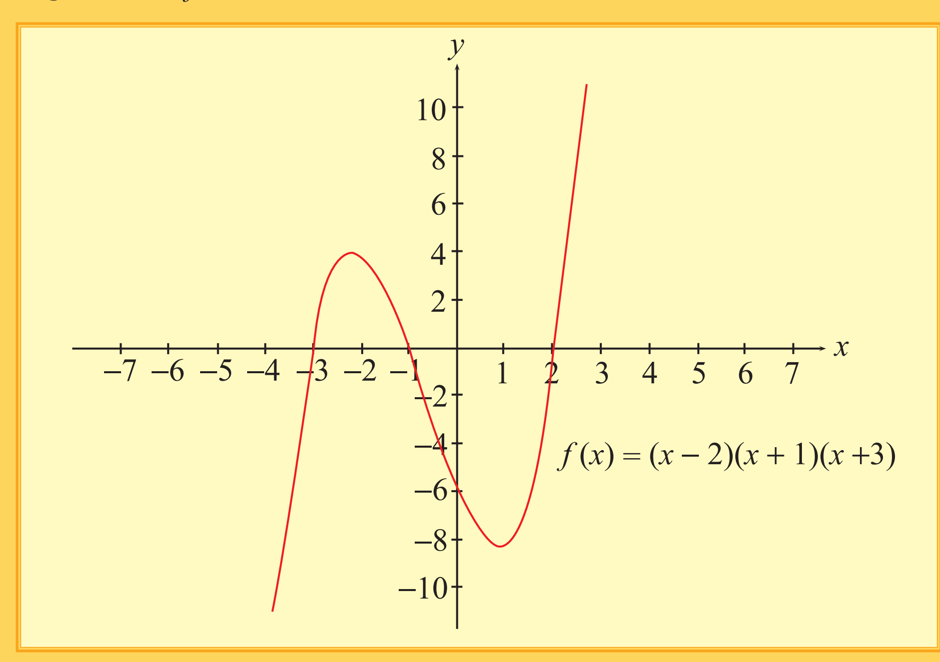
Con lo cual, la función puede ser expresada así:

$$f(x) = (x-2)(x^2+4x+3)$$

Factorizando: $f(x) = (x-2)(x+1)(x+3)$.

Las raíces son: $2, -1, -3$.

La gráfica de f sería:



La ventaja de utilizar este teorema es que se reduce la cantidad de posibles raíces a un conjunto de menor cardinalidad, por lo que hay que probar para cada posible cero. Note que puede ocurrir que no hayan ceros racionales.

Ejemplos 3.49 Ceros de una función polinomial.

Determinar las raíces de la función polinomial $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

Con el teorema del número de ceros, como f es de grado 4, tiene cuando más, 4 raíces.

Mediante la regla de los signos de Descartes:

- $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$, las dos variaciones de signo indican que pueden haber dos raíces positivas o ninguna.

- $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^3 - 6(-x)^2 + 4(-x) + 8 = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$, las dos variaciones de signo indican que pueden haber dos raíces negativas o ninguna.

Aplicando el teorema de los ceros racionales restringimos el conjunto de valores posibles:

- $a_0 = 8 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
- $a_n = 1 \Rightarrow q = \pm 1$
- $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ (son las posibles raíces racionales).

Probando para los primeros valores con el teorema del residuo:

- $f(1) = 1 - 1 - 6 + 4 + 8 = 6 > 0$
- $f(2) = 16 - 8 - 24 + 8 + 8 = 0$

Con el último valor y aplicando la división sintética:

	1	−1	−6	4	8
2		2	2	−8	−8
	1	1	−4	−4	0

Con lo cual, la función puede ser expresada así:

$$f(x) = (x - 2)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$$

Factorizando:

$f(x) = (x - 2)\,[(x^3 + x^2) + (-4x - 4)]$
$f(x) = (x - 2)\,[x^2(x + 1) - 4(x + 1)]$
$f(x) = (x - 2)\,(x^2 - 4)(x + 1)$
$f(x) = (x - 2)^2(x + 2)(x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Las raíces son: 2 de multiplicidad 2, -1 y -2, cada una de multiplicidad 1.

3.13 Funciones Exponenciales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Identificar los elementos que definen una función exponencial.
* Dada una función exponencial, discutir sus características y el efecto de su base sobre éstas.
* Dada la gráfica de la función exponencial creciente o decreciente estándar, construir otras gráficas aplicando técnicas de graficación.
* Dadas las condiciones de un problema real, resolverlo con la ayuda de una función exponencial.

El estudio realizado hasta ahora ha contemplado solamente funciones relativamente simples, como las polinomiales y racionales, es decir, las denominadas **funciones algebraicas** que pueden expresarse en términos de sumas, restas, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios.

Las funciones que no son algebraicas se denominan **trascendentes** (trascienden, esto es, están más allá de las funciones algebraicas).

En esta sección, analizaremos la primera función trascendente, la cual se denomina función exponencial, que es muy importante en matemáticas porque permite describir crecimientos o decrecimientos en distintas situaciones de la vida diaria.

Muchos de los problemas con los que nos encontramos están relacionados con las poblaciones y sus cambios a través del tiempo. A todos nos conciernen los problemas asociados con el crecimiento de la población mundial. Nuestros suministros de alimentos se ven afectados por el crecimiento y el comportamiento de las bacterias, las langostas y los roedores.

Incluso las poblaciones inanimadas nos afectan, los virus informáticos se propagan, causando mucho daño al eliminar o alterar información de la computadora.

Las cantidades decrecientes de sustancias radioactivas provocan problemas de almacenamiento y pérdidas, con los consiguientes resultados medioambientales, mientras que el agotamiento de los recursos naturales causa otros problemas. De manera similar, pero de una forma más favorable, el incremento de dinero en una cuenta bancaria nos puede proporcionar recursos para enriquecer nuestras vidas.

El crecimiento exponencial es el concepto matemático fundamental que hay detrás del crecimiento o decrecimiento de estas magnitudes, y es importante saber cómo se modelan estas relaciones para analizar y resolver problemáticas del mundo real.

Definición 3.27 (Función Exponencial)

Se conoce como función exponencial a la función f de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}^+ \wedge (a \neq 1)$$

En esta definición, considere que a representa la base y x el exponente.

Con el propósito de tener una idea de cómo luce la gráfica de una función exponencial, vamos a analizar los diferentes valores que puede tomar la base a, es decir, cuando $a > 1$ o cuando $0 < a < 1$.

$a > 1$

Si consideramos un valor en este intervalo, por ejemplo $a = 2$, tendremos la siguiente tabla de valores:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$

La representación gráfica de esta función exponencial se encuentra en la figura 3.22.

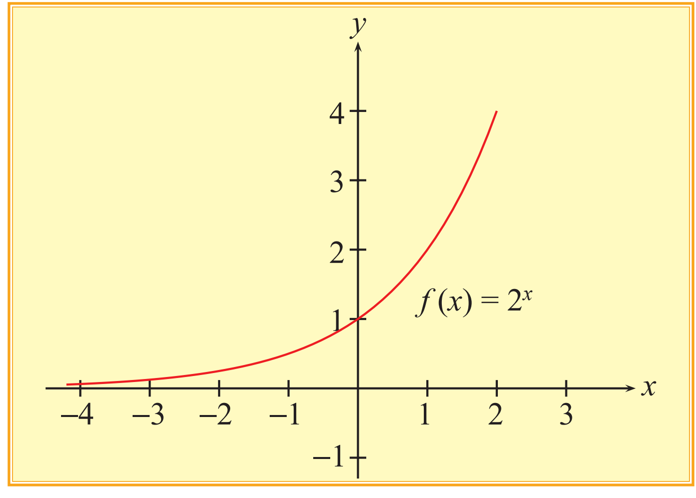


Figura 3.22: Gráfica de $f(x) = 2^x$.

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = 3$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = 5$ o $a = 10$.

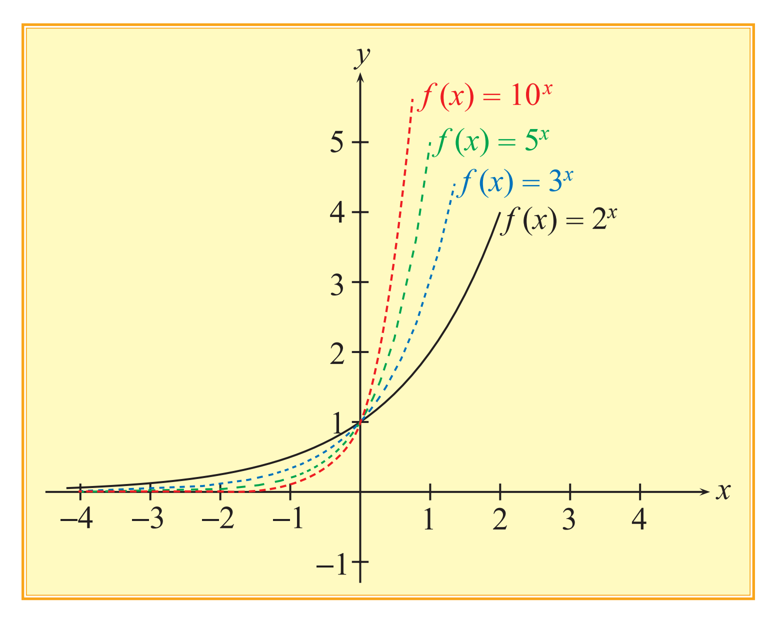


Figura 3.23: Funciones Exponenciales Crecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 3.23, notaremos que están definidas para todos los reales, su rango es $\mathbb{R}^+$, son inyectivas, estrictamente crecientes, intersecan al eje Y en el punto $(0, 1)$ y están acotadas inferiormente por $y = 0$.

Cuando $x > 0$ y el valor de a se incrementa, la función exponencial experimenta un alargamiento vertical. Cuando $x < 0$ y el valor de a se incrementa, la función exponencial experimenta una compresión vertical.

$0 < a < 1$

Si consideramos un valor en este intervalo, por ejemplo $a = \frac{1}{2}$, tendremos la siguiente tabla de valores:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to +\infty$	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\to 0$

La representación gráfica de esta función exponencial se encuentra en la figura 3.24.

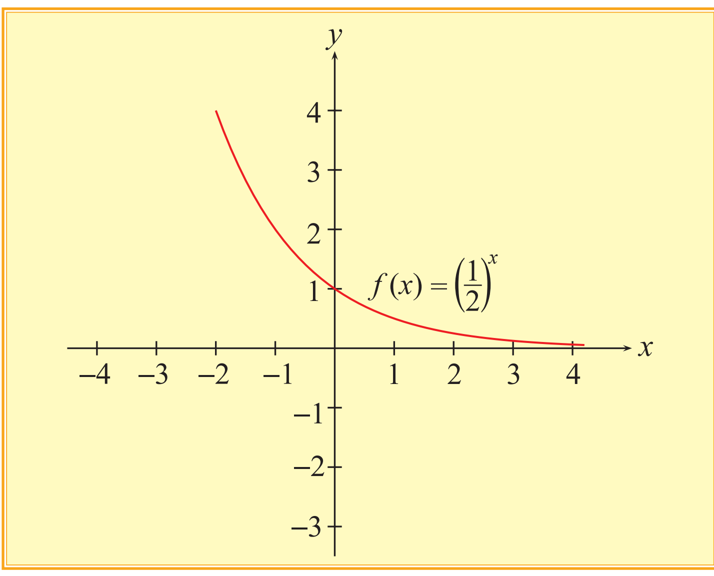


Figura 3.24: Gráfica de $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a=\frac{1}{3}$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a=\frac{1}{5}$ o $a=\frac{1}{10}$.

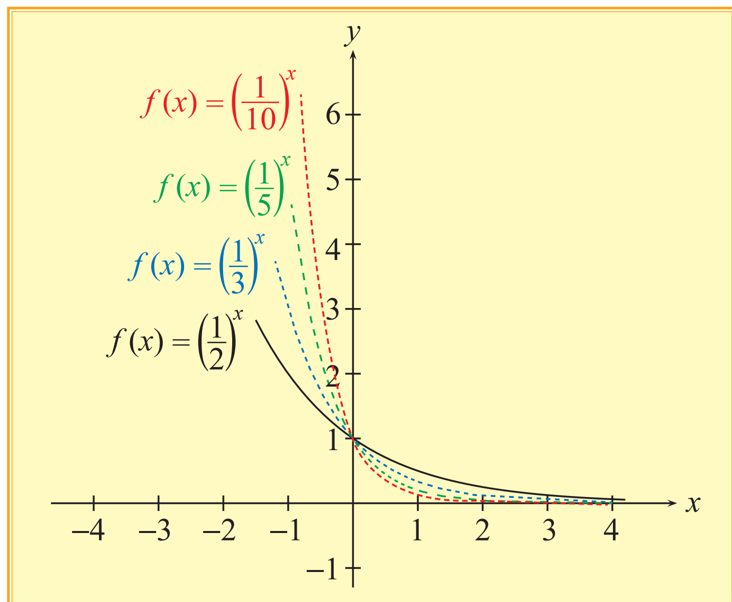


Figura 3.25: Funciones Exponenciales Decrecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 3.25, notaremos que están definidas para todos los reales, su rango es $\mathbb{R}^+$, son inyectivas, estrictamente decrecientes, intersecan al eje Y en el punto $(0, 1)$ y están acotadas inferiormente por $y = 0$.

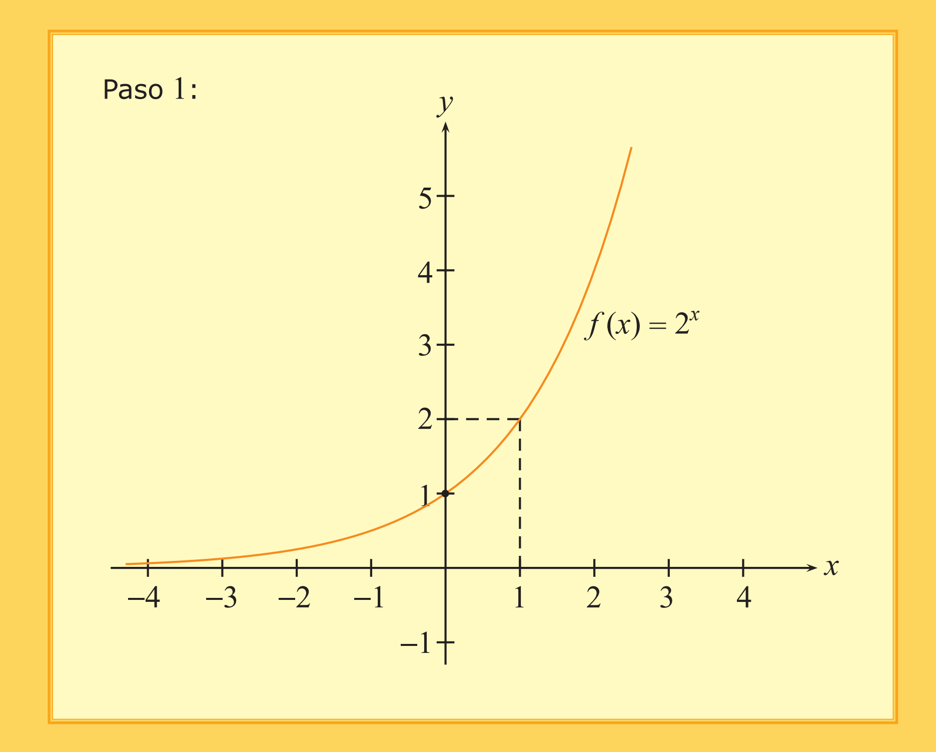
Cuando $x > 0$ y el valor de a disminuye, la función exponencial experimenta una compresión vertical. Cuando $x < 0$ y el valor de a disminuye, la función exponencial experimenta un alargamiento vertical.

Ejemplo 3.50 Función exponencial.

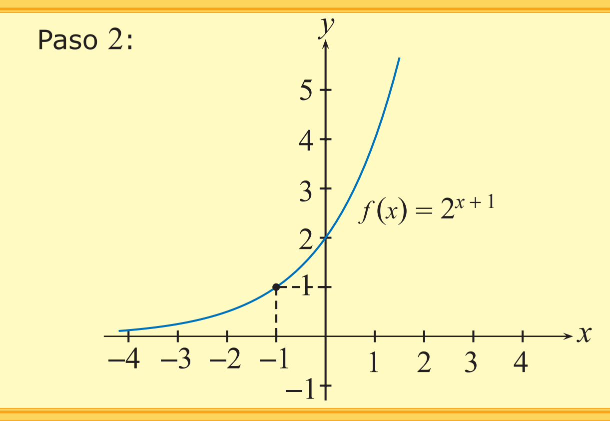
Grafique la función $f(x) = 1 - 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}$ e indique sus características.

Solución:

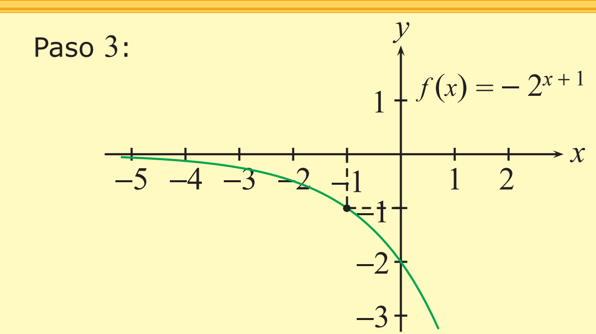
- Paso 1: Identificamos la función original: $f(x) = 2^x$.
- Paso 2: Desplazamos la función original una unidad hacia la izquierda.
- Paso 3: Reflejamos esta última función con respecto al eje X.
- Paso 4: Desplazamos esta función reflejada una unidad hacia arriba.



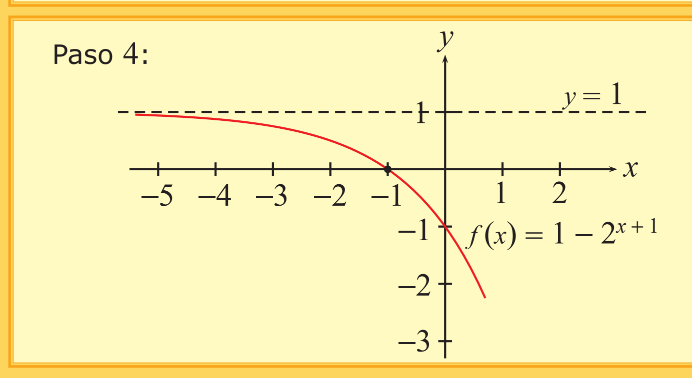
Paso 2:



Paso 3:



Paso 4:



$f(x) = 1 - 2^{x+1}$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R}$
- $rg\, f = (-\infty, 1)$
- Inyectiva, estrictamente decreciente, acotada superiormente por $y = 1$.
- Intersección con el eje X: $(-1, 0)$.
- Intersección con el eje Y: $(0, -1)$.

3.13.1 Función Exponencial Natural

En la definición de la función exponencial se dijo que la base podía ser cualquier número real positivo distinto de 1, pero hay algunas bases que se utilizan con mayor frecuencia.

Por ejemplo, las bases 2 y 10 son utilizadas en algunas aplicaciones y quizás la más importante de todas sea el número irracional e.

El número e se define como el valor al que tiende la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende a $+\infty$:

$$\begin{aligned}
n=1 &\Rightarrow (1+1)^1 = 2\\
n=2 &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\\
n=3 &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.3\\
n=4 &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.441\\
n=5 &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2.488\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045235602874...$$

El número $\frac{1}{e}$ también es irracional, su valor es:

$$0{,}3678794411714423215955 23...$$

La función exponencial natural es la función f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es $f(x) = e^x$.

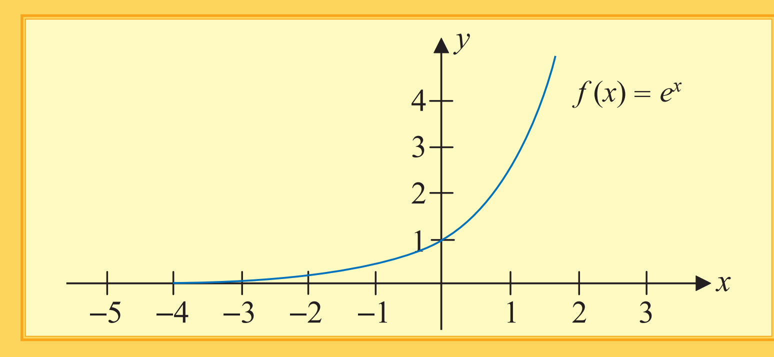
Ejemplo 3.51 Función exponencial natural.

Bosqueje la gráfica de $f(x) = e^{-|x|} + 2$ e indique sus características.

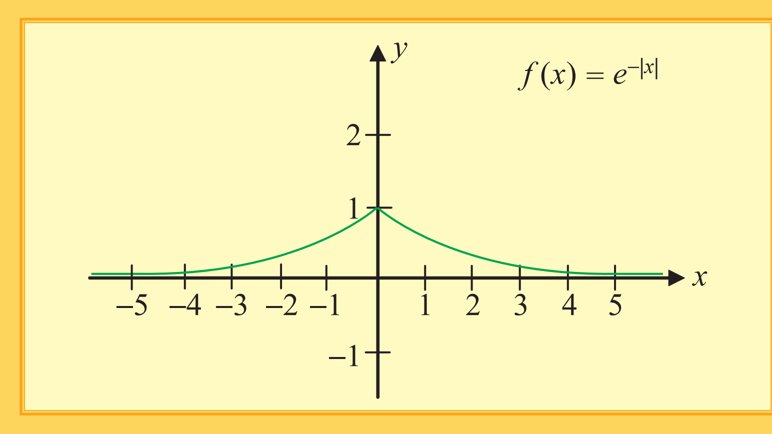
Solución:

La gráfica de la función se puede obtener mediante los siguientes pasos:

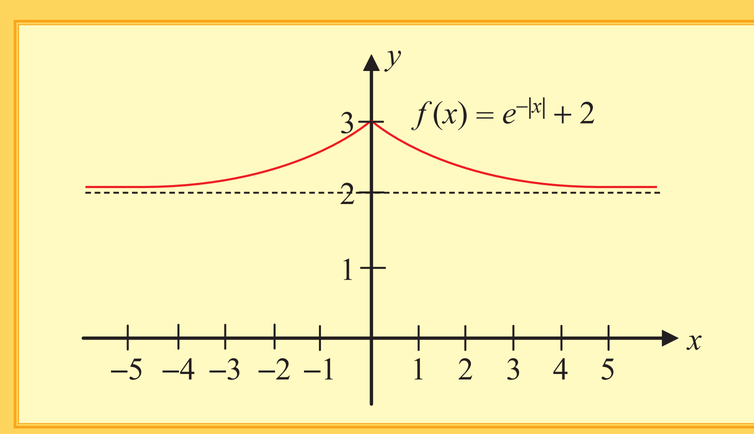
Paso 1: Se grafica la función primitiva $f(x) = e^x$.



Paso 2: Se grafica la función $f(x) = e^{-|x|}$ (reflexión cuando $x < 0$ de $f(x) = e^{x}$ con el eje Y).



Paso 3: Se grafica la función $f(x) = e^{-|x|} + 2$ (desplazamiento de 2 unidades hacia arriba).



$f(x) = e^{-|x|} + 2$ tiene las siguientes características:

- $dom\ f = \mathbb{R}$.
- $rg\ f = (2, 3]$.
- f es par.
- Creciente en $\mathbb{R}^-$.
- Decreciente en $\mathbb{R}^+$.
- Asíntota horizontal en $y = 2$.
- Acotada superiormente por la recta $y = 3$.

Ejemplo 3.52 Aplicación de la función exponencial.

Un elemento radioactivo decae de modo que después de t días, su masa en miligramos está dada por: $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$; donde N_0 es la masa inicial en miligramos y λ es la constante de decaimiento que depende del elemento particular que se trate.

Si $N_0 = 100$ miligramos y $\lambda = 0.5$ determine:

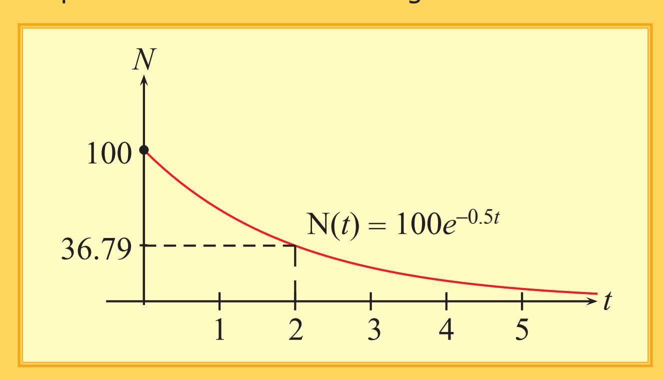
a) La cantidad de miligramos que están presentes inicialmente.
b) La cantidad de miligramos que están presentes después de 2 días.
c) La gráfica de la función $N(t)$.

Solución:

a) La cantidad inicial del elemento se da cuando $t = 0$, por lo tanto, debemos evaluar $N(0)$, cuyo resultado es 100 miligramos.

b) Después de 2 días, debemos evaluar $N(2) = 100e^{-(0.5)(2)} = 100e^{-1} \approx 100(0.3679) \approx 36.79 \approx$ miligramos.

c) Puesto que la variable t representa la variación del tiempo, debemos considerar que su dominio es $t \geq 0$. La gráfica de la función $N(t)$ sería:



Ejemplo 3.53 Aplicación de funciones exponenciales.

En una comunidad, la propagación de cierto virus de influenza fue tal que, t semanas después de su brote, $n(t)$ personas se habían contagiado, en base a la siguiente expresión:

$$n(t) = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-t}}$$

a) ¿Cuántas personas tenían la influenza al momento del brote?
b) ¿Cuántas personas contrajeron la enfermedad después de 1 semana?

Solución:

a) Debemos evaluar $n(t)$ en $t = 0$, así:

$$n(0) = \frac{45\ 000}{1 + 224e^{0}}$$

$$n(0) = \frac{45\ 000}{1 + 224}$$

$$n(0) = \frac{45\ 000}{225} = 200$$

Con lo que se concluye que 200 personas habían contraído la enfermedad en el momento del brote.

b) Debemos ahora evaluar $n(t)$ en $t = 1$, así:

$$n(1) = \frac{45\ 000}{1 + 224e^{-1}}$$

$$n(1) \approx \frac{45\ 000}{1 + 224\ (0.36)}$$

$$n(1) \approx 551.20$$

Con lo que aproximadamente 551 personas habían contraído la enfermedad después de 1 semana.

La inversa de la función exponencial se la conoce como la función logarítmica, la cual será estudiada en la siguiente sección.

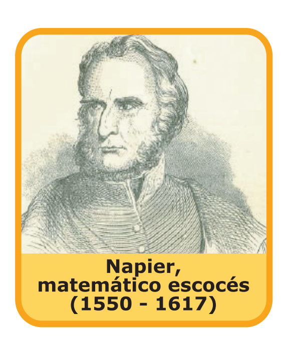
3.14 Funciones Logarítmicas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Identificar los elementos que definen una función logarítmica.
* Dada una función logarítmica, discutir sus características y el efecto de su base sobre éstas.
* Dada la gráfica de la función logarítmica creciente o decreciente estándar, construir otras gráficas aplicando técnicas de graficación.
* Resolver ecuaciones e inecuaciones exponenciales analítica o gráficamente.
* Resolver ecuaciones e inecuaciones logarítmicas analítica o gráficamente.
* Dada una función biyectiva, que involucre a las funciones exponencial o logarítmica, encontrar la regla de correspondencia de su inversa.

Otra función trascendente, es la denominada función logarítmica. Hoy en día, los computadores y las calculadoras han tomado el rol de los cálculos logarítmicos, pero todavía esta teoría de los logaritmos es muy relevante cuando se trata de las matemáticas puras y sus aplicaciones en los estudios de las ciencias naturales.


Napier, matemático escocés (1550 - 1617)

Napier fue un hacendado escocés, para quien las matemáticas eran un pasatiempo. Se lo conoce principalmente como el inventor de los logaritmos. Publicó su trabajo en 1614 bajo el título *"A Description of Marvelous Rule of Logarithms"* (Una descripción de la regla maravillosa de los logaritmos). La palabra **logaritmos** proviene de la palabra griega compuesta por **logos** que significa relación y **arithmos** que significa número. Fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos en base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: *"...Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, a través de esto se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, transformándolo a algo completamente simple, a través de la substitución de la multiplicación por la adición y la división por la sustracción. Además, el cálculo de las raíces se realiza también con gran facilidad... "*. Los logaritmos pasaron a ser una herramienta muy valorada, en especial entre los astrónomos. Laplace se refiere a esto con la frase: *"...Los logaritmos han duplicado la vida de los astrónomos..."*.

Definición 3.28 (Función Logarítmica)

Se conoce como función logarítmica a la función f de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = log_a(x),\ x > 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ \wedge (a \neq 1)$$

En esta definición a representa la **base** y x el **argumento**.

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, por lo que se puede afirmar que:

$$f(x) = a^x \quad \equiv \quad f^{-1}(x) = log_a(x)$$

$$f(x) = log_a(x) \quad \equiv \quad f^{-1}(x) = a^x$$

Con el propósito de tener una idea de cómo luce la gráfica de una función logarítmica, vamos a analizar los valores que puede tomar la base a, es decir, cuando $a > 1$ o cuando $0 < a < 1$, análisis similar al que realizamos para la función exponencial.

$a > 1$

Con $a = 2$, se obtuvo la siguiente tabla de valores para la función exponencial $f(x) = 2^x$:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$

La función logarítmica correspondiente a esta función exponencial sería $f(x) = log_2(x)$, y su tabla de valores sería:

x	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$

La representación gráfica de esta función logarítmica se encuentra en la figura 3.26.

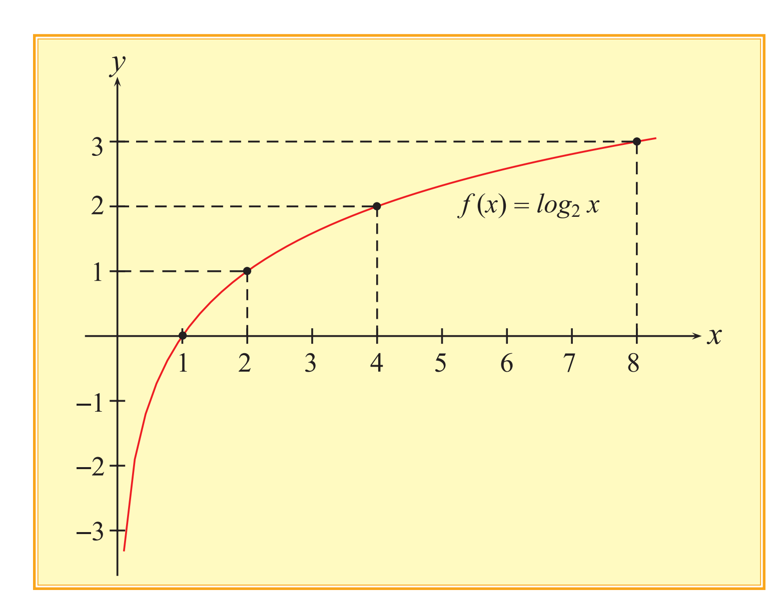


Figura 3.26: Gráfica de $f(x) = log_2(x)$.

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = 3$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = 5$ o $a = 10$.

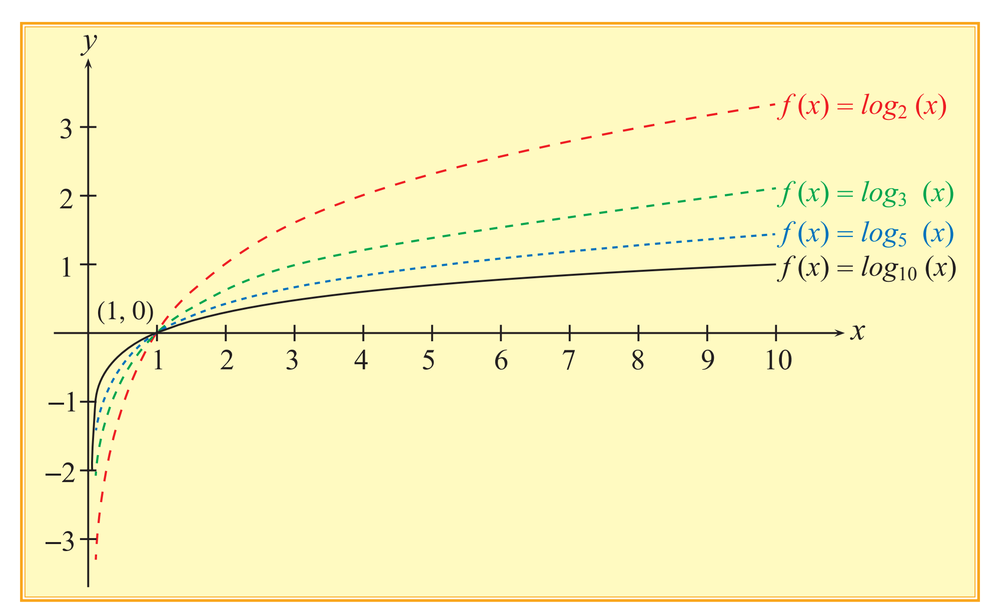


Figura 3.27: Funciones Logarítmicas Crecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 3.27, notaremos que están definidas para todos los reales positivos, su rango es $\mathbb{R}$, son inyectivas, estrictamente crecientes, intersecan al eje X en el punto $(1, 0)$ y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$0 < a < 1$

Con $a = \frac{1}{2}$, se obtuvo la siguiente tabla de valores para la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to +\infty$	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\to 0$

La función logarítmica correspondiente a esta función exponencial sería $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$, y su tabla de valores sería:

x	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to +\infty$	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...	$\to -\infty$

La representación gráfica de esta función logarítmica se encuentra en la figura 3.28.

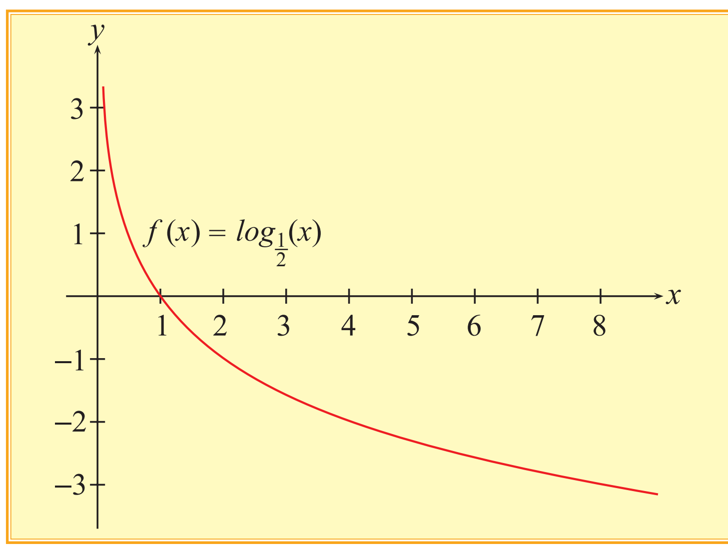


Figura 3.28: Gráfica de $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$.

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = \frac{1}{3}$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = \frac{1}{5}$ o $a = \frac{1}{10}$.

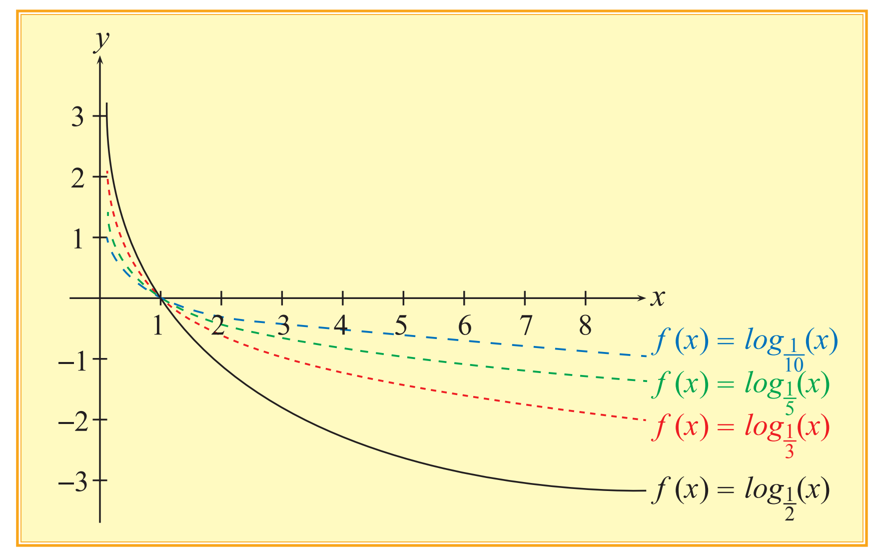


Figura 3.29: Funciones Logarítmicas Decrecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 3.29, notaremos que están definidas para todos los reales positivos, su rango es $\mathbb{R}$, son inyectivas, estrictamente decrecientes, intersecan al eje X en el punto $(1, 0)$ y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

3.14.1 Función Logaritmo Natural

Si la base de una función logarítmica es el número e, entonces tenemos la función logaritmo natural. Esta función se presenta con tal frecuencia que tiene asignado un símbolo especial, ln (del latín, *logarithmus naturalis*).

3.14.2 Función Logaritmo Común

Cuando no se especifica base alguna, debemos suponer que la función logarítmica tiene base 10. A estos logaritmos se los conoce como comunes, ya que era frecuente utilizarlos para propósitos de cómputos, antes de la época de calculadoras.

La notación a seguir en este libro será:

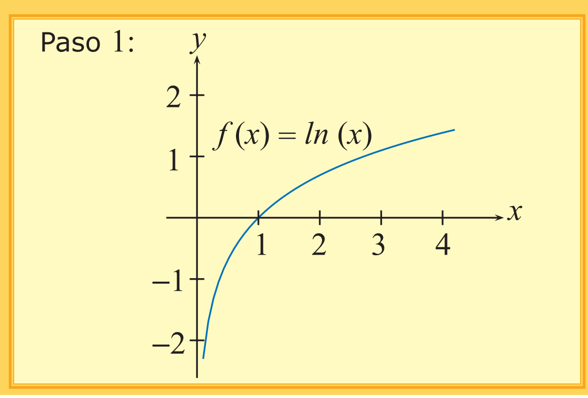
- $ln\,(x)$, para $log_e\,(x)$
- $log\,(x)$, para $log_{10}\,(x)$

Ejemplo 3.54 Función Logarítmica.

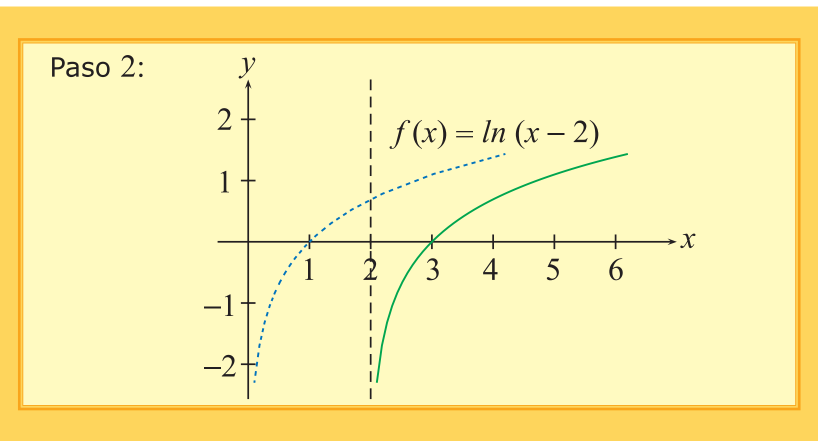
Grafique la función $f(x) = |ln\ (x - 2)| + 2,\ \forall x > 2$ e indique sus características.

Solución:

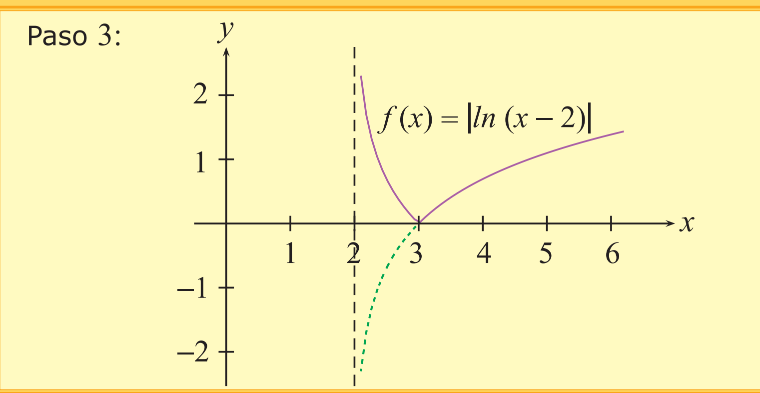
- Paso 1 : Identificamos la función original: $f(x) = ln\,(x)$.
- Paso 2 : Desplazamos la función original dos unidades hacia la derecha.
- Paso 3 : Realizamos la composición entre la función valor absoluto y la función logarítmica, lo cual significa conservar los valores positivos de f y reflejar con respecto al eje X sus valores negativos.
- Paso 4 : Desplazamos esta última función dos unidades en Y hacia arriba.



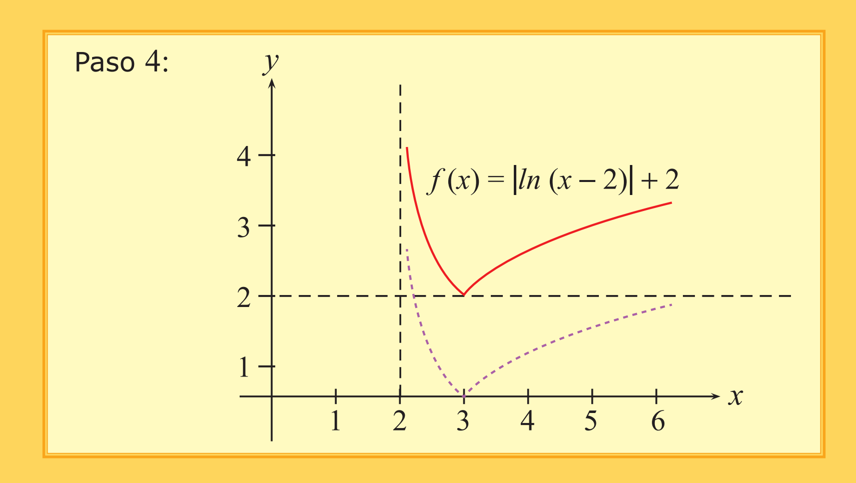
Paso 2:



Paso 3:



Paso 4:



$f(x) = ln\,|(x-2)| + 2$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = (2, +\infty)$.
- $rg\, f = [2, +\infty)$.
- Decreciente en $(2, 3)$.
- Creciente en $(3, +\infty)$.
- Acotada inferiormente en $y = 2$.
- Asíntota vertical: $x = 2$.

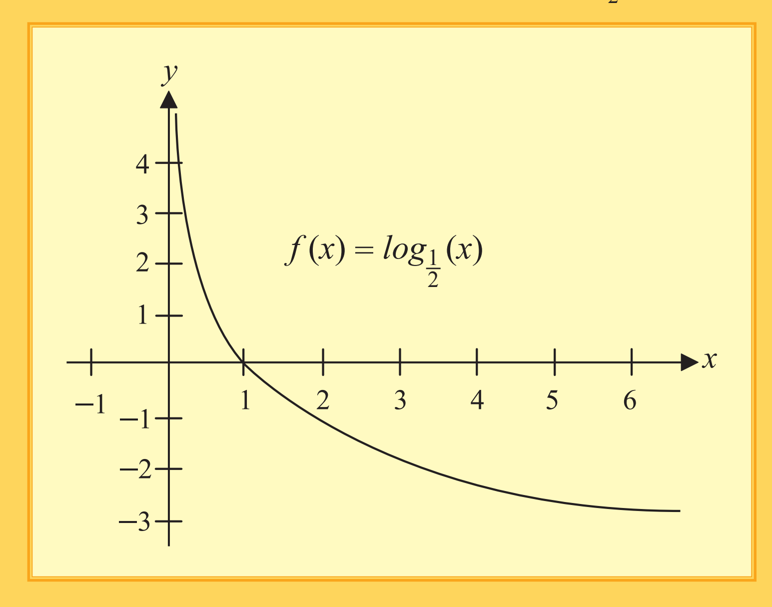
Ejemplo 3.55 Funciones logarítmicas.

Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|2 - x|$ e indique sus características.

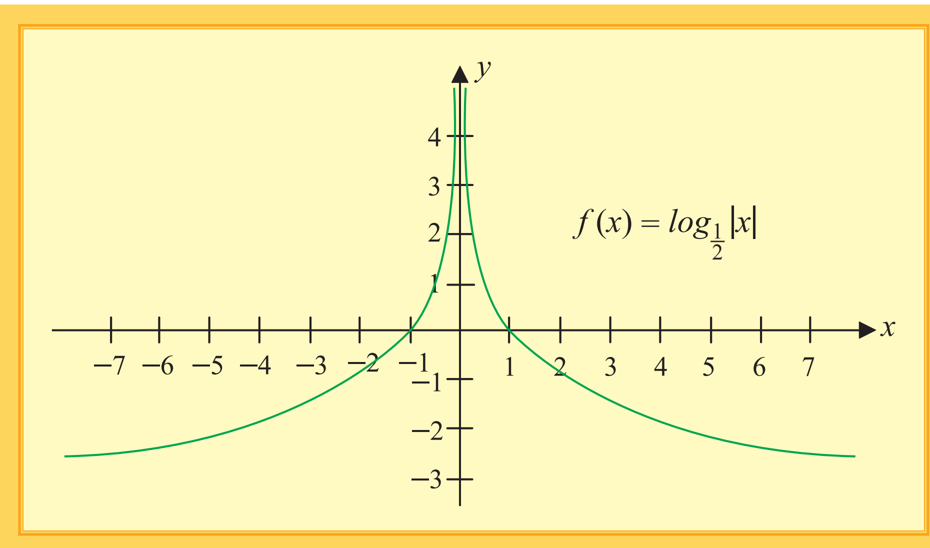
Solución:

Aplicando propiedades del valor absoluto, $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|x - 2|$.

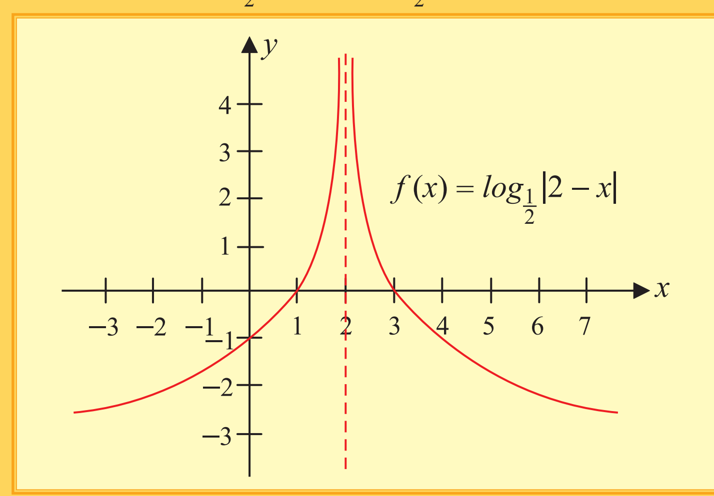
Paso 1: Identificamos la función original: $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$.



Paso 2: Reflejamos la gráfica de f cuando $x > 0$, con respecto al eje Y, para obtener $log_{\frac{1}{2}}|x|$.



Paso 3: Desplazamos la gráfica de f, 2 unidades hacia la derecha, para obtener $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|x - 2| = log_{\frac{1}{2}}|2 - x|$.



$f(x) = log_{\frac{1}{2}}|2 - x|$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{2\}$.
- $rg\, f = \mathbb{R}$.
- Estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$.
- Estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$.
- Asíntota vertical y eje de simetría en $x = 2$.

Ejemplo 3.56 Aplicación de funciones exponenciales.

La función $P(t)=158(1-e^{-0.001t})$ relaciona el crecimiento de una población de conejos de una isla, con el tiempo t transcurrido (en días).

a) ¿Cuándo la población sobrepasará los 100 conejos?

b) ¿Cuál es el máximo número de integrantes que puede tener esta población de conejos? Explique.

Solución:

a) Necesitamos hallar el valor mínimo de t cuando $P(t) > 100$, es decir:

$$158(1-e^{-0.001t}) > 100$$
$$1-e^{-0.001t} > 0.632911$$
$$-e^{-0.001t} > -0.367089$$
$$e^{-0.001t} < 0.367089$$

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros y tomando $ln\,(0.367089) \approx -1$

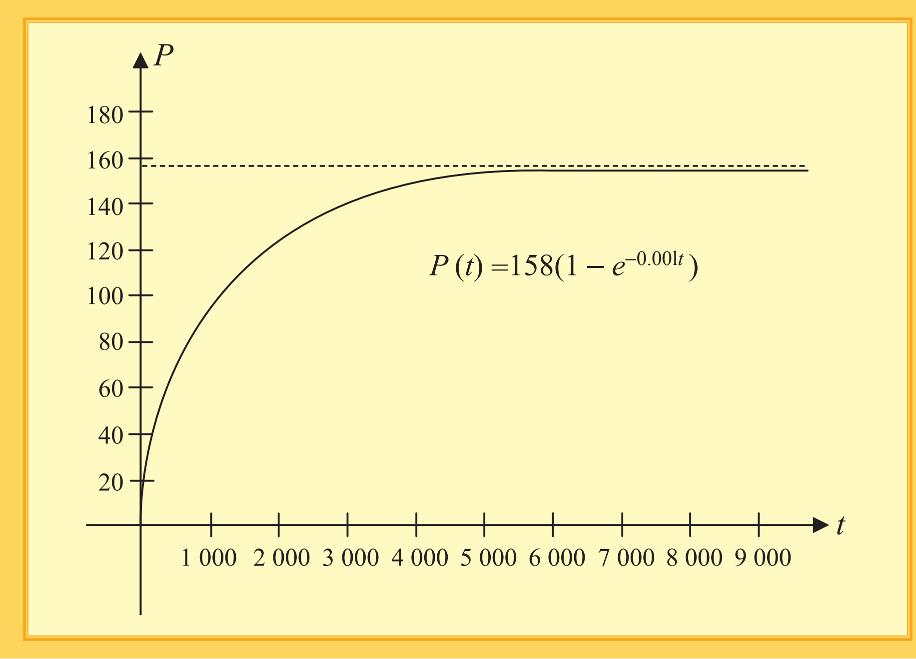
$$-0.001t < -1$$

Despejando t:

$$t > 1\ 000$$

Con lo que concluimos que, cuando el tiempo transcurrido sea mayor que $1\ 000$ días, la población sobrepasará los 100 conejos.

b) Realizaremos un bosquejo de la gráfica de $P(t)$:



Como se puede apreciar en la gráfica, a medida que t aumenta, la población de conejos también se incrementa pero ésta no sobrepasará los 158 conejos, ya que la recta $y = 158$ constituye una asíntota horizontal, lo cual como se recordará, significa que el $\lim_{t \to +\infty} P(t) = 158$. De aquí que el número máximo de integrantes que puede tener esta población de conejos será de 158.

Ejemplo 3.57 Inversa de funciones exponenciales y logarítmicas.

Sea f una función de variable real cuya función inversa tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x < 0 \\ log_2(x + 2), & x \geq 0 \end{cases}$$

Determine la regla de correspondencia de f.

Solución:

Aplicando la definición:

$$(f^{-1} \text{o } f)(x) = \begin{cases} 2 - 2^{-f(x)} \quad , & f(x) < 0 \\ log_2(f(x) + 2), & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Debido a que $(f^{-1} \text{o } f)(x) = x$, tenemos que:

Si $f(x) < 0$

$2 - 2^{-f(x)} = x$

Despejando $f(x)$:

$2 - x = 2^{-f(x)}$

$log_2(2 - x) = log_2 2^{-f(x)}$

$-f(x) = log_2(2 - x)$

$f(x) = log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$

Si $f(x) \geq 0$

$log_2(f(x) + 2) = x$

Despejando $f(x)$:

$2^x = f(x) + 2$

$f(x) = 2^x - 2$

3.14.3 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen algunas propiedades muy útiles que se pueden deducir en forma directa a partir de su definición y las leyes de los exponentes.

I)	$log_a\ 1$	$= 0, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
II)	$log_a\, a$	$= 1, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
III)	$a^{log_a M}$	$= M, \forall a \in (0, 1) \cup (1,+\infty), \forall M > 0$
IV)	$log_a\, a^M$	$= M, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \forall M \in \mathbb{R}$
V)	$log_a (MN)$	$= log_a M + log_a N, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \forall M > 0, \forall N > 0$
VI)	$log_a \left(\frac{M}{N}\right)$	$= log_a M - log_a N, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \forall M > 0, \forall N > 0$
VII)	$log_a \left(\frac{1}{N}\right)$	$= -log_a N, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \forall N > 0$
VIII)	$log_a M^{\alpha}$	$= \alpha\ log_a M, \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \forall M > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
IX)	$log_a M$	$= \dfrac{log_b(M)}{log_b(a)}, \forall a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \forall M > 0$

Demostraciones:

Propiedad III

$a^{log_a M} = M$

Sea $x = log_a M$

$a^x = M$ Cambiando la expresión logarítmica por la exponencial equivalente.

$a^{log_a M} = M$ Reemplazando x.

Propiedad V

$log_a (MN) = log_a M + log_a N$

Sea $x = log_a M,\ y = log_a N$

$a^x = M,\ a^y = N$ Cambiando las expresiones logarítmicas por las exponenciales equivalentes.

$a^x\, a^y = MN$ Efectuando el producto.

$log_a a^{x+y} = log_a (MN)$ Aplicando logaritmo en base a.

$x + y = log_a (MN)$ Utilizando la propiedad IV.

$log_a M + log_a N = log_a (MN)$ Reemplazando x e y.

Ejemplo 3.58 Propiedades de logaritmos.

Escriba la siguiente expresión $21\ log_3 \sqrt[3]{x} + log_3 (x^2) - log_5 (25)$ como un único logaritmo.

Solución:

$21\left(\frac{1}{3}\right) log_3 (x) + 2log_3(x) - 2log_5(5)$	Aplicando la propiedad VIII.
$7log_3 (x) + 2log_3 (x) - 2log_5 (5)$	Simplificando.
$9log_3 (x) - 2$	Aplicando la propiedad II.
$9log_3 (x) - log_3 (9)$	Aplicando la propiedad IV.
$log_3\left(\frac{x^9}{9}\right)$	Aplicando las propiedades VI y VIII.

Ejemplo 3.59 Expresiones Logarítmicas.

Determine el valor de la expresión:

$$\frac{ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - log_5 (25) + log_{\frac{1}{5}} (25)^{\frac{1}{3}}}{log\ (10)^{\frac{1}{2}} + log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)}$$

Solución:

$$\frac{ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - log_5 (25) + log_{\frac{1}{5}} (25)^{\frac{1}{3}}}{log\ (10)^{\frac{1}{2}} + log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}(-2)}{\frac{1}{2} - 4(-1) - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3-12-4}{6}}{\frac{3+24-1}{6}} = -\frac{13}{26} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.60 Expresiones Logarítmicas.

Si $a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$ y $log_a(b) = 3$, determine el valor de $log_{\frac{1}{b}}\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$.

Solución:

Aplicando la propiedad de cambio de base, se obtiene:

$$log_{\frac{1}{b}}\left(\frac{a^3}{b^2}\right) = \frac{log_a\left(\frac{a^3}{b^2}\right)}{log_a\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{log_a(a^3) - log_a(b^2)}{-log_a(b)} = \frac{3 - 2log_a(b)}{-log_a(b)}$$

Reemplazando $log_a(b) = 3$, se obtiene:

$$log_{\frac{1}{b}}\left(\frac{a^3}{b^2}\right) = \frac{3-6}{-3} = 1$$

Ejemplo 3.61 Aplicación de logaritmos.

Un químico puede determinar la acidez o basicidad de una solución acuosa a temperatura ambiente, encontrando el pH de la solución. Para hacer esto, primero debe determinar la concentración de iones de hidrógeno (en moles/litro). El símbolo $[H^+]$ se establece para esta concentración. El pH entonces está dado por:

$$pH = -log\,[H^+]$$

Si $pH < 7$, la solución es ácida. Si $pH = 7$, la solución es neutra. Si $pH > 7$, la solución es básica.

Determine el pH del vinagre con $[H^+] = 3 \text{ x } 10^{-4}$ (considere $log3 \approx 0.477$).

Solución:

Reemplazamos el valor $[H^+] = 3 \text{ x } 10^{-4}$ en la fórmula del pH y encontramos que $pH = -log\,(3 \text{ x } 10^{-4}) = -(log(3) + log(10^{-4})) = -(log(3) + (-4)(log\,(10))) \approx -(0.477 - 4) \approx 3.523$ moles/litro.

Por lo tanto, el vinagre es una solución ácida.

3.14.4 Ecuaciones e inecuaciones exponenciales

Las igualdades o desigualdades que contienen términos de la forma a^x se denominan ecuaciones o inecuaciones exponenciales. Por ejemplo, $2^{2x} = 16$ es una ecuación exponencial; y, $25^{x+2} > 5^{3x-4}$ es una inecuación exponencial.

Estas expresiones exponenciales pueden incluirse en predicados, considerando para su solución el conjunto de los números reales como referencial.

Ejemplo 3.62 Ecuaciones exponenciales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 4^{2x} + 4^x - 2 = 0$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$u = 4^x$	Realizando cambio de variable.
$u^2 + u - 2 = 0$	Reemplazando.
$(u + 2)(u - 1) = 0$	Factorizando.
$(u = -2) \vee (u = 1)$	Despejando para la variable u.

$(4^x = -2) \vee (4^x = 1)$ Reemplazando por la variable original.

$(x = log_4(-2)) \vee (x = log_4(1))$ Aplicando logaritmos.

$\varnothing \cup \{0\}$ Encontrando los valores de x.

Verificando:

$p(0)$: $4^0 + 4^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ $\quad \therefore p(0) \equiv 1$

Luego, $Ap(x) = \{0\}$

Ejemplo 3.63 Ecuaciones exponenciales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $3(2^{x+3}) = 192\,(3^{x-3})$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$3(2^{x+3}) = 192\,(3^{x-3})$

$3(2^x)(2^3) = (2^6)(3)(3^x)(3^{-3})$ Aplicando ley de exponentes.

$(2^x)(2^3)(3) = 3^x\,(2^6)(3^{-2})$ Efectuando productos y simplificando.

$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3}$ Agrupando términos semejantes.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ Aplicando ley de exponentes.

$x = 3$ Determinando el valor de x.

Verificando:

$p(3)$: $3(2^6) = 192(3^0)$
$192 = 192$ $\quad \therefore p(3) \equiv 1$

Luego, $Ap(x) = \{3\}$.

Ejemplo 3.64 Ecuaciones exponenciales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $e^x - 16e^{-x} - 2 = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$e^x - 16e^{-x} - 2 = 0$

$e^x - \frac{16}{e^x} - 2 = 0$ Aplicando ley de exponentes.

$\frac{e^{2x} - 16 - 2e^x}{e^x} = 0$ Obteniendo el m.c.m.

$e^{2x} - 2e^x - 16 = 0$ Expresando la ecuación exponencial.

$u = e^x$ Haciendo un cambio de variable.

$u^2 - 2u - 16 = 0$ Planteando una ecuación cuadrática.

$u = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(-16)}}{2}$ Resolviendo la ecuación en términos de u.

$u = \frac{2 \pm \sqrt{68}}{2}$ Expresando las soluciones en términos de u.

$(u = 1 + \sqrt{17}) \vee (u = 1 - \sqrt{17})$ Expresando las soluciones en términos de x.

$(e^x = 1 + \sqrt{17}) \vee (e^x = 1 - \sqrt{17})$ Despejando x.

$[x = ln(1 + \sqrt{17})] \vee [x = ln(1 - \sqrt{17})]$

Como se puede observar, la solución $x = ln(1 - \sqrt{17})$ no está definida en $\mathbb{R}$, por lo que procedemos a verificar la otra solución:

$p\,[ln(1+\sqrt{17})] : e^{ln(1+\sqrt{17})} - 16e^{-ln(1+\sqrt{17})} - 2 = 0$

$: e^{ln(1+\sqrt{17})} - 16e^{ln(1+\sqrt{17})^{-1}} - 2 = 0$

$:(1 + \sqrt{17}) - 16(1 + \sqrt{17})^{-1} - 2 = 0$

$:(1 + \sqrt{17}) - \frac{16}{1 + \sqrt{17}} - 2 = 0$

$:(1 + \sqrt{17})^2 - 16 - 2(1 + \sqrt{17}) = 0$

$:1 + 2\sqrt{17} + 17 - 16 - 2 - 2\sqrt{17} = 0$

$:18 - 18 = 0 \quad \therefore p\,[ln(1 + \sqrt{17})] \equiv 1$

Con lo que se concluye que, $Ap(x) = \{ln\,(1 + \sqrt{17})\}$.

Ejemplo 3.65 Ecuaciones exponenciales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $4^{2x+3} = 5^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$; determine $Ap(x)$.

Solución:

$4^{2x+3} = 5^{x+2}$

$(2x + 3)\, log(4) = (x + 2)\, log(5)$ Aplicando logaritmos de base 10 a ambos miembros de la igualdad.

$2x\, log(4) + 3\, log(4) = x\, log(5) + 2\, log(5)$ Resolviendo los productos.

$2x\, log(4) - x\, log(5) = 2\, log(5) - 3\, log(4)$ Agrupando términos semejantes.

$x(2\, log(4) - log(5)) = 2log(5) - 3\, log(4)$ Factorizando.

$x(log(16) - log(5)) = log(25) - log(64)$ Aplicando la propiedad VIII de logaritmos.

$x\,log\left(\frac{16}{5}\right) = log\left(\frac{25}{64}\right)$ Aplicando la propiedad VI de logaritmos.

$x = \dfrac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}$ Despejando x.

Verificando:

$$p\left(\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right) : 4^{\left[2\left(\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right)+3\right]} = 5^{\left[\left(\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right)+2\right]}$$

$$: 4^{\left[\frac{2log\left(\frac{25}{64}\right)+3log\left(\frac{16}{5}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)+2log\left(\frac{16}{5}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right]}$$

$$: 4^{\left[\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)^2+log\left(\frac{16}{5}\right)^3}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)+log\left(\frac{16}{5}\right)^2}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right]}$$

$$: 4^{\left[\frac{log\left(\frac{5^4}{4^6}\right)+log\left(\frac{4^6}{5^3}\right)}{log\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{log\left(\frac{5^2}{4^3}\right)+log\left(\frac{4^4}{5^2}\right)}{log\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]}$$

$$: 4^{\left[\frac{log\left(\frac{(5^4)(4^6)}{(4^6)(5^3)}\right)}{log\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{log\left(\frac{(5^2)(4^4)}{(4^3)(5^2)}\right)}{log\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]}$$

$$: log(4)^{\left[\frac{log\ (5)}{log\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]} = log(5)^{\left[\frac{log\ (4)}{log\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]}$$

$$: \frac{log(5)}{\left(log\left(\frac{4^2}{5}\right)\right)}(log\ 4) = \frac{log\ 4}{\left(log\left(\frac{4^2}{5}\right)\right)}(log\ 5) \quad \therefore p\left(\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right) \equiv 1$$

Con lo cual, se concluye que: $\mathrm{A}p(x) = \left\{\frac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}\right\}$

Al resolver inecuaciones exponenciales o logarítmicas, se aplican las siguientes propiedades, con $\mathbb{I}=\mathbb{R}$ para el caso exponencial, e $\mathbb{I}=\mathbb{R}^+$ para el caso logarítmico.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I} \wedge a > 1\ [x_1 < x_2 \Rightarrow (a^{x_1} < a^{x_2} \ \vee\ log_a x_1 < log_a x_2)]$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I} \wedge 0 < a < 1\ [x_1 < x_2 \Rightarrow (a^{x_1} > a^{x_2} \ \vee\ log_a x_1 > log_a x_2)]$

Ejemplo 3.66 Inecuaciones exponenciales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $3^{x+1} > 243$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$3^{x+1} > 3^5$	Reemplazando 243 por su equivalente exponencial.
$x + 1 > 5$	Aplicando logaritmo en base 3.
$x > 4$	Despejando la incógnita x.
$\text{A}p(x) = \{x/x > 4\}$	Encontrando los valores de x.

Ejemplo 3.67 Inecuaciones exponenciales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$, $p(x)$: $\mu(e^{2x} + 1) = 0$ y $q(x)$: $sgn(e^x - 1) = 1$, determine $\text{A}[\neg\, p(x) \vee q(x)]$.

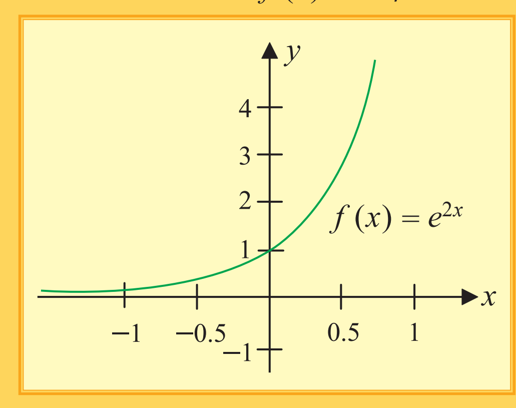
Solución:

Primero analizamos el predicado $p(x)$.
$p(x)$: $\mu(e^{2x} + 1) = 0$

Empleando la definición de función escalón, tenemos que:
$[\,\mu(e^{2x} + 1) = 0] \Leftrightarrow (e^{2x} + 1 \leq 0)$

Luego, $e^{2x} \leq -1$

Analizando la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$, tenemos:



Con lo que se puede determinar que no existe valor alguno en x para el cual e^{2x} sea menor o igual que -1, luego $\text{A}p(x) = \emptyset$.

En segunda instancia, analizamos el predicado $q(x)$.

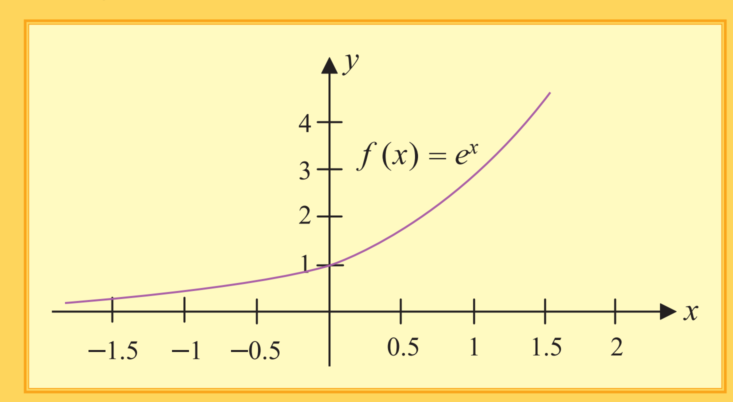
$$q(x):\ sgn(e^x - 1) = 1$$

Empleando la definición de función signo, tenemos que:

$[sgn(e^x - 1) = 1] \Leftrightarrow (e^x - 1 > 0)$

Luego: $e^x > 1$.

Analizamos la gráfica de la función e^x:



Con lo que se puede determinar que e^x es mayor que 1 cuando $x > 0$, luego $Aq(x) = (0, +\infty)$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A[\neg\, p(x) \vee q(x)] &= A^C p(x) \cup Aq(x) \\ &= \mathbb{R} \cup (0, +\infty) \\ A[\neg\, p(x) \vee q(x)] &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.14.5 Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas

Las igualdades o desigualdades que contienen términos de la forma $log_a(x)$ se denominan ecuaciones o inecuaciones logarítmicas. Por ejemplo, $3ln(x - 2) = 1$ es una ecuación logarítmica y $log_2\,(3x + 2) > 5$ es una inecuación logarítmica.

Ejemplo 3.68 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $ln(x) = ln\,(3x + 1\,) + 1$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$ln(x) - ln\,(3x + 1\,) = 1$ Llevando los logaritmos al miembro izquierdo.

$ln\left(\frac{x}{3x + 1}\right) = 1$ Aplicando el logaritmo de una división.

$e = \frac{x}{3x+1}$ Aplicando el cambio a la forma exponencial.

$x = \frac{e}{1-3e}$ Despejando la incógnita x.

Note que $\frac{e}{1-3e}$ es un valor negativo.

$\therefore\ \mathrm{A}p(x) = \emptyset$

Ejemplo 3.69 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $log_2(x^2 - 1) = log_{1/2}(x - 1)$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$log_2(x^2 - 1) = log_{1/2}(x - 1)$

$log_2(x^2 - 1) = -log_2(x - 1)$ Aplicando la propiedad IX de logaritmos.

$log_2(x^2 - 1) + log_2(x - 1) = 0$ Simplificando.

$log_2[(x^2 - 1)(x - 1)] = 0$ Aplicando la propiedad V de logaritmos.

$(x^2 - 1)(x - 1) = 1$ Cambiando la expresión logarítmica a exponencial.

$x^3 - x^2 - x + 1 = 1$ Efectuando el producto.

$x^3 - x^2 - x = 0$ Reduciendo términos y factorizando.

$x(x^2 - x - 1) = 0$ Simplificando.

$(x = 0) \vee (x^2 - x - 1) = 0$ Resolviendo la ecuación.

$(x = 0) \vee \left(x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \vee \left(x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ Resolviendo la ecuación cuadrática.

Debe también cumplirse que $x^2 - 1 > 0$ y $x - 1 > 0$, porque son argumentos de logaritmos.

Verificando:

Como se puede observar, las soluciones $x = 0$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dan lugar a expresiones no definidas en $\mathbb{R}$, por lo que hacemos la verificación con la solución $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, así:

$$p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) : log_2\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right] = log_{1/2}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right]$$

$$: log_2\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-4}{4}\right)=log_{1/2}\left(\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}\right)$$

$$: log_2\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4}\right)=log_{1/2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=log_2\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=log_2\left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=log_2\left[\frac{2\,(-1-\sqrt{5})}{(-1)^2-(\sqrt{5})^2}\right]$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=log_2\left[\frac{-2\,(1+\sqrt{5})}{-4}\right]$$

$$: log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ \therefore p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\equiv 1$$

Luego, $\mathrm{A}p(x)=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ejemplo 3.70 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y $p(x)$: $2log_a(x)=(log_a(x))^3$, $a>0$, $\neg(a=1)$; determine el producto de los elementos de $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$2log_a(x)=(log_a(x))^3$

$log^3{}_a(x)-2log_a(x)=0$ Elevando al cubo el logaritmo e igualando a cero.

$log_a(x)\,[log^2{}_a(x)-2]=0$ Factorizando.

$(log_a(x)\ =0)\vee(log^2{}_a(x)=2)$ Resolviendo la ecuación.

$(log_a(x) = 0) \vee (log_a(x) = \pm\sqrt{2})$ Extrayendo la raíz cuadrada.

$(x = a^0 = 1) \vee (x = a^{\pm\sqrt{2}})$ Cambiando las expresiones a exponenciales.

$(x = 1) \vee (x = a^{\sqrt{2}}) \vee (x = a^{-\sqrt{2}})$ Determinando las soluciones.

Adicionalmente, debe cumplirse que $x > 0$, porque es el argumento del logaritmo.

Verificando:

$p(1)$: $2log_a 1 = (log_a 1)^3$

$0 = 0$ $\therefore p(1) \equiv 1$

$p(a^{\sqrt{2}}) : 2log_a (a^{\sqrt{2}}) = (log_a a^{\sqrt{2}})^3$

$2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3$

$2^{3/2} = 2^{3/2}$ $\therefore p(a^{\sqrt{2}}) \equiv 1$

$p(a^{-\sqrt{2}}) : 2log_a (a^{-\sqrt{2}}) = (log_a a^{-\sqrt{2}})^3$

$-2\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^3$

$-2^{3/2} = -2^{3/2}$ $\therefore p(a^{-\sqrt{2}}) \equiv 1$

Por lo tanto, $Ap(x) = \{1, a^{\sqrt{2}}, a^{-\sqrt{2}}\}$; y, el producto de sus elementos es igual a 1.

Ejemplo 3.71 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\sqrt{log(x)} - log\sqrt{x} = 0$, determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

$\sqrt{log(x)} - log\sqrt{x} = 0$

$(log(x))^{\frac{1}{2}} - log\ (x^{\frac{1}{2}}) = 0$ Expresando la ecuación en forma exponencial.

$(log(x))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\ log(x) = 0$ Aplicando la propiedad VIII.

$2(log(x))^{\frac{1}{2}} - log(x) = 0$ Multiplicando por 2.

$u = (log(x))^{\frac{1}{2}}$ Efectuando un cambio de variable.

$u^2 - 2u = 0$ Resolviendo la ecuación cuadrática.

$u(u - 2) = 0$ Despejando u.

$(u = 0) \vee (u - 2 = 0)$

$(u = 0) \vee (u = 2)$

$\left[(log(x))^{\frac{1}{2}} = 0\right] \vee \left[(log\ (x))^{\frac{1}{2}} = 2\right]$ Expresando las soluciones en términos de x.

$(log(x) = 0) \vee (log(x) = 4)$ Elevando al cuadrado cada miembro.

$(x = 1) \vee (x = 10000)$ Cambiando a la forma exponencial.

También debe cumplirse que $x > 0$, porque es el argumento de un logaritmo, y que $log(x) \geq 0$ por tratarse del argumento de una raíz cuadrada.

Verificando:

$$p\,(1): \sqrt{log(1)} - log\,\sqrt{1} = 0$$
$$0 = 0 \qquad \therefore\ p(1) \equiv 1$$

$$p\,(10000): \sqrt{log(10000)} - log\,\sqrt{10000} = 0$$
$$\sqrt{log\,(10^4)} - log\,\sqrt{10^4} = 0$$
$$2 - 2 = 0$$
$$0 = 0 \qquad \therefore\ p(10000) \equiv 1$$

Luego, $\mathrm{A}p(x) = \{1, 10000\}$ y la suma de sus elementos es 10001.

Ejemplo 3.72 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{N}$ y $p(x)$: $(log_x\,(3))\left(log_{\frac{x}{3}}\,(3)\right) + log_{\frac{x}{81}}\,(3) = 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$$(log_x\,(3))\left(log_{\frac{x}{3}}\,(3)\right) + log_{\frac{x}{81}}\,(3) = 0$$

$$\frac{1}{log_3(x)\;log_3\left(\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{log_3\left(\frac{x}{81}\right)} = 0$$ Aplicando la propiedad IX de logaritmos.

$$log_3\left(\frac{x}{81}\right) + log_3\,(x)\;log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$ Sumando fracciones.

$$log_3(x) - log_3(3^4) + log_3(x)\,[log_3(x) - log_3(3)] = 0$$ Aplicando la propiedad VI de logaritmos.

$$log_3(x) - 4 + log_3(x)\,[log_3(x) - 1] = 0$$ Aplicando la propiedad VIII de logaritmos.

$$log_3^2(x) - log_3(x) + log_3(x) - 4 = 0$$ Efectuando los productos indicados.

$$log_3^2(x) - 4 = 0$$ Reduciendo términos.

$$[(log_3(x) = 2) \vee (log_3(x) = -2)] \Rightarrow \left(x = 9 \vee x = \frac{1}{9}\right)$$ Resolviendo la ecuación cuadrática.

Debe también cumplirse que:

$[(x > 0) \wedge (x \neq 1)] \wedge \left[\left(\frac{x}{3} > 0\right) \wedge \left(\frac{x}{3} \neq 1\right)\right] \wedge \left[\left(\frac{x}{81} > 0\right) \wedge \left(\frac{x}{81} \neq 1\right)\right]$ porque son bases de los logaritmos.

Verificando:

$p(9)$: $(log_9(3))(log_3(3)) + \left(log_{\frac{1}{9}}(3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \therefore\ p(9) \equiv 1$

$p\left(\frac{1}{9}\right)$: $\left(log_{\frac{1}{9}}(3)\right)\left(log_{\frac{1}{27}}(3)\right) + \left(log_{\frac{1}{729}}(3)\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \qquad \therefore\ p\left(\frac{1}{9}\right) \equiv 1$

Debido a que $\mathrm{Re} = \mathbb{N}$, a pesar de que ambas soluciones satisfacen matemáticamente la ecuación, sólo podemos tener la solución $x = 9$, por ser la única solución válida en Re.

Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x) = \{9\}$.

Ejemplo 3.73 Inecuaciones logarítmicas.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $log_3\,(2x + 1) > 2$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$2x + 1 > 3^2$	Reemplazando la expresión por su equivalente exponencial.
$2x > 8$	Simplificando.
$x > 4$	Encontrando los valores de x.

Debe también cumplirse que $2x + 1 > 0$, por ser argumento del logaritmo. Esto es, $x > -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x) = \{x/x > 4\}$.

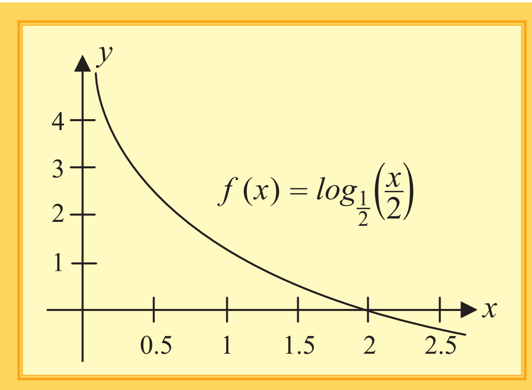
Ejemplo 3.74 Inecuaciones logarítmicas.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, y $p(x)$: $sgn\left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

Si aplicamos la definición de la función signo, concluiremos que $p(x)$ se convertirá en una proposición verdadera, si y sólo si: $\left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$. Esto es, si y sólo si $0 < \frac{x}{2} < 1$.

La gráfica de $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)$ nos puede resultar útil también para analizar el conjunto de verdad del predicado.



A partir de la gráfica también se puede concluir que:

$$(0 < x < 2) \Rightarrow \left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$$

Por lo tanto $\text{A}p(x) = \{x/\ 0 < x < 2\}$.

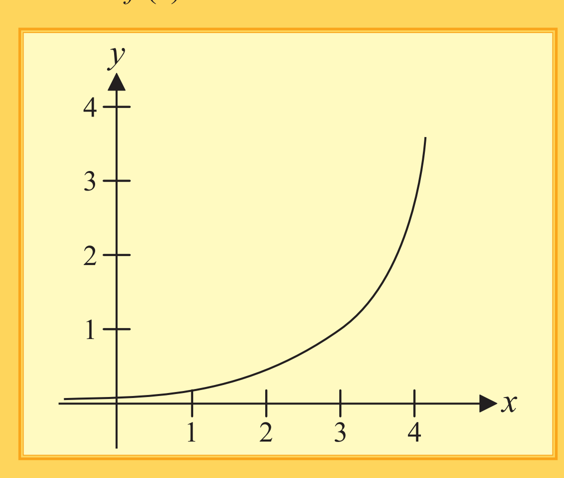
Ejemplo 3.75 Inecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Grafique en el plano cartesiano la región representada por:

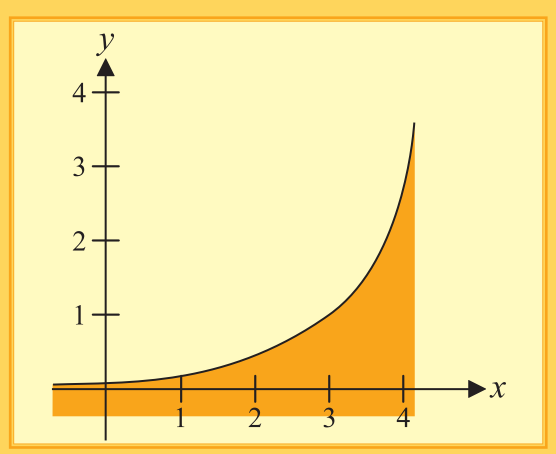
a) $y \leq e^{x-3}$
b) $y \leq log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

Solución:

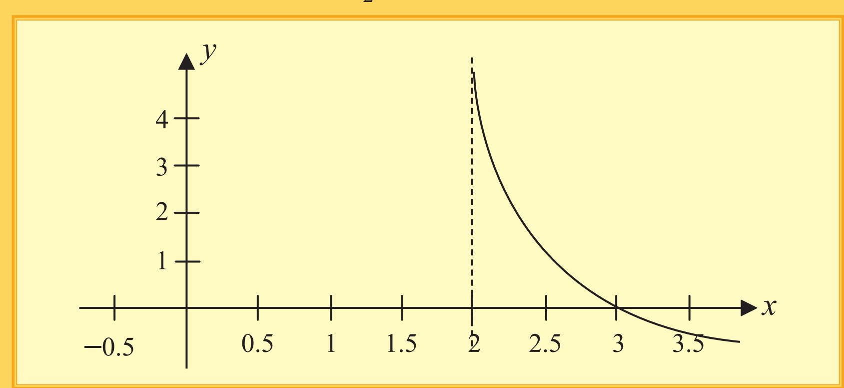
a) Graficamos la curva $f(x) = e^{x-3}$.



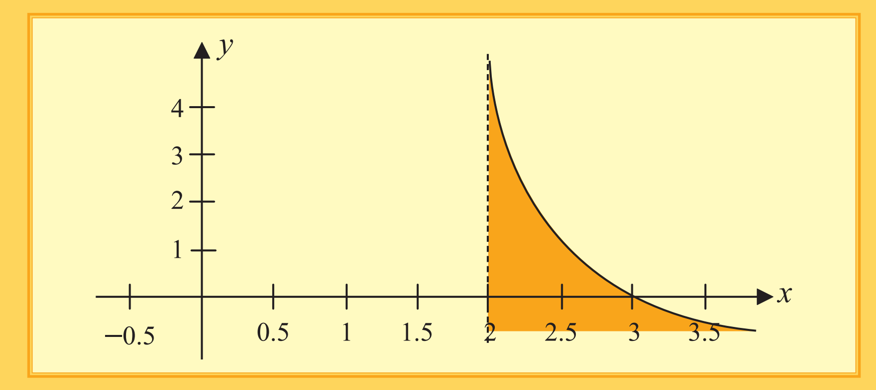
Luego sombreamos la región del plano que satisface la desigualdad planteada: $y \leq e^{x-3}$, la cual incluirá todos los puntos que pertenezcan a la curva y los puntos que estén bajo ella.



b) Graficamos la curva $y = log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$.



Luego sombreamos la región del plano que satisface la desigualdad planteada: $y \leq log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$, la cual comprenderá todos los puntos que pertenezcan a la curva y los puntos que estén bajo ella tomando en cuenta que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.



3.1 Funciones de Variable Real

1. La gráfica de una función puede tener más de una intersección con el eje Y.

a) Verdadero b) Falso

2. Un dominio de la función de variable real $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ es $(-\infty, 5)\cup(5, +\infty)$.

a) Verdadero b) Falso

3. El rango de la función de variable real $f(x)=2x+1$ es $(2, +\infty)$.

a) Verdadero b) Falso

4. A continuación se indican las reglas de correspondencia de varias funciones y un dominio posible. Una de las opciones no es correcta, identifíquela.

a) $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-1}$; $dom\, f=[1, +\infty)$

b) $f(x)=\dfrac{x^8-x^3+x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$; $dom\, f=\mathbb{R}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $dom\, f=\mathbb{R}-\{1\}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; $dom\, f=[1, 2)$

e) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $dom\, f=[1, +\infty)$

5. Determine un dominio y el rango correspondiente de las siguientes funciones de variable real:

a) $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$

b) $h(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

c) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

d) $r(x)=\sqrt{x^2-1}$

e) $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x-2|-1}}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

h) $h(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

6. Sea f una función tal que $f(x) = x^2 - x$, con dominio igual a $\mathbb{R}$. El intervalo en x para el cual $f(x) > 2$, es:

a) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
b) $(-\infty, 1)$
c) $(2, 1)$
d) $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$
e) $\mathbb{R} - [-1, 2]$

7. Si f es una función de variable real cuya regla de correspondencia está definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 + 6x - 7}$, un dominio de f es:

a) $[-2, 2]$
b) $[-7, -2] \cup [1, 2]$
c) $[-2, 1) \cup (1, 2]$
d) $(-2, 1] \cup [-1, 2)$
e) $(-2, 2)^C$

8. Sea h una función de variable real cuya regla de correspondencia es: $h(x) = \sqrt{x - 4 + |3x - 5|}$. Un conjunto que puede ser dominio de esta función es:

a) $\left(\frac{9}{8}, \frac{9}{4}\right)$ b) $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)^C$ d) $\left[0, \frac{9}{4}\right)$ e) $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

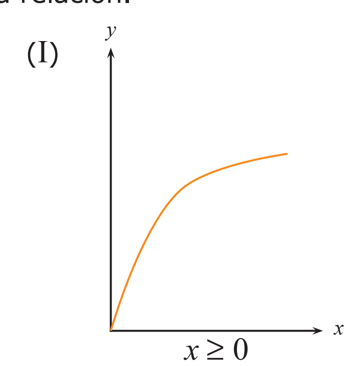
3.2 Representación gráfica de funciones de variable real

9. Empleando una tabla de valores, grafique las siguientes funciones de variable real para el dominio dado. Identifique los ejes y las divisiones utilizadas.

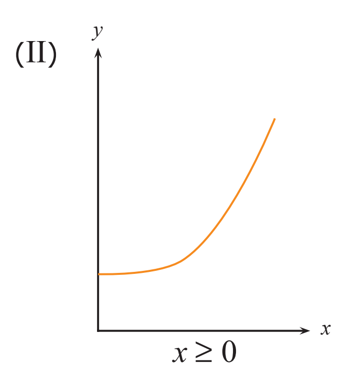
a) $f(x) = x^2;\ x \geq 0$
b) $g(x) = \sqrt{-x};\ x \leq 0$
c) $h(x) = x^3 - 2;\ x \in \mathbb{R}$
d) $r(x) = \dfrac{2}{x-1};\ x \in \mathbb{R} - \{1\}$
e) $m(x) = 2x + 2;\ x \in \mathbb{R}$
f) $g(x) = 4 - x^2;\ x \in \mathbb{R}$
g) $f(x) = \sqrt{x};\ x \geq 0$

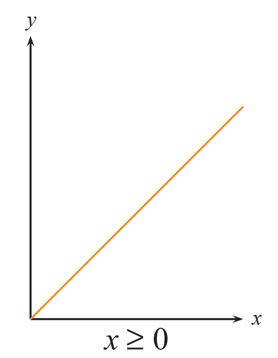
10. Utilice el criterio de la recta vertical para determinar si las gráficas dadas corresponden a una función o no. En cada caso se especifica el dominio de la relación.

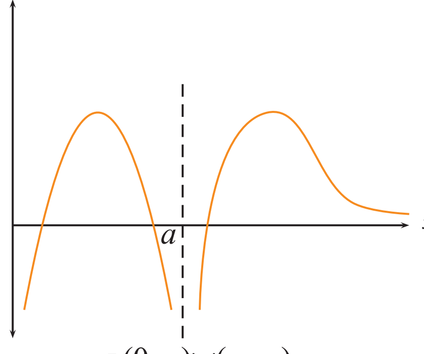
(I)

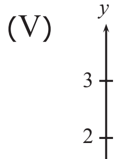


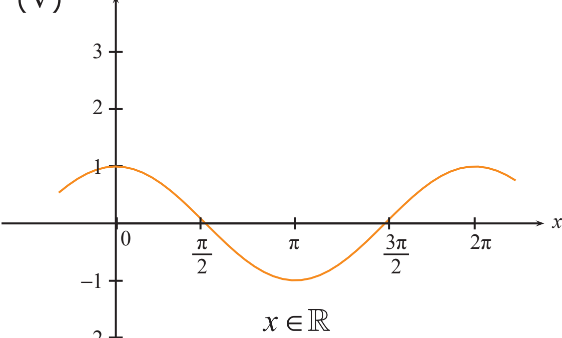
(II)

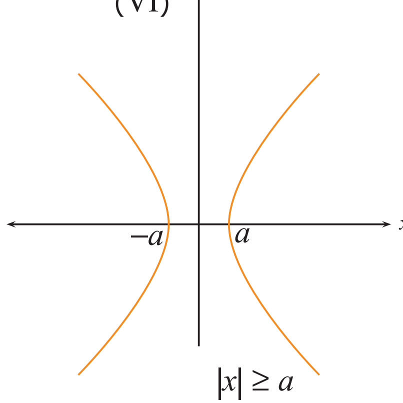


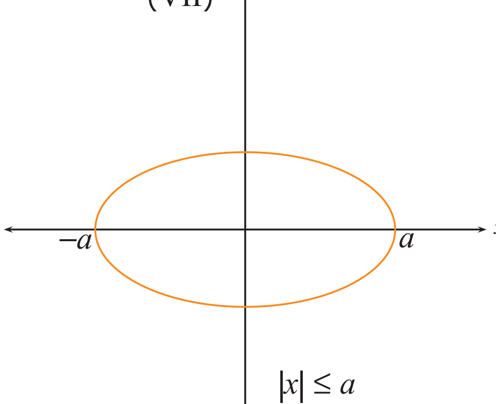












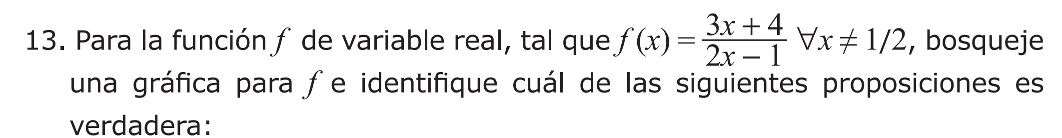
3.3 Tipos de funciones

11. Existe alguna función que es simétrica respecto al eje X.

    a) Verdadero b) Falso

12. La función $f:(-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = |x-2| + 1$, es inyectiva.

    a) Verdadero b) Falso



13. Para la función f de variable real, tal que $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}$ $\forall x \neq 1/2$, bosqueje una gráfica para f e identifique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

    a) f es estrictamente creciente en todo su dominio.
    b) f contiene el punto $(1, -6)$.
    c) f es una función impar.
    d) f es una función inyectiva.
    e) f es una función par.

14. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si se definen las funciones g y h, tales que: $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, es falso que:

    a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [g(x)=h(-x)]$
    b) h es impar
    c) $f(a)=g(-a)-h(-a)$
    d) g es par
    e) $-g$ es par

15. Analizar si la función dada en cada literal es par o impar:

    a) $f(x)=5x+x^3$
    b) $g(x)=|x|+1$
    c) $h(x)=|-x|-x^2$
    d) $j(x)=|2-x|-|x+2|$
    e) $f(1-x)=x+2$
    f) $h(x)=x^2-|x|$

16. Demostrar que la función $g:\left[\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por la regla de correspondencia: $g(x)=x^2-x+1$, es estrictamente creciente.

17. Demostrar que la función de variable real $f(x)=kx+b$ es estrictamente creciente para $k>0$ y estrictamente decreciente para $k<0$.

18. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ impar estrictamente creciente y g es una función tal que $g(x)=f(x)$, entonces el valor de $\dfrac{2g(4)+3f(4)}{-f(-4)+4g(-4)}$ es:

    a) $5/3$ b) $-5/2$ c) $-5/3$ d) 1 e) -1

3.4 Asíntotas de la gráfica de una función de variable real

19. La gráfica de la función de variable real $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+5}{x^2-4}$ tiene dos asíntotas verticales.

    a) Verdadero b) Falso

20. La gráfica de la función de variable real $g(x)=\dfrac{12x-3}{9x^2-4}$ tiene una asíntota horizontal y dos verticales.

    a) Verdadero b) Falso

21. Sea f una función de variable real dada por $f(x)=\dfrac{4x^2-x}{x^2-1}$, es falso que:

a) La gráfica de f tiene dos asíntotas verticales.
b) f es monótona creciente.
c) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal.
d) $y=4$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.
e) La gráfica de f interseca el eje X es dos puntos.

22. Sea h una función de variable real tal que $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+x-2}$, es verdad que:

a) La gráfica de h no tiene asíntotas horizontales.
b) La gráfica de h tiene dos asíntotas horizontales.
c) $x=2$ y $x=-1$ son asíntotas verticales de la gráfica de h.
d) La gráfica de h tiene dos asíntotas verticales y una horizontal.
e) $x=-2$ y $x=1$ son asíntotas verticales y $y=2$ es asíntota horizontal de la gráfica de h.

23. Sea g una función de variable real tal que $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, es falso que:

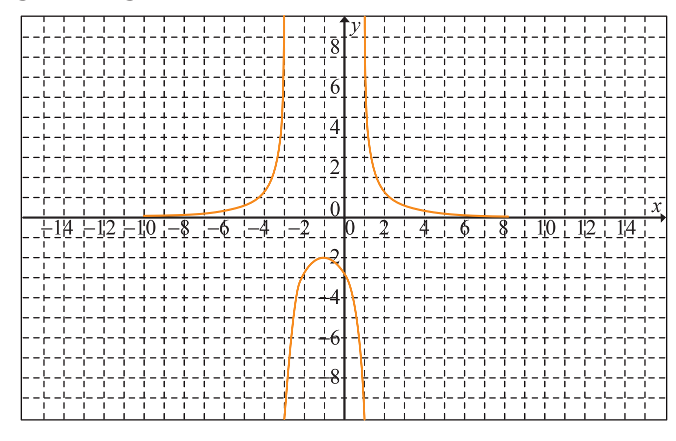
a) g es una función par.
b) $y=0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de g.
c) La gráfica de g tiene una asíntota horizontal y dos verticales.
d) El rango de g es el intervalo $(0, 1]$.
e) El dominio de g son todos los reales.

24. Para cada una de las siguientes funciones, determine las asíntotas horizontales y verticales de sus gráficas si hubieren; además, determine los puntos de intersección con los ejes coordenados:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ b) $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

d) $i(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$ e) $j(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $k(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

25. Determinar a, b y $c\in\mathbb{R}$ para que la función de variable real $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ tenga la siguiente gráfica:



26. Determine cuál de las siguientes funciones no tiene una gráfica en los diagramas mostrados:

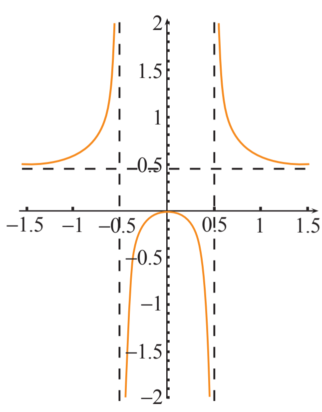
I) $f(x)=\dfrac{1}{2(2x-1)(2x+1)}$

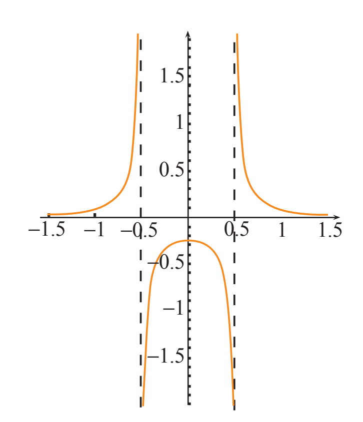
II) $g(x)=\dfrac{7x^2}{4(2x-1)(2x+1)}$

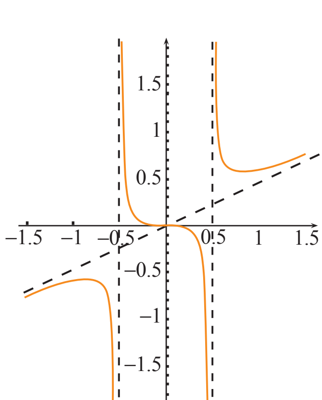
III) $h(x)=\dfrac{7x^3}{4(2x-1)(2x+1)}$

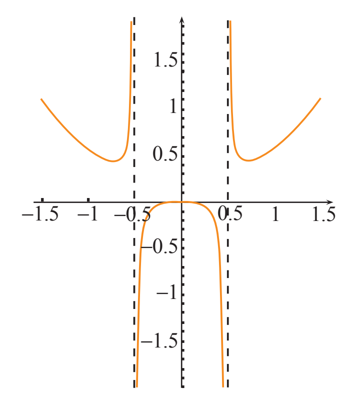
IV) $r(x)=\dfrac{7x^4}{4(2x-1)(2x+1)}$

V) $m(x)=\dfrac{7x}{(2x-1)(2x+1)}$



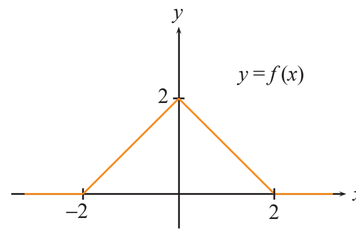


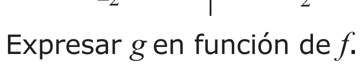




3.5 Técnicas de graficación de funciones

27. Las gráficas siguientes representan las funciones f y g, respectivamente.





Expresar g en función de f.

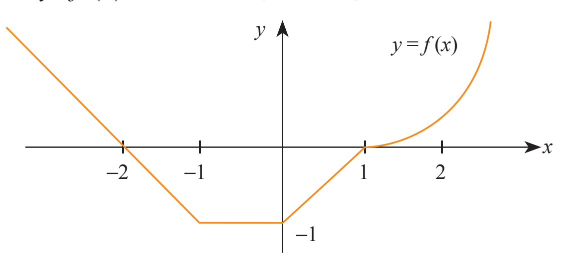
28. Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(|x|)$, entonces la gráfica de g es simétrica con respecto al eje Y.

a) Verdadero b) Falso

29. Respecto a la gráfica de la función $y=f(x)$ que se adjunta, grafique:



a) $y = f(x+1)-1$
b) $y = -2f(3-x)$
c) $y = |f(2x-4)|-2$
d) $y = |f(-|x|)|$
e) $y = 1-2f(|x|)$



3.6 Funciones definidas por tramos

30. Considere la función h de variable real definida por $\begin{cases} 4+2x\,; & -2 \le x \le 0 \\ 4-2x\,; & 0 < x \le 2 \\ 0\,; & |x| > 2 \end{cases}$.

Entonces, el valor de $\dfrac{h(-3)+h(0)-h(5)+h\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)}{h(1)+h(-1)-h(\pi)+h(-e)}$ es 1.

a) Verdadero b) Falso

31. Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$f(x)=\begin{cases} 2x-1\,; & x \ge 2 \\ x^2+3\,; & x \in (-\infty, 2) \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 3\,; & x \ge 2 \\ 1-x\,; & x \in (0, 2) \\ 4x\,; & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$

a) Determine el rango de f. b) Determine el rango de g.

32. Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x)=\begin{cases} |x|-4\,; & |x| \le 6 \\ 2\,; & |x| > 6 \end{cases}$, una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela.

a) f es par.
b) $[0, 2] \subseteq rg\,f$
c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = -5$
d) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0], [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)]$
e) f es acotada.

33. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} 7\,; & x < -4 \\ 3-x\,; & -4 \le x \le 4 \\ -1\,; & x > 4 \end{cases}$, entonces es verdad que:

a) f es una función par.
b) f es una función creciente.
c) f es una función inyectiva.
d) f es una función sobreyectiva.
e) $rg\,f = [-1, 7]$

34. Si la gráfica de una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = -x$, se la desplaza dos unidades hacia arriba, dos unidades hacia la izquierda y luego se la refleja con respecto al eje X, obteniéndose una función g, entonces $g(0) = -2$.

a) Verdadero
b) Falso

35. (Aplicación a la administración). El costo "C" en dólares australianos (AUD) del alquiler de un Bungalow por n semanas, está dado por la función lineal $C(n) = nr + s$, donde s es el depósito de garantía (costo fijo) y r es el monto del alquiler semanal (costo variable). Jenny alquiló el Bungalow por 12 semanas y pagó en total $2\ 925$ AUD. Yolanda alquiló el mismo Bungalow por 20 semanas y pagó en total $4\ 525$ AUD. Determine los valores de:

a) El alquiler semanal.
b) El depósito de garantía.

36. (Aplicación a la vida diaria). En la ciudad de Guayaquil existían $1\ 420$ médicos trabajando al 1 de enero de 1994. Después de n años, el número de médicos D que trabajan en la ciudad, viene dado por:

$$D(n) = 1\ 420 + 100n$$

a) ¿Cuántos médicos trabajaban en la ciudad a comienzos del año 2004?
b) ¿En qué año hubo por primera vez más de $2\ 000$ médicos trabajando en la ciudad?

37. (Aplicación a la economía). Una compañía tiene costos fijos de $\$2\ 500$ y los costos totales por producir 200 unidades son de $\$3\ 300$. Cada artículo se vende a $\$5.25$.

a) Suponiendo linealidad, escriba la ecuación de costos.
b) Suponiendo linealidad, escriba la ecuación de ingreso ($I = px$).
c) Grafique costo e ingreso en un mismo sistema de coordenadas con escalas adecuadas. El punto de intersección se lo denomina punto de equilibrio de mercado, determínelo algebraicamente.
d) ¿Cuántas unidades deberán venderse y producirse, de modo que resulte una utilidad de $\$200$? (U = Ingreso – Costo).

38. (Aplicación a la economía). El costo de producir x artículos está dado por $y_c = 2.8x + 600$.

a) Determine algebraicamente el punto de equilibrio ($I = C$) si cada artículo se vende a $\$4$.
b) Graficar la función costo e ingreso en un mismo plano cartesiano, identifique el punto de intersección (punto de equilibrio).
c) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debe ser el precio de cada artículo para garantizar que no exista pérdidas?

39. (Producción de aceite). Agrícola Palmera de Los Ríos produce aceite de palma africana, tiene tanques para almacenar el aceite después de prensar. Los tanques son cilíndricos y su volumen está determinado por $V = Ah$, donde A es el área de la superficie de la base y h es la altura del tanque. Se sabe que el área de la superficie de la base del tanque es $388\ m^2$ y la densidad del aceite es $0.859\ \frac{ton}{m^3}$.

a) Si la capacidad del tanque es de $5000 ton$ (toneladas), determine la altura del tanque de almacenamiento y aproxímelo al entero más cercano.

b) Grafique el volumen en función de la altura. Discuta acerca del dominio de esta función lineal respecto a la máxima capacidad del tanque. (Agradecemos la información para este ejercicio de la Agrícola Palmera de Los Ríos, especialmente a uno de sus ejecutivos, el Ing. Z. Junco).

40. Vanessa quiere alquilar una sala para su recepción de bodas, le dan dos posibilidades:

a) El ayuntamiento le cobrará $20£$ por el uso de un salón comunal más $5£$ por huésped.

(I) Complete la siguiente tabla correspondiente a los cargos del ayuntamiento.

Número de huéspedes (N)	10	30	50	70	90
Cargos (C) en £					

(II) Usando escalas adecuadas, dibuje una gráfica que muestre los cargos respecto al número de huéspedes. Tome el eje horizontal para el número de huéspedes y el eje vertical para los cargos.

(III) Escriba una expresión para C, en función de N, que pueda usar el ayuntamiento para calcular sus cargos.

b) Un hotel local calcula sus cargos para el uso de su sala de congresos usando la siguiente expresión:

$$C = \frac{5N}{2} + 500$$

En la que C es el cargo en £ y N el número de huéspedes.

(I) Complete la siguiente tabla de los cargos impuestos por el hotel.

Número de huéspedes (N)	10	30	50	70	90
Cargos (C) en £					

(II) En el mismo par de ejes usados en el apartado (a)(II), dibuje la gráfica de C.

Con la información anterior, discuta la mejor opción para Vanessa.

3.8 Funciones cuadráticas

41. Si cae un objeto al suelo en Júpiter desde una altura de 25 metros, la altura H (en metros) a la que se encuentra del suelo después de x segundos es $H(x)=25-16x^2$. Entonces, el objeto golpea el suelo a los 1.25 segundos.

a) Verdadero

b) Falso

42. Dada la función cuadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$, una condición necesaria y suficiente para que el producto de sus raíces sea igual a la suma de las mismas es que:

a) $a = b$ b) $b = -c$ c) $a = c$ d) $b = c$ e) $c = -a$

43. Dada la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2 + bx + 1$, $b \in \mathbb{R}$, identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) $dom\ g = (-\infty, +\infty)$

b) $(b^2 < 4) \to (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0)$

c) $\left(2 - \frac{b^2}{4}\right) \in rg\ g$

d) $rg\ g = \left[1 - \frac{b^2}{4}, +\infty\right)$

e) g es sobreyectiva.

44. Si f es una función de variable real, tal que $f(x) = |2x^2 - 3x + 1| - 2$, entonces es verdad que:

a) $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, f es creciente.

b) f es simétrica respecto a $x=3/4$.

c) f es par.

d) $f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

e) $\forall x \in (-\infty, 1)$, f es decreciente.

45. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 + x$, entonces es verdad que:

a) f es par.

b) f es inyectiva.

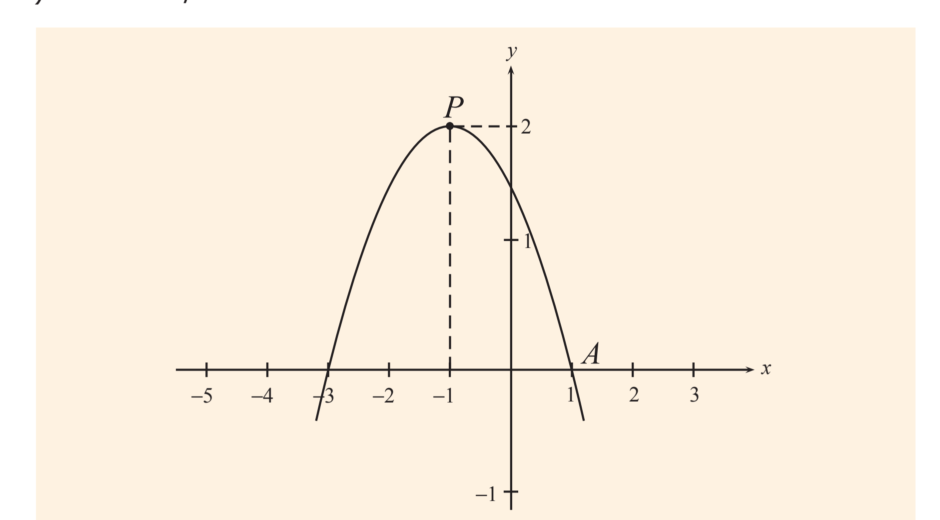
c) $rg\ f = [0, +\infty)$

d) f decrece en $(-\infty, -1)$

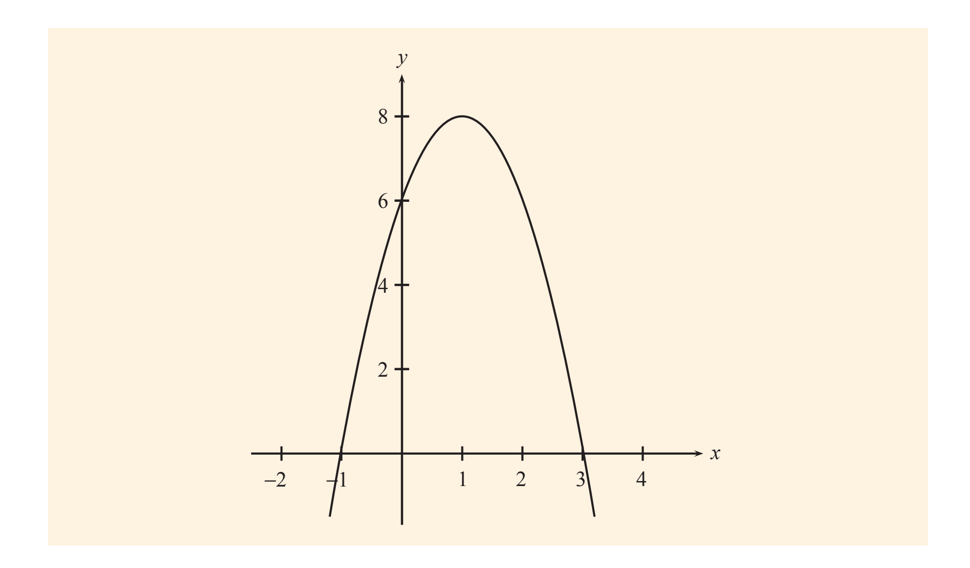
e) $\forall x \in \mathbb{R}$, f es creciente.

46. En la figura aparece parte de la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$. La gráfica tiene su vértice en P, y contiene el punto $A(1, 0)$. Entonces es verdad que:

a) $h + k = 3$
b) $a = 1/2$
c) $a + h = -3/2$
d) $a + h + k = -1/2$
e) $h + k - a = 0$



47. La figura a continuación muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.

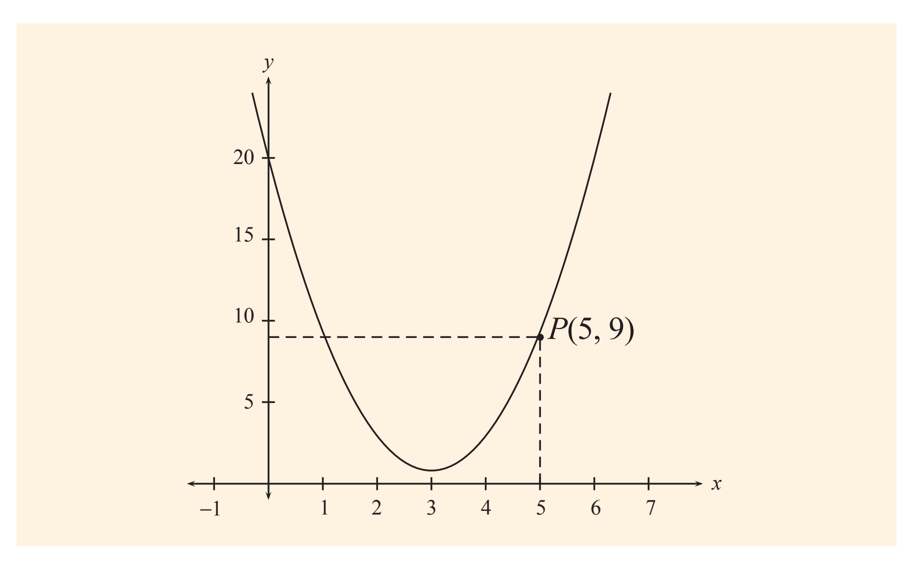


a) Determine el valor de c.

b) Determine el valor de a.

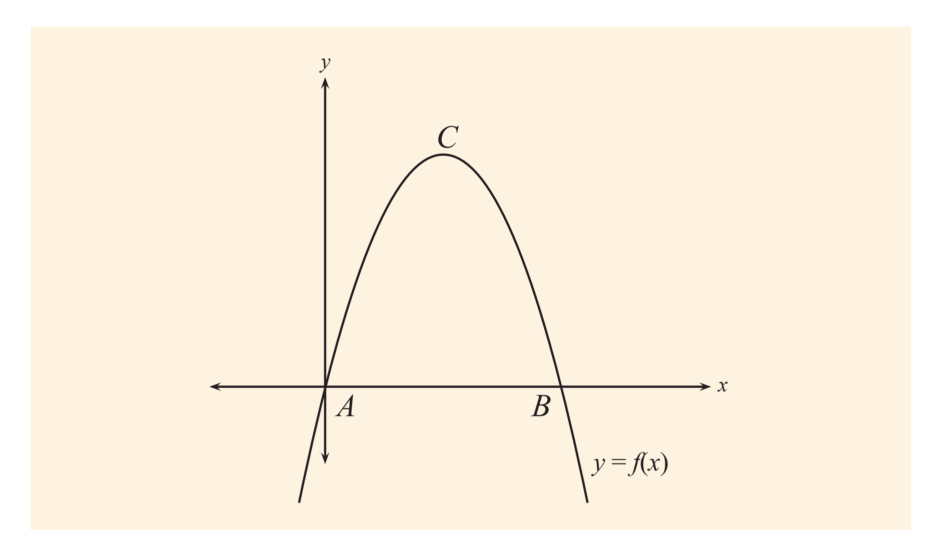
c) Escriba la función cuadrática descompuesta en factores.

48. El diagrama muestra parte de la curva $y = a(x - h)^2 + k$, donde $a, h, k \in \mathbb{Z}$.



a) Si el vértice está en el punto $(3, 1)$, determine los valores de h y k.
b) Si el punto $P(5, 9)$ está sobre la gráfica, demuestre que $a = 2$.
c) A partir de lo anterior, demuestre que la ecuación de la curva se puede escribir en la forma $y = 2x^2 - 12x + 19$.

49. La gráfica de la función $f(x) = 30x - 5x^2$ se muestra a continuación:

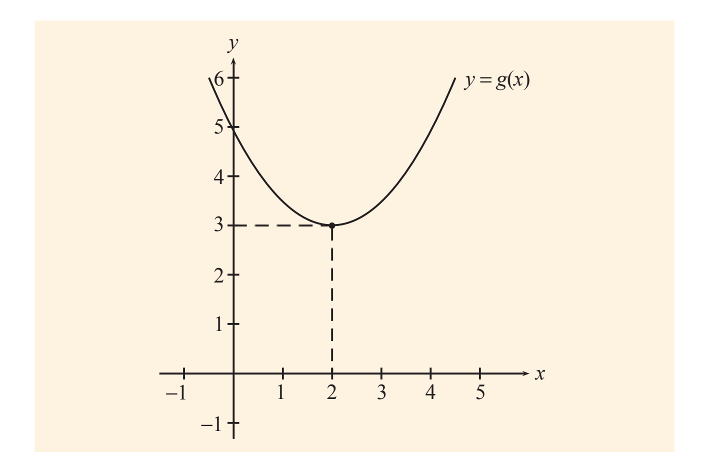


a) Determine las coordenadas de A y B.
b) Determine las coordenadas de C.
c) Escriba la ecuación de la recta paralela al eje Y que contiene el vértice C.

50. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una función cuadrática g, que se define por $g(x) = a(x - h)^2 + 3$.

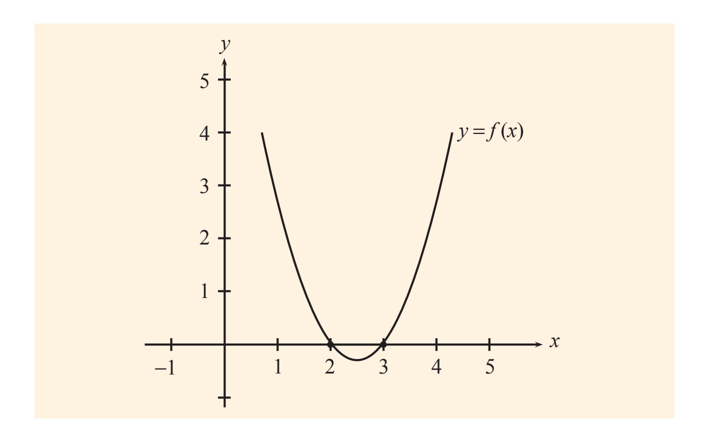
Determine el valor de:

a) h
b) a



51. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, que interseca el eje X en: $x = 2$ y $x = 3$.

Determine el valor de:
a) b
b) c



52. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x^2 + x + k$, entonces los valores de k para que la gráfica de f no interseque al eje X, son:

a) $\{2\}$ b) $(8, +\infty)$ c) $(1/8, +\infty)$ d) $\{1/8\}$ e) $(-\infty, 0)$

53. Una compañía puede vender a $\$100$ por unidad un artículo de primera necesidad que elabora. Si se producen x unidades al día, el número de dólares en el costo de la producción diaria es $x^2 + 20x + 700$.

a) Exprese el ingreso como una función de x.
b) Exprese la utilidad como una función de x.
c) Encuentre la ganancia máxima y cuántas unidades deben producirse al día para que la empresa obtenga esta ganancia.

54. La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, donde p es el precio unitario y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$. El precio de equilibrio es:

a) 5 b) 12 c) 22 d) 19 e) 17

55. El perímetro de un rectángulo tiene 24 metros.

a) La tabla muestra algunas dimensiones posibles del rectángulo. Determine los valores de a, b, c, d y e.

Longitud (metros)	Anchura (metros)	Área (m^2)
1	11	11
a	10	b
3	c	27
4	d	e

b) Si el perímetro del rectángulo es fijo y el área es A en m^2, exprese A en función de la longitud x del rectángulo.

c) ¿Qué longitud y anchura tiene el rectángulo si el área es máxima?

56. Un objeto que se lanza hacia arriba llega a una altura de h metros pasados t segundos, donde $h(t) = 30t - 5t^2$.
a) ¿Después de cuántos segundos alcanza el objeto su altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?

57. El costo de producir un texto de matemáticas para cierto nivel es de $\$15$ y se vende después por $\$x$. Si se vende un total de $(100000 - 4000x)$ libros:

a) Determine una expresión para el beneficio (utilidad) obtenido por todos los libros vendidos.
b) A partir de lo anterior, calcule el valor de x que produce un beneficio máximo.
c) Calcule el número de libros vendidos para producir este beneficio máximo.

3.9 Operaciones con funciones de variable real

58. Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; \ x \geq 2 \\ x^2+3 & ; \ x \in (-\infty, 2) \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 3 & ; \ x \geq 2 \\ 1-x & ; \ x \in (0, 2) \\ 4x & ; \ x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

a) Determine $f-g$

b) Determine f/g

c) Determine $f+g$

d) Determine fg

59. Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,tales que:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & ; \ x \leq -6 \\ 2x-1 & ; \ -6 < x \leq 1 \\ 4 & ; \ x > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x \leq 4 \\ x^2-1 & ; \ 4 < x < 6 \\ 2 & ; \ x \geq 6 \end{cases},$$

entonces la regla de correspondencia de $f+g$ es:

a) $\begin{cases} x+4 & ; \ x \leq 4 \\ x^2+2x & ; \ 4 < x < 6 \\ 6 & ; \ x \geq 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+4 & ; \ x \leq -6 \\ x^2+2x-2 & ; \ -6 < x < 6 \\ 6 & ; \ x \geq 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4 & ; \ x \leq -6 \\ 2x & ; \ -6 < x \leq 1 \\ 5 & ; \ 1 < x \leq 4 \\ x^2+3 & ; \ 4 < x < 6 \\ 6 & ; \ x \geq 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+4 & ; \ x \leq -6 \\ x^2+3 & ; \ 4 < x < 6 \\ 6 & ; \ x \geq 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+4 & ; \ x \leq -6 \\ 2x & ; \ -6 < x < 6 \\ 6 & ; \ x \geq 6 \end{cases}$

60. Sean f y g dos funciones de variable real con reglas de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x \leq 0 \\ \sqrt{x} & ; \ x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=x^2-x-2; \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Realizar las siguientes operaciones y especifique su dominio.

a) $f+g$ b) $g-f$ c) fg d) f/g e) g/f

61. Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuyas reglas de correspondencia son:

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \ x > 1 \\ 1 & ; \ x \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} 3-x & ; \ |x| \leq 4 \\ x+1 & ; \ |x| > 4 \end{cases},$$

entonces la regla de correspondencia de la función $f \circ g$ es:

a) $\begin{cases} x+1 & ; \ x > 4 \\ 3-x & ; -4 \leq x < 2 \\ 1 & ; \ x < -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 & ; \ |x| \leq 4 \\ x+1 & ; \ |x| > 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3-x & ; \ x > 0 \\ x+1 & ; -4 \leq x \leq 0 \\ 1 & ; \ x < -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 & ; -4 \leq x < 2 \\ x+1 & ; \ x > 4 \\ 1 & ; \ 2 \leq x \leq 4 \vee x < -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+1 & ; \ x > 4 \\ 3-x & ; -4 \leq x < 2 \\ 1 & ; \ 2 \leq x \leq 4 \vee x < -4 \end{cases}$

62. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y g es una función par de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces la función $f \circ g$ es par.

a) Verdadero   b) Falso

63. Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x+1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ y $g(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Entonces la regla de correspondencia de la función $g \circ f$ es:

a) $\begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x^2 - 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ x^2 + 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x^2 + 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ x^2 - x & ; x \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^2 - 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$

64. Sea g una función de variable real, tal que $g(x) = x^3$.
a) Determine g^{-1}.
b) Grafique g y g^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.
c) Encuentre A$q(x)$ si $q(x)$: $g(x) = g^{-1}(x)$.

65. Sean las funciones de variable real definidas por:

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x^2$ Determine $f \circ g \circ h$

$h(x) = x - 1$

66. Dada $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 6$ y $f(0) = 9$, determine la regla de correspondencia de g si:

a) $g(x) = x - k$ siendo $k \in \mathbb{N}$.   b) $g(x) = x - k$ siendo $k \in \mathbb{Z}^-$.

67. Sean las funciones $f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & ; x \leq 3 \\ (x-2)^2 & ; x > 3 \end{cases}$ y $g(x) = 1 - 2x;\ x \leq 0$, determine la regla de correspondencia de $f \circ g$.

3.10 Funciones especiales

68. El rango de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia: $f(x) = -[\![x]\!]$ es el conjunto de los números enteros.

a) Verdadero   b) Falso

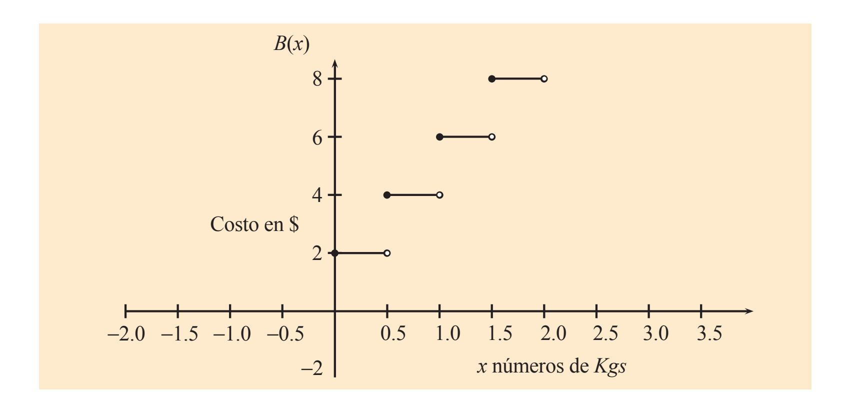
69. Sea $f(x) = x^3$, con $x \in (-\infty, +\infty)$, la suma de los elementos del conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $f(x) = f^{-1}(x)$, es:

a) 2 b) 0 c) 1 d) -2 e) -1

70. Miriam desea enviar un paquete a Madrid desde la oficina de correos. Tiene dos opciones. La ***Opción A*** contiene un cargo fijo por enviar el paquete, más un costo que depende del peso del paquete. Estos cargos se expresan por la ecuación $A(x) = 6 + 3x$, donde x es el peso del paquete en kg, y A es el costo total de enviar el paquete expresado en \$ (dólares USA).

a) ¿De cuánto es el cargo fijo por enviar un paquete según la ***Opción A***?
b) ¿Cuánto costaría enviar un paquete que pesa $2.4\ kg$ según la ***Opción A***?
c) El costo de la ***Opción B*** se muestra parcialmente en la siguiente gráfica.

El peso en kg está representado por la variable x.



La función $B(x)$ puede definirse para valores de x entre 0 y $1\ kg$ como sigue:

$$B(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \le x < 0.5 \\ 4 & \text{para } 0.5 \le x < 1 \end{cases}$$

Para pesos mayores de $1\ kg$, el costo se sigue incrementando en intervalos de \$2, siguiendo el mismo modelo que para pesos inferiores. Defina $B(x)$ para pesos entre 2 y $3\ kg$, escribiendo su respuesta según el esquema a continuación:

$$B(x) = \begin{cases} \ldots \text{ para } \ldots \\ \ldots \text{ para } \ldots \end{cases}$$

d) Determine la regla de correspondencia que exprese el costo para $x \ge 0$ de la ***Opción B***.
e) Determine el costo de enviar un paquete que pesa $1.6\ kg$ usando la ***Opción B***.
f) Si a Miriam le costó \$22.50 enviar por correo un paquete usando la ***Opción A***, ¿cuánto pesaba este paquete?
g) ¿Cuánto le costaría enviar por correo este mismo paquete con la ***Opción B***?
h) Determine un peso (x entero distinto de cero) para el cual el costo de ambas opciones sea el mismo. Determine este costo.

71. Sea h una función de variable real con regla de correspondencia $h(x) = |x-2| - |x| + 2$, entonces es verdad que:
a) $h(x) = 4$ si $x \geq 2$.
b) Si $x < 0$, entonces $h(x) = 0$.
c) Si $0 \leq x < 2$, entonces $0 < y \leq 4$.
d) Si $x < 0$, entonces $h(x) = 4 - 2x$.
e) Si $x < 2$, entonces $h(x) = 4$.

72. Si se define la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = sgn(x-2) + sgn(x+1)$, entonces una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:
a) Si $x > 2$, entonces $f(x) = 2$.
b) f es creciente.
c) $f(\pi) > 1$
d) $\forall x\,(f(x) = -f(-x))$
e) $\forall x\,(f(x) \leq 2)$

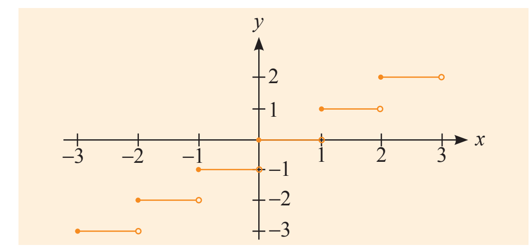
73. Dadas las funciones de variable real f, g y h, tal que $f(x) = sgn(x)$, $g(x) = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ y $h(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \geq 0 \\ x-1 & ; x < 0 \end{cases}$, determine $[2f - 3(g+h)](x)$.

74. Si se tienen las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tales que $f(x)=\mu(x)$ y $g(x)=sgn(x)$, entonces $[f(x)+g(x)]$ es:

a) $\begin{cases} 1 & ; x < 1 \\ 0 & ; x = 1 \\ 4 & ; x > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 4 & ; x > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 2 & ; x > 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 16 & ; x > 0 \end{cases}$

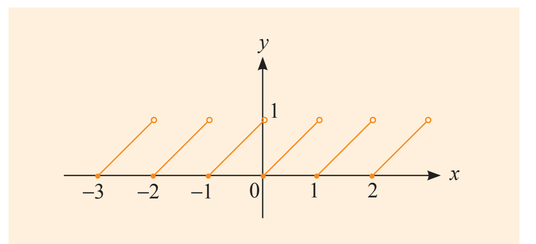
75. Relacione cada gráfica con la función de variable real correspondiente:

a) $f(x) = [\![2 - sgn(x)]\!] - x^2$

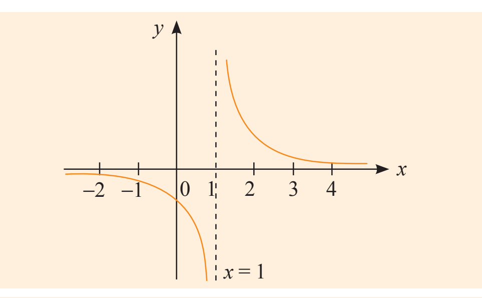


b) $f(x) = x - [\![x]\!]$

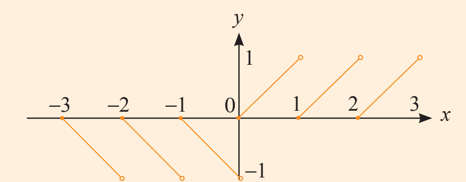
c) $f(x) = \begin{cases} x - [\![x]\!]; & x \geq 0 \\ [\![x]\!] - x; & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$



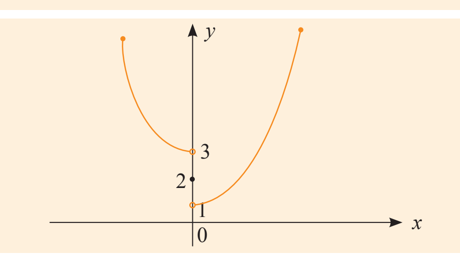
d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$



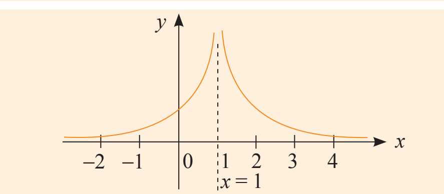
e) $f(x) = [\![x]\!]$



f) $f(x) = [2 - sgn(x)] + x^2$



g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

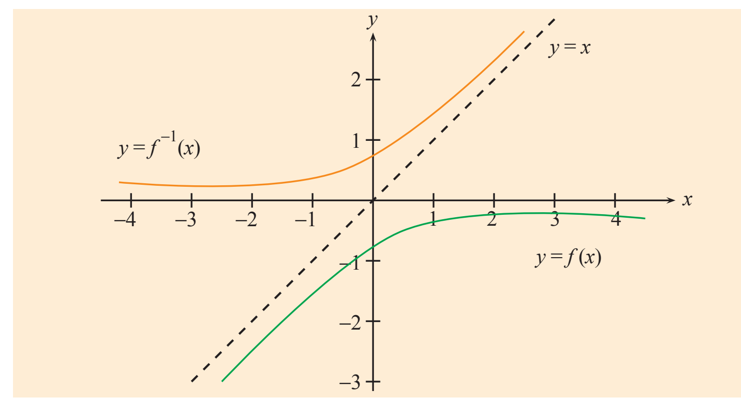


h) $f(x) = x + [\![x]\!]$

3.11 Función inversa de una función biyectiva

76. Si una función f tiene inversa y su gráfica se encuentran en el primer cuadrante, la gráfica de f^{-1} estará en el primer cuadrante también.
    a) Verdadero b) Falso

77. La siguiente es la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ biyectiva y su inversa f^{-1}.
    a) Verdadero b) Falso



78. Si f es una función inversible tal que $f^{-1}(a) = 2$, entonces $f(2) = a$.
a) Verdadero
b) Falso

79. Si $f(x) = x^2 - 4x - 3$, $x \in (-\infty, 2]$ es la regla de correspondencia de una función inversible, entonces la regla de correspondencia de la inversa de f es:

a) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{7 - x};\ x \geq -7$
b) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{7 + x};\ x \geq -7$
c) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{7 + x};\ x \geq -7$
d) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{7 - x};\ x \geq -7$
e) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{7 + x};\ x \leq -7$

80. Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$$f(x) = \frac{8}{x};\ x \neq 0 \text{ y } g(x) = x^2.$$

a) Determine f^{-1}. ¿Cuál es la relación con la función f?
b) Determine $f^{-1} \circ g$. Determine si es par o impar.
c) Determine A$p(x)$ si $p(x)$: $(f^{-1} \circ g)(x) = x$.

81. Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$$f(x) = 4(x - 1)$$

$$g(x) = \frac{6 - x}{2}$$

a) Determine g^{-1}.
b) Resuelva la ecuación $(f^{-1} \circ g)(x) = 4$.

82. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función $f: A \to A$, definida por: $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 5)\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $f \circ f$ es inyectiva.
b) $(f \circ f) \circ f = f$.
c) f es inyectiva.
d) $f \circ f$ es una función sobreyectiva.
e) $f = f^{-1}$

83. Sean $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = 3x - 4$; $h(x) = \dfrac{8}{x}$, $x \neq 0$ y $r(x) = x^2$.

a) Demuestre que f y h son inyectivas.
b) Demuestre la regla de correspondencia de f^{-1}.
c) Grafique f y f^{-1} en el mismo plano.
d) Demuestre $(g \circ f)(-2)$.
e) Demuestre la regla de correspondencia de $(f \circ g)(x)$.
f) Demuestre la regla de correspondencia de h^{-1}.
g) Grafique g y h^{-1} en el mismo plano.
h) Demuestre la regla de correspondencia de $(h^{-1} \circ r)(x)$.
i) Demuestre el conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $(h^{-1} \circ r)(x) = 1/2$.

84. Si f es una función cuyo dominio es el intervalo $[5, +\infty)$ y su regla de correspondencia es $f(x) = \sqrt{x-5} - 5$, entonces el dominio de f^{-1} es:

a) $[5, +\infty)$ b) $(5, +\infty)$ c) $[-5, +\infty)$ d) $[-5, 0]$ e) $[-5, 5) \cup (5, +\infty)$

85. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 - 1}$ con dominio $(1, +\infty)$, contiene al punto $\left(2, \frac{1}{3}\right)$. Determine:

a) El valor de a.
b) La regla de correspondencia de f^{-1}.
c) La función recíproca $1/f$.
d) La función $f \circ (1/f)$.

3.12 Funciones polinomiales

86. Si $p(x)$ es un factor del polinomio $q(x)$ y r es una raíz de la ecuación polinómica $p(x) = 0$, entonces $(x-r)$ es un factor del polinomio $q(x)$.

a) Verdadero b) Falso

87. Sea p una función polinomial con regla de correspondencia $p(x) = x^2 + ax + b$. Si al dividir $p(x)$ para $(x - 3)$ se obtiene residuo 1, entonces $a + b = 1$.

a) Verdadero b) Falso

88. Si $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro y $\dfrac{P(x)}{x-2} = D(x) + \dfrac{k}{x-2}$, entonces $D(x)$ es un polinomio de grado tres.

a) Verdadero b) Falso

89. Si se define una función polinomial con regla de correspondencia $p(x) = x^3 + x^2 - (k+7)x + \dfrac{21}{8}$, tal que $k \in \mathbb{R}$, entonces el valor de k para que $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ sea factor de $p(x)$, es:

a) -1 b) 7 c) 14 d) -14 e) -7

90. La suma de a y b, tales que la función polinomial $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ sea divisible para el trinomio $x^2 - x - 2$, es:

a) 1 b) -1 c) 7 d) -7 e) 2

91. La suma de los valores reales de k, tales que al dividir el polinomio $p(x) = k^2x^3 - 4kx + 4$ para $(x-1)$ se obtenga como residuo 1, es:

a) 4 b) 5 c) -1 d) 2 e) -5

92. Si se tiene un polinomio $p(x) = x^3 + mx - x - 2$, entonces el valor de m, tal que la división de $p(x)$ para $(x - 2)$ tenga como residuo 4, es:

a) 1/4 b) 0 c) –3 d) 1 e) –1

93. Si una de las raíces de la función polinomial $p(x) = x^4 - ax^2 + 5x + b$ es 2 y $p(1) + 10 = 0$, entonces el residuo de dividir $p(x)$ para $(x - 3)$ es:

a) 120 b) 150 c) 160/3 d) 160/30 e) 244/3

94. Sea $p(x) = (a + 1)x^5 + (b - 2)x^4 - 31x^3 - 39x^2 + 76x - 20$ una función polinomial, tal que si se divide para $(x - 1)$ el residuo es cero, si se divide para $(x + 3)$ el residuo es 400, entonces la suma $a + b$ es:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

95. Si al dividir $q(x) = x^2 + ax + b$ para $(x - 1)$ se obtiene como residuo –3 y al dividir $q(x)$ para $(x - 2)$ el residuo es –7, entonces el valor de ab es:

a) –6 b) –24 c) –21 d) 6 e) 21

96. Determine los ceros de la función $p(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

97. Determine el polinomio $p(x)$ de cuarto grado que cumpla las siguientes condiciones:

I) El coeficiente de x^4 es 1.
II) $p(1)=0$.
III) $p(x)$ es divisible para el trinomio $x^2 + 2x + 2$.
IV) Al dividir $p(x)$ para x el residuo es –2.

98. Determine el valor de k para que la función $q(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + k$, tenga una raíz igual al doble de la otra.

3.13 Función exponencial

Las dos preguntas siguientes se refieren a la misma gráfica. En el diagrama aparece la forma de una cadena colgada entre dos ganchos, A y B. Los puntos A y B están a alturas iguales por encima del suelo. P es el punto más bajo de la cadena y se encuentra a p unidades del suelo. El suelo se representa por el eje X. La abcisa de A es –2, y la abcisa de B es 2. El punto P pertenece al eje de las Y. La forma de la cadena está dada por $y = 2^x + 2^{-x}$, donde $-2 \leq x \leq 2$.

99. El valor de P es:

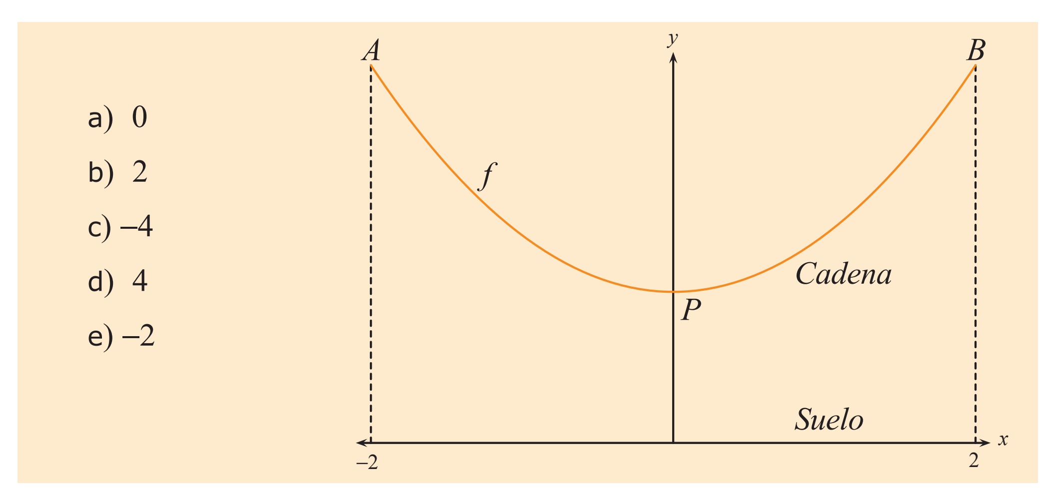
a) 0

b) 2

c) –4

d) 4

e) –2



100. El rango de f es:

a) $\mathbb{R}$ b) $[p, 4]$ c) $[p, +\infty)$ d) $\left[p,\ 4\frac{1}{4}\right]$ e) $[p, 8]$

101. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con regla de correspondencia $f(x) = -\frac{1}{2^{|x|}} + 1$, es falso que:

a) f es una función acotada.

b) f es una función par.

c) $(f \circ f)(x) = -\dfrac{1}{2^{1-\frac{1}{2^{|x|}}}} + 1$

d) $rg\,f = [0, 1)$

e) f es una función inyectiva.

102. El valor más aproximado a $4 \text{x} 4^{1/3} \text{x} 4^{1/9} \text{x} 4^{1/27}$... es:

a) 4^{100} b) 4000 c) 8 d) 2^{100} e) 0

103. Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x) : 3^{x+1} + 3^{x} + 3^{x-1} = 39$

b) $q(x) : 2^{x+1} + 4^{x} = 80$

c) $r(x) : 6(3^{2x}) - 13(6^{x}) + 6(2^{2x}) = 0$

104. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = e^{sgn(x)+\mu(x)}$, entonces es verdad que:

a) f es estrictamente creciente.
b) $f(\pi) = f(-\sqrt{2})$.
c) f es impar.
d) f no es inyectiva.
e) $rg\, f = \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$.

105. Determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $4^x + 2^{x+1} = 8$

b) $h(x)$: $2^x + (0.5)^{2x-3} - 5(0.5)^{x-1} = -1$

c) $q(x)$: $16^x - 6(4)^x = -8$

d) $r(x)$: $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

e) $q(x)$: $3^x + 9^x = 6642$

106. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{x-1} - 1$, entonces es verdad que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [f$ es decreciente$]$.
b) $y = -1$ es una asíntota de la gráfica de f.
c) $f(-1) = 0$.
d) f es una función impar.
e) $\forall x \in \mathbb{R}\ [\mu(f(x)) = 1]$.

107. Determine el conjunto de verdad de las siguientes desigualdades. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$

b) $(0.04)^{5x-x^2} < 625$

c) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} \geq 0$

d) $\dfrac{1}{(0.5)^x - 1} - \dfrac{1}{1-(0.5)^{x+1}} \geq 0$

e) $0 < 8^x + 18^x - 2\,(27)^x$

108. Sean f y g funciones de variable real, tales que:
$f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, y $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Halle las funciones siguientes y determine su dominio:

a) $g \circ f$

b) g^{-1}

c) $g^{-1} \circ g$

3.14 Función logarítmica

109. $\forall x \in \mathbb{R}^+(log(x)\ log(x)\ log(x) = 3log(x))$.

a) Verdadero		b) Falso

110. Si $\text{Re} = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $p(x)$: $ln(log_x 2) = -1$, entonces $Ap(x) = \{2^e\}$.

a) Verdadero		b) Falso

111. Sea $c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Si a y b son números reales cualesquiera, tal que $a < b$, entonces $log_c\, a < log_c\, b$.

a) Verdadero		b) Falso

112. La gráfica de toda función logarítmica $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, contiene a los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

a) Verdadero		b) Falso

113. Si $log(2) = a$ y $log(3) = b$, entonces $log(75)$ es:

a) $3 - 3a$	b) $2 - a + b$	c) $2 - 2b + a$	d) $1 - a + b$	e) $2 + b - 2a$

114. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+3}; & x \leq 3 \\ log_3(x-2); & x \in (3, +\infty) \end{cases} \qquad g(x) = 1 - 2x \quad ; x \leq 0$$

Determine:
a) El rango de f y g.	b) Las gráficas de f y g.	c) $f+g$

115. Determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $log(x - 1) = log\sqrt{5 + x} + log\sqrt{5 - x}$
b) $q(x)$: $log(x^2 - 4) - log(x + 2) = 3log(x - 2)$
c) $p(x)$: $e^x - e^{-x} = 1$
d) $r(x)$: $5^x - 5^{-x} = 2$
e) $h(x)$: $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$

116. Despeje x en las siguientes ecuaciones:

a) $10^{x^2+3x} = 200$		b) $ln(x + 4) = 5y + ln\ C$

117. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $log_2 4\ log_4 6\ log_6 8 = -3$

b) $(log\,x)^n = n\,log\,x,\ \forall\, x > 0$

c) $ln(1 + 2 + 3) = ln1 + ln2 + ln3$

d) $e^{ln\sqrt{13}} = 13^{1/2}$

e) $2^{log_2 2} + log_4 \frac{1}{16} = 4$

118. Simplifique las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $36^{log_6 5} + 10^{1-log2} - 3^{log_9 36}$

b) $81^{\frac{1}{log_5 3}} - 27^{log_9 36} - 3^{\frac{4}{log_7 9}}$

c) $log_8 (log_4 (log_2 16))$

d) $2 - log_2\left(log_3 \sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)$

e) $1 + log\left(log \sqrt{\sqrt[5]{10}}\right)$

f) $log\left(11 - log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}\ log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}\right)$

g) $(log_3 7)(log_7 5)(log_5 4) + 1$

119. Demuestre que:

$$\frac{1}{log_a n} + \frac{1}{log_{a^2} n} + \frac{1}{log_{a^3} n} + \frac{1}{log_{a^4} n} + \frac{1}{log_{a^5} n} = 15 log_n a$$

120. Determine:

a) $log_{100} 40$ si $log_2 5 = a$

b) $log_3 5$ si $log_6 2 = a$ y $log_6 5 = b$

c) $log_2 360$ si $log_3 20 = a$ y $log_3 15 = b$

d) $log_b[28(b^{1-2a})]$ si $log_b 2 = \frac{a}{4}$, $log_b 7 = \frac{3a}{2}$, $b > 0$, $a > 0$, $b \neq 1$

e) $log_{m^2}(mn^3)$ si $log_a m = x$ y $log_a n = y$

121. Determine el valor exacto de x que satisface la ecuación: $3^x(4^{2x+1}) = 6^{x+2}$. Expresar la respuesta en la forma $\frac{ln\,a}{ln\,b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

122. Determine el valor de $log_{a^2}\sqrt{108}$ si $log_a 2 = \frac{5}{2}$ y $log_a 3 = \frac{1}{3}$.

123. Sea $p(x)$: $2^x + (0.5)^{2x-3} - 6(0.5)^x = 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Determine $Ap(x)$.

124. A continuación se indican las reglas de correspondencia de varias funciones y un dominio posible. Una de las opciones no es correcta, identifíquela:

a) $f(x) = ln(x-1)$; $dom\, f = (1, +\infty)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{log_{x+1} 2}$; $dom\, f = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{|x| - x}$; $dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

d) $f(x) = \dfrac{x^8 - x^3 + x - \sqrt{2}}{log(x^2 + 1)}$; $dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $f(x) = log([\mu(x)])$; $dom\, f = \mathbb{R}^+$

125. En el siguiente desarrollo de seis pasos, indicar claramente en cuál de ellas está el error y explique por qué.

(i) $5 > 3$

(ii) $5ln\left(\frac{1}{2}\right) > 3ln\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $ln\left(\frac{1}{2}\right)^5 > ln\left(\frac{1}{2}\right)^3$

(iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

(v) $\frac{1}{32} > \frac{1}{8}$

(vi) $1 > 4$

126. Si f es una función de variable real biyectiva, tal que su regla de correspondencia es $f(x)=2e^{x-3}; x \in \mathbb{R}$, entonces la regla de correspondencia de la función inversa de f es:

a) $f^{-1}(x) = 2e^{x-3}$

b) $f^{-1}(x) = 3 + ln\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $f^{-1}(x) = ln(2x - 3)$

d) $f^{-1}(x) = 2ln(x - 3)$

e) $f^{-1}(x) = 2 + ln\left(\frac{x}{3}\right)$

127. Si f es una función inversible de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} e^x; \; x > 0 \\ 1 - x^2; \; x \leq 0 \end{cases}$, entonces la regla de correspondencia de la función $f^{-1}(x)$ es:

a) $\begin{cases} ln(x); \; x > 0 \\ 1 - x; \; x \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ln(x); \; x > 0 \\ -1 - x; \; x \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ln(x); \; 1 < x \\ \sqrt{1 - x}; \; x \leq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} ln(x); \; x > 1 \\ -\sqrt{1 - x}; \; x \leq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} ln(x); \; 1 \leq x \\ \sqrt{1 - x}; \; x < 1 \end{cases}$

128. Con respecto a la función de variable real $f(x)=\begin{cases} 1-x^2;\ x \geq 1 \\ ln(x);\ x < 1 \end{cases}$, se puede afirmar que:

a) f es inyectiva.

b) f es creciente.

c) f no es sobreyectiva.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, [f(-x) = f(x)]$

e) $rg\, f = (-\infty, 1)$

129. Grafique la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} ln(x+1);\ x \geq 0 \\ 1 - e^x;\ x < 0 \end{cases}$$

130. Demuestre que:

$\forall\, M \in \mathbb{R}^+, \forall N \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, [log_a(MN^{-1}) = log_a(M) - log_a(N)]$

131. Determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $log(x+4) + log(2x+3) = log(1-2x)$

b) $p(x)$: $ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - ln(x^2-1) + 2 = 0$

c) $r(x)$: $(log_2 x)^2 = log_2 x^2$

d) $h(x)$: $log_3(x^2 - 3x - 5) = log_3(7-2x)$

e) $m(x)$: $log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + log_2(3^{x-1} + 1)$

f) $p(x)$: $log_5(5^{1/x} + 125) = log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}$

g) $q(x)$: $log^2(x) + log(x) + 1 = \dfrac{7}{log\frac{x}{10}}$

h) $r(x)$: $log^2(x^3) - log(0.1x^{10}) = 0$

i) $m(x)$: $log_{0.5x}(x^2) - 14log_{16x}(x^3) + 40log_{4x}(\sqrt{x}) = 0$

132. Si se define el conjunto referencial $\text{Re}=\mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$: $log_{\frac{1}{4}}(x)-\frac{1}{log_{\frac{1}{4}}(x)}-\frac{3}{2}=0$; entonces la suma de los elementos de $\text{A}p(x)$ es:

a) $\frac{15}{8}$ b) $\frac{7}{16}$ c) $\frac{33}{16}$ d) $\frac{26}{32}$ e) 2

133. Si $f(x)=\begin{cases}2^{(x-3)}, & x\leq 3\\ log_3(x-2), & x>3\end{cases}$ y $g(x)=1-2x$, $x\leq 0$, entonces la regla de correspondencia de la función fog es:

a) $2^{-2(x+1)}$, $x\leq 0$

b) $\begin{cases}2^{-2(x+1)}, & -1\leq x\leq 0\\ log_3(-1-2x), & x<-1\end{cases}$

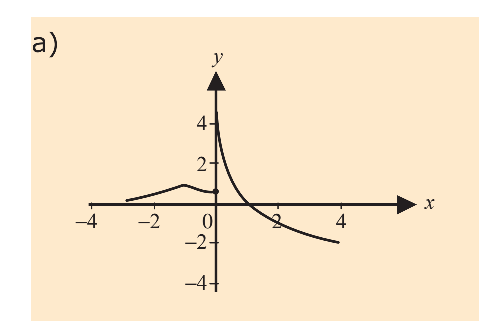
c) $\begin{cases}2^{-2(x+1)}, & x\leq 3\\ log_3(-1-2x), & x<3\end{cases}$

d) $log_3(-1-2x)$, $x\leq 0$

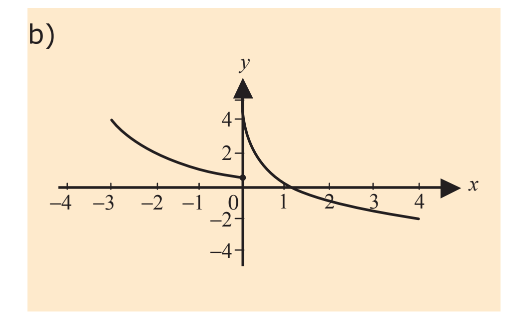
e) $\begin{cases}2^{2(x+1)}, & -1\leq x\leq 0\\ log_3(1-2x), & x<-1\end{cases}$

134. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\begin{cases}2^{-|x+1|}, & x\leq 0\\ log_{\frac{1}{2}}|x|, & x>0\end{cases}$, entonces la gráfica de f es:

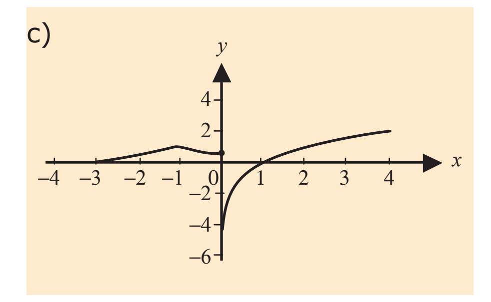
a)



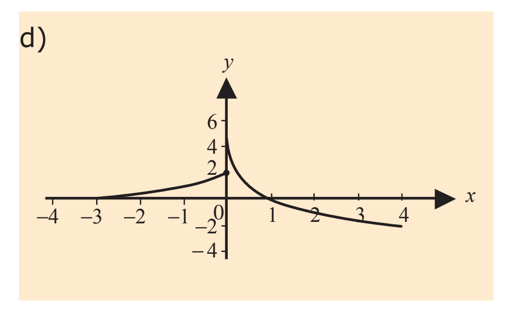
b)

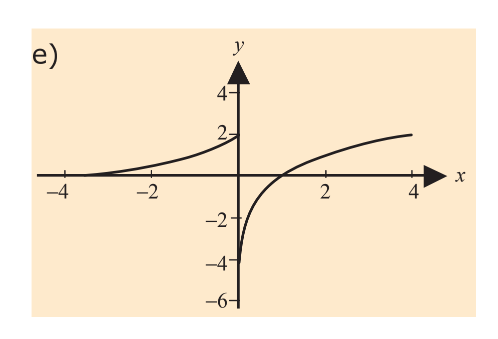


c)



d)





135. Dado $p(x)$: $sgn(ln|\,|x|-1|) = -1$, sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $Ap(x)$ es:

a) $(-2, 2)$
b) $(0, +\infty)$
c) $\mathbb{R} - \{0\}$
d) $(0, 2)$
e) $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$

136. Si f: $\mathbb{R} \to (-3,+\infty)$ es una función con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 \ ; \ x \leq -1 \\ 2x \ ; \ x \in (-1, 0) \\ ln(x+1) \ ; \ x \geq 0 \end{cases}$$

Determine el valor de: $\dfrac{f(-2) - f(2)}{f^{-1}(-1)}$.

137. Determine el conjunto de verdad de las siguientes desigualdades. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11}\right) \leq -1$

b) $log_2\left(\dfrac{4}{x+3}\right) > log_2(2 - x)$

c) $log_{0.2}(x^3+8) - 0.5log_{0.2}(x^2+4x+4) \leq log_{0.2}(x+58)$

d) $log_{x-2}(2x-3) \geq log_{x-2}(24 - 6x)$



Capítulo 4
Trigonometría

Introducción

La trigonometría es una rama de las matemáticas que fue desarrollada por astrónomos griegos, quienes consideraban al cielo como el interior de una esfera. Aún cuando su significado etimológico nos indica que se relaciona con la medición de los triángulos, sus aplicaciones son muy diversas ya que estas técnicas son usadas para medir distancias a estrellas próximas, entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

El traslado de la trigonometría astronómica a las matemáticas fue realizado por Regiomontano y mejorado por Copérnico y su alumno Rheticus. En la obra de Rheticus se definen las seis funciones trigonométricas como razones entre las longitudes de los lados de los triángulos, aunque no les dio sus nombres actuales. El mérito de esto se lo lleva Thomas Fincke, aunque la notación que utilizó no fue aceptada universalmente. La notación que quedó establecida fue la de Leonard Euler.


Copérnico, astrónomo polaco (1473 - 1543)

Desde entonces, la trigonometría ha venido evolucionando, siendo utilizada por agrimensores, navegantes e ingenieros, hasta las aplicaciones actuales como el movimiento de las mareas en el océano, la variación de los recursos alimenticios bajo ciertas condiciones ecológicas, el movimiento pendular, patrones de ondas cerebrales, latidos del corazón, corrientes eléctricas, temblores y otros fenómenos.

En el desarrollo de las funciones trigonométricas se han contemplado dos aspectos fundamentales. El primero está relacionado con el empleo de circunferencias; y, el segundo está basado en triángulos rectángulos.

4.1 Ángulos y sus medidas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar con sus propias palabras la diferencia entre ángulo y medida de un ángulo.
* Relacionar las medidas de los diferentes tipos de ángulos que existen.
* Dada la medida de un ángulo en grados sexagesimales, convertirla a radianes y viceversa.
* Dada la medida de un ángulo, indicar su ubicación en el plano cartesiano.

Iniciaremos esta sección describiendo un elemento importante para la definición de ángulo, éste es la semirrecta.

Definición 4.1 (Semirrecta)

Una semirrecta es la parte de una recta que está a un lado de la misma, desde un punto fijo llamado extremo y se extiende indefinidamente en una sola dirección.

Definición 4.2 (Ángulo)

Es la unión de dos semirrectas que se intersecan en su extremo.

Una de las semirrectas se conoce como el lado inicial del ángulo, mientras que la otra recibe el nombre de lado terminal o final. El extremo donde se intersecan las semirrectas se denomina **vértice** del ángulo.

Se puede designar a los ángulos, por medio de puntos de las semirrectas o utilizando solamente el vértice, si es que no hay confusión. Por ejemplo:

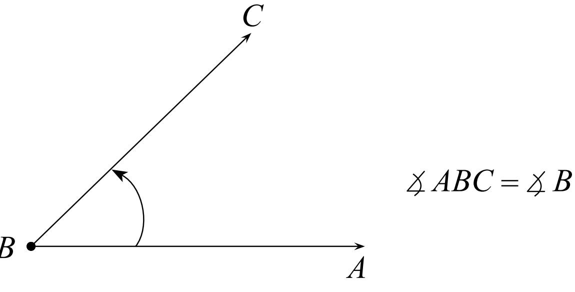


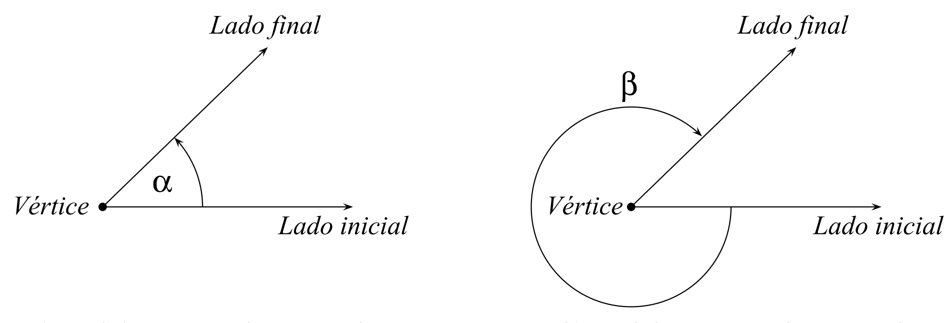
Figura 4.1: Ángulo.

La **medida de un ángulo** se denota por m, representa la abertura entre las dos semirrectas; y, es una relación de A en $\mathbb{R}$, siendo A el conjunto de los ángulos.

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{m}{\curvearrowright} & \mathbb{R} \\ B & \longrightarrow & m\,(B) = \alpha \end{array}$$

Se acostumbra designar a la medida de los ángulos con letras del alfabeto griego: α, β, γ, θ, ω entre otras.

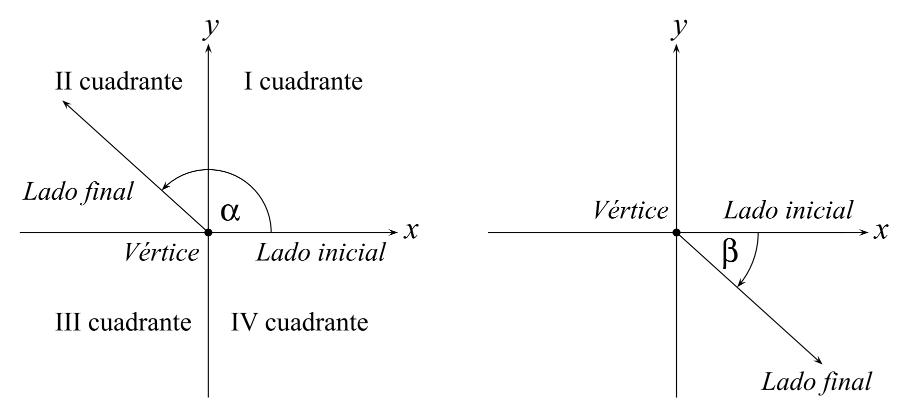
Si se considera una región del plano con un recorrido desde el lado inicial del ángulo hasta el lado final, siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj, por convención la medida del ángulo es positiva. Si dicho recorrido se realiza en sentido de las manecillas del reloj, la medida es negativa.



a) Medida positiva de un ángulo *b) Medida negativa de un ángulo*

Figura 4.2: Signos de las Medidas de los Ángulos.

Un ángulo se encuentra en **posición normal** o **estándar** si su vértice está ubicado en el origen del sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el semieje X positivo. Si el lado terminal del ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, se denominará ángulo del segundo cuadrante y análogamente para los otros cuadrantes.



a) Ángulo en posición normal del segundo cuadrante, cuya medida es positiva. *b) Ángulo en posición normal del cuarto cuadrante, cuya medida es negativa.*

Figura 4.3: Signos de las Medidas de los Ángulos.

4.1.1 Unidades angulares

Para la localización exacta de una estrella o la posición de un barco, se utilizan las unidades de medida más conocidas, como son los grados sexagesimales, minutos y segundos; tales unidades están basadas en la división en partes iguales de una circunferencia.

Algunas equivalencias importantes son las siguientes:

360° representan un giro completo alrededor de una circunferencia.

180° representan $\frac{1}{2}$ de vuelta alrededor de una circunferencia.

90° representan $\frac{1}{4}$ de vuelta.

1° representa $\frac{1}{360}$ de vuelta.

1° representa 60 minutos ($'$).

$1'$ representa 60 segundos ($''$).

Es de observar que para generar un ángulo se puede dar más de un giro completo; por ejemplo, si damos dos giros completos se tendrían 720°; si se dan 10 giros se tendrían 3600°.

Para propósitos de cálculo, los grados son transformados en radianes, puesto que el radián es mucho más práctico en las aplicaciones físicas.

A continuación, se interpreta el significado de un radián:

Considerando una circunferencia de radio r y centro O, se construye un ángulo de medida α cuyo vértice esté ubicado en O, y cuyos lados inicial y terminal subtienden sobre la circunferencia un arco de longitud igual a r, tenemos que α constituye un **radián**.

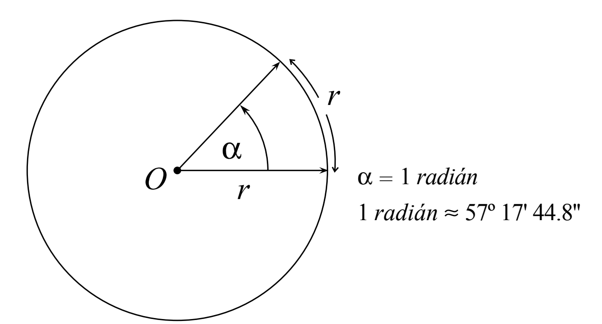


Figura 4.4: Interpretación de un Radián.

Es de notar que la medida de un ángulo es independiente de la longitud del radio. Por ejemplo, al dividir una pizza en 8 partes iguales, la medida del ángulo de cada pedazo permanece igual, independientemente si la pizza es pequeña, normal o familiar.

La medida de un ángulo permite calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; sólo basta multiplicar la longitud del radio por la medida del ángulo en radianes.

Longitud de un arco de circunferencia	=	(Medida del ángulo en radianes)(Longitud del radio)

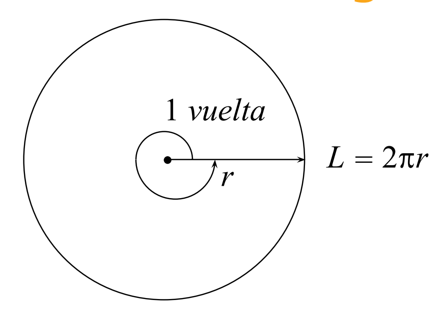


Figura 4.5 Longitud de la Circunferencia.

Es importante reconocer la medida de un ángulo, ya sea que esté expresada en radianes o grados sexagesimales, porque ésta indica la ubicación del ángulo en uno de los ejes o cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares. Así, las diferentes ubicaciones del lado terminal de un ángulo en términos de su medida se resumen en el Cuadro 4.1.

Medida en Radianes	Medida en Grados Sexagesimales	Ubicación del Lado Terminal
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0^o, 90^o)$	I Cuadrante
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$(90^o, 180^o)$	II Cuadrante
$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$(180^o, 270^o)$	III Cuadrante
$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	$(270^o, 360^o)$	IV Cuadrante
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$	$0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o$	Semieje: X^+, Y^+, X^-, Y^-, X^+, respectivamente.

Cuadro 4.1: Ubicación de los Ángulos respecto a su Medida.

Para medidas mayores a 2π radianes o 360°, se debe dividir esta medida para 2π o 360°, según sea el caso; el cociente indicará la cantidad de giros o vueltas y el residuo de la división indicará la ubicación del lado terminal del ángulo.

Ejemplo 4.1 Ubicación de los ángulos.

Se requiere ubicar un ángulo cuya medida es 410°. Si se divide para 360°, se obtiene 1 de cociente y 50 de residuo. Esto quiere decir que el ángulo ha dado una vuelta completa de 360° y su lado terminal se ha ubicado en 50°. Por tanto, es un ángulo del I Cuadrante.

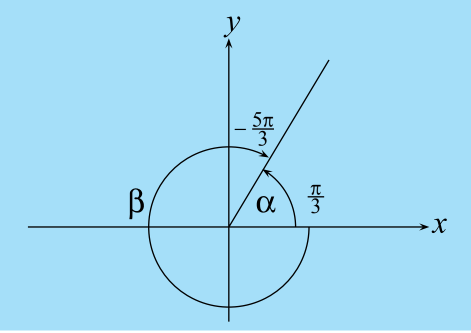
4.1.2 Clases de ángulos

Definición 4.3 (Coterminales)

Son aquellos ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal.

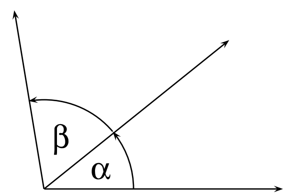
Ejemplo 4.2 Ángulos coterminales.

Sean $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = -\frac{5\pi}{3}$. Graficando se observa que los ángulos son coterminales.



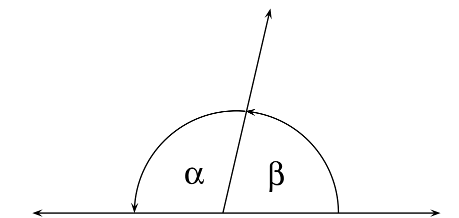
Definición 4.4 (Consecutivos)

Dos ángulos de un mismo plano son consecutivos cuando sólo tienen un lado en común.



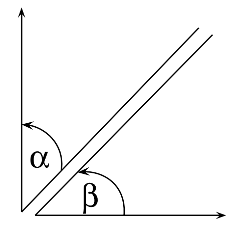
Definición 4.5 (Adyacentes)

Dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos y los lados no comunes son semirrectas en la misma dirección, pero en sentido contrario. La suma de las medidas de éstos ángulos es 180°.



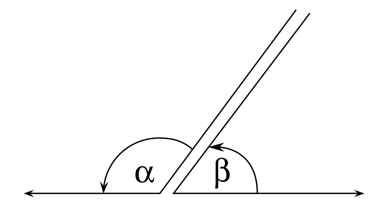
Definición 4.6 (Complementarios)

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas constituye la medida de un ángulo recto: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.



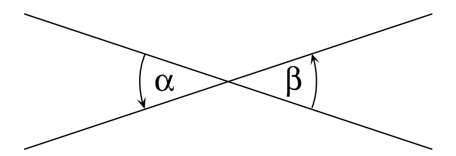
Definición 4.7 (Suplementarios)

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas constituye la medida de dos ángulos rectos: $\alpha + \beta = 180^{\circ}$.



Definición 4.8 (Opuestos por el vértice)

Dos ángulos se dicen opuestos por el vértice cuando los lados de uno de ellos son semirrectas opuestas a los lados del otro, verificándose que $\alpha = \beta$.



4.1.3 Relación entre grados sexagesimales y radianes

Ya hemos visto que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, y para el caso de una vuelta completa, hemos indicado que el ángulo mide 360°, entonces podemos definir una equivalencia entre las medidas en grados sexagesimales y radianes.

A partir de la igualdad $2\pi\ radianes = 360^o$, determinamos que:

$$\begin{aligned} 180^o &= \pi\ radianes \\ 90^o &= \frac{\pi}{2}\ radianes \\ 60^o &= \frac{\pi}{3}\ radianes \\ 45^o &= \frac{\pi}{4}\ radianes \\ 30^o &= \frac{\pi}{6}\ radianes \end{aligned}$$

Podemos observar estas y otras equivalencias en la siguiente figura:

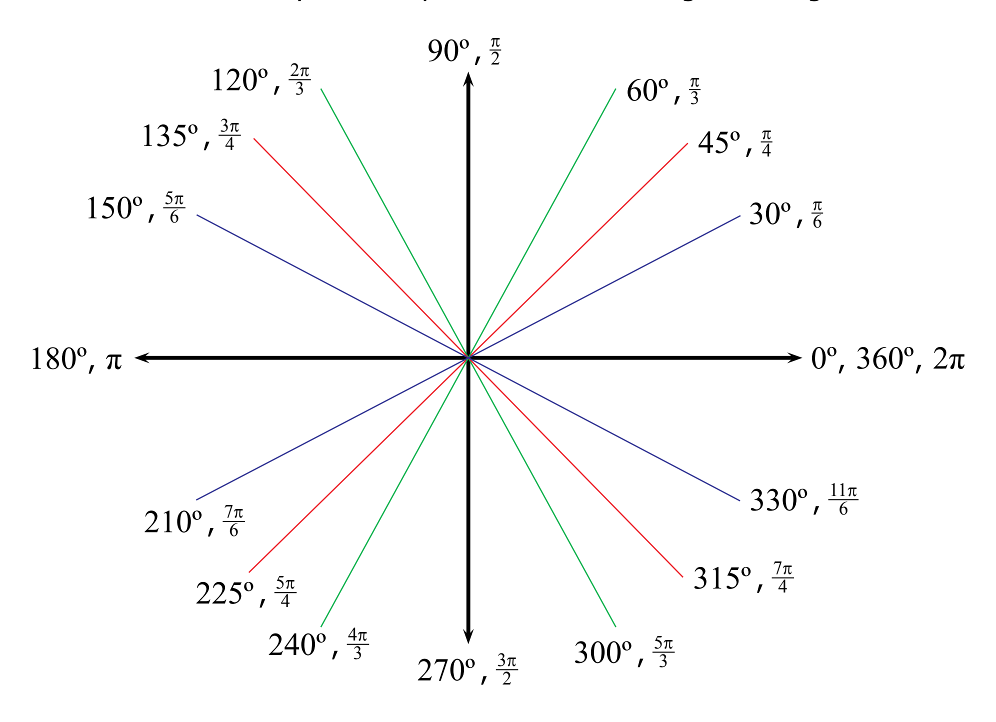


Figura 4.6: Equivalencias de Unidades Angulares.

Ejemplo 4.3 Conversión de unidades angulares.

- Grados sexagesimales a radianes.

a) 15°

b) 390°

c) -75°

d) -150°

Solución:

a) $15^o \times \frac{\pi \; radianes}{180^o} = \frac{\pi}{12} \; radianes$

b) $390^o \times \frac{\pi \; radianes}{180^o} = \frac{13\pi}{6} \; radianes$

c) $-75^o \times \frac{\pi \; radianes}{180^o} = -\frac{5\pi}{12} \; radianes$

d) $-150^o \times \frac{\pi \; radianes}{180^o} = -\frac{5\pi}{6} \; radianes$

- Radianes a grados sexagesimales.

a) $\frac{5\pi}{12}$

b) $\frac{7\pi}{12}$

c) -3π

d) $-\frac{13\pi}{4}$

Solución:

a) $\frac{5\pi}{12} \; radianes \times \frac{180^o}{\pi \; radianes} = 75^o$

b) $\frac{7\pi}{12} \; radianes \times \frac{180^o}{\pi \; radianes} = 105^o$

c) $-3\pi \; radianes \times \frac{180^o}{\pi \; radianes} = -540^o$

d) $-\frac{13\pi}{4} \; radianes \times \frac{180^o}{\pi \; radianes} = -585^o$

4.2 Funciones trigonométricas elementales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un ángulo, explicar sus seis relaciones trigonométricas mediante la circunferencia de radio unitario.
* Dados varios ángulos notables en grados sexagesimales o radianes, indicar el valor de sus seis relaciones trigonométricas.
* Dado un ángulo del primer cuadrante, deducir los valores de las relaciones trigonométricas de ángulos asociados a él, ubicados en los otros cuadrantes.
* Calcular el valor de expresiones trigonométricas empleando las relaciones de los ángulos notables.

Si utilizamos una circunferencia de radio unitario, cuyo centro está en el origen del sistema de coordenadas rectangulares, podemos definir las coordenadas de cualquier punto $P(a,b)$ perteneciente a la circunferencia en el plano. Estas coordenadas dependerán de la medida del segmento que une el origen de coordenadas y el punto P, que en este caso es 1; y, de la medida del ángulo, a la cual se denominará x de aquí en adelante en el texto, cuyo valor se mide por la amplitud que dicho segmento forma con respecto al semieje X positivo.

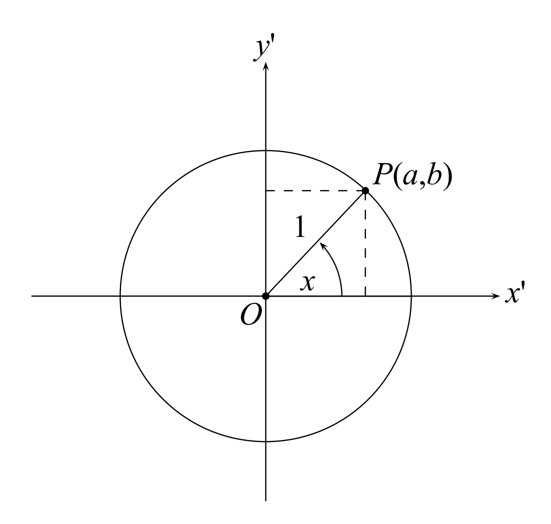


Figura 4.7: Circunferencia de Radio Unitario.

A partir de la circunferencia unitaria de la figura 4.7, se pueden establecer los valores de las seis relaciones trigonométricas de cualquier ángulo, con las cuales, y escogiendo los dominios adecuados en $\mathbb{R}$, se definen las seis funciones trigonométricas que se estudiarán en este capítulo.

Definición 4.9 (Funciones trigonométricas)

Sea $P(a,b)$ un punto sobre la circunferencia de radio unitario y x el ángulo en posición estándar que forma el segmento $\overline{OP}$, con el semieje X^+.

Función Seno

La función seno está definida por: $sen(x) = \frac{b}{1}$. Es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Función Coseno

La función coseno está definida por: $cos(x) = \frac{a}{1}$. Es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Función Tangente

Si $(a \neq 0)$, la función tangente está definida por: $tan(x) = \frac{b}{a}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Función Cotangente

Si $(b \neq 0)$, la función cotangente está definida por: $cot(x) = \frac{a}{b}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Función Secante

Si $(a \neq 0)$, la función secante está definida por: $sec(x) = \frac{1}{a}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Función Cosecante

Si $(b \neq 0)$, la función cosecante está definida por: $csc(x) = \frac{1}{b}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Observe que si $a = 0$, esto es, se generan puntos de coordenadas $P(0,b)$ localizados sobre el eje Y, las funciones tangente y secante no están definidas, lo cual se denota con ∞. Mientras que si $b = 0$, obtenemos puntos de coordenadas $P(a,0)$ localizados sobre el eje X, las funciones cotangente y cosecante no están definidas, lo cual también se denota con ∞. De aquí que el dominio de estas funciones tiene las restricciones mencionadas.

Por haber utilizado la circunferencia de radio unitario en esta definición, las funciones trigonométricas también se suelen denominar funciones circulares.

Estas funciones pueden extenderse periódicamente, considerando giros completos que determinan coincidencia en la posición final del segmento $\overline{OP}$.

Por lo visto en la circunferencia de radio unitario, se puede concluir que las funciones trigonométricas son positivas para todo ángulo del I Cuadrante; sólo son positivas el seno y la cosecante para ángulos del II Cuadrante; sólo son positivas la tangente y la cotangente para ángulos del III Cuadrante; y sólo son positivas el coseno y la secante para ángulos del IV Cuadrante.

Una regla práctica para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas para ángulos del II, III o IV Cuadrante, es relacionar el ángulo con uno asociado del I cuadrante. Así, si x es la medida de un ángulo (en grados sexagesimales o radianes) del I Cuadrante, un ángulo que tendría los mismos valores absolutos de sus seis funciones trigonométricas mide:

$180^{\circ} - x$ o $\pi - x$ en el II Cuadrante.

$180^{\circ} + x$ o $\pi + x$ en el III Cuadrante.

$360^{\circ} - x$ o $2\pi - x$ en el IV Cuadrante.

El signo se lo determina dependiendo de la ubicación del ángulo.

Ejemplo 4.4 Funciones trigonométricas.

Se conoce que el coseno de $\frac{\pi}{4}$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y se requiere el coseno de $\frac{3\pi}{4}$, de $\frac{5\pi}{4}$ y de $\frac{7\pi}{4}$.

Solución:

Se verifica que efectivamente estos ángulos estén relacionados con el de $\frac{\pi}{4}$. En este caso se cumple que:

$$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, todos estos ángulos tienen el mismo coseno de $\frac{\pi}{4}$ en términos de valor absoluto.

Como $\frac{3\pi}{4}$ pertenece al II Cuadrante, su coseno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\frac{5\pi}{4}$ pertenece al III Cuadrante, su coseno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

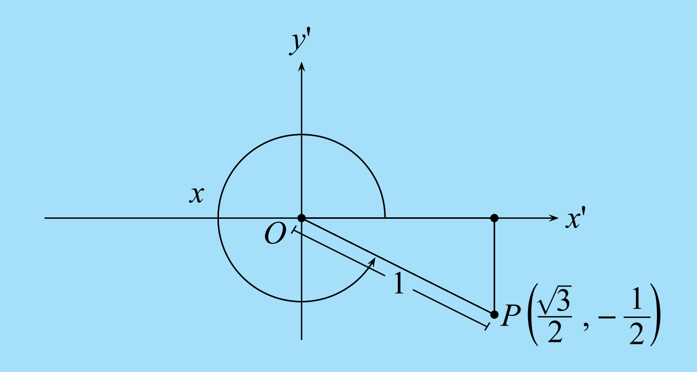
Como $\frac{7\pi}{4}$ pertenece al IV Cuadrante, su coseno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejemplo 4.5 Valores de las funciones trigonométricas.

Sea x un número real y $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ un punto sobre la circunferencia de radio unitario, determine los valores de las seis funciones trigonométricas, evaluadas en x.

Solución:

Si localizamos el punto P en el plano cartesiano, podremos notar que se encuentra en el IV Cuadrante, tal como se muestra en la figura.



$sen(x) = -\frac{1}{2}$ $\quad cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$csc(x) = -2$ $\quad sec(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad cot(x) = -\sqrt{3}$

Es útil y necesario conocer los valores de las funciones trigonométricas para las medidas de los ángulos más utilizados: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$.

Tomando como referencia la circunferencia de radio unitario y dibujando un triángulo equilátero cuyos lados también tienen longitud unitaria, se puede deducir que el eje X divide a dicho triángulo en dos triángulos rectángulos.

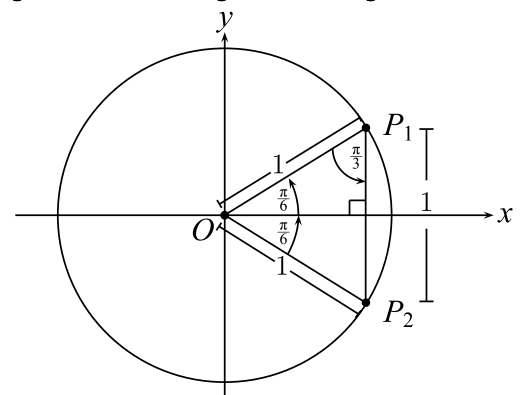


Figura 4.8: Triángulo Rectángulo con Medidas de Ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$.

Las coordenadas del punto P_1 son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, cuya ordenada puede ser obtenida en base a las condiciones del triángulo y la abcisa puede ser obtenida aplicando el teorema de Pitágoras. En base a las definiciones previas, se tiene que:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \qquad sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

$$cot\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3} \qquad cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$$

$$csc\left(\frac{\pi}{6}\right)=2 \qquad csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Con un procedimiento similar y dibujando un triángulo isósceles en el interior de la circunferencia de radio unitario, tenemos:

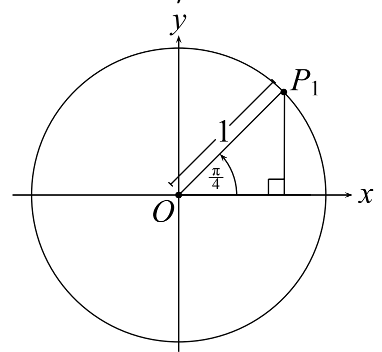


Figura 4.9: Triángulo Rectángulo con Medida de Ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Se puede deducir por el teorema de Pitágoras, que tanto la abcisa como la ordenada de P_1 tienen la misma longitud, es decir, sus coordenadas son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En base a las definiciones previas, se tiene que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

En el Cuadro 4.2 se muestran los valores de las funciones trigonométricas de las medidas de los ángulos más conocidos, que son convenientes recordar:

Medida del ángulo (x)	sen(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)	sec(x)	csc(x)
$0 = 0^o$	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{\pi}{6} = 30^o$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4} = 45^o$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3} = 60^o$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90^o$	1	0	∞	0	∞	1
$\pi = 180^o$	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3\pi}{2} = 270^o$	-1	0	∞	0	∞	-1
$2\pi = 360^o$	0	1	0	∞	1	∞

Cuadro 4.2: Valores de las Funciones Trigonométricas de Ángulos Notables.

Ejemplo 4.6 Expresiones trigonométricas.

Determine el valor de la expresión: $$\frac{\left(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-2}}{\left(csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}$$

Solución:

$$\frac{\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-2}}{\left(\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{(\sqrt{2}\,)^2 + (2)^2} = \frac{\frac{1}{3}+4}{2+4} = \frac{13}{18}$$

Ejemplo 4.7 Expresiones trigonométricas.

Determine el valor de la expresión: $\dfrac{sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-2}}{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Solución:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-2}}{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3+8}{6}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$$= \left(\frac{11}{3(\sqrt{2}+1)}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$= \frac{11}{3}(\sqrt{2}-1)$$

4.3 Gráficas de funciones trigonométricas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

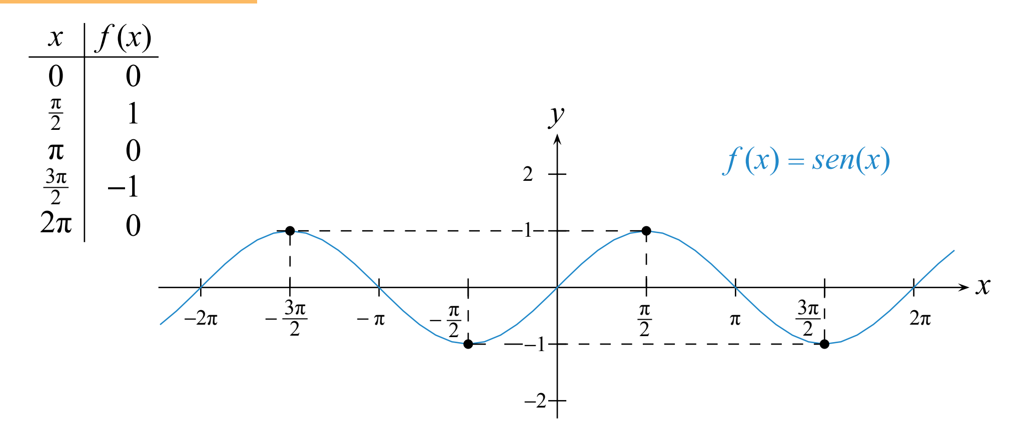
* Dada la gráfica estándar de una función trigonométrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante), aplicar técnicas de graficación para obtener nuevas funciones trigonométricas.

* Dada la regla de correspondencia de una función trigonométrica, analizarla gráficamente especificando dominio, rango, período fundamental, cotas, asíntotas, intervalos de monotonía y otras características gráficas.

* Realizar composiciones con funciones trigonométricas, identificando la gráfica y sus principales características.

* Realizar demostraciones empleando propiedades de las funciones trigonométricas.

Función Seno



x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1
2π	0

La gráfica de la función $f(x) = sen(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\ f = \mathbb{R}$.
- $rg\ f = [-1, 1]$.
- f es impar.
- f es acotada, $|f(x)| \leq 1$.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\{x/x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 4.8 Aplicación de las funciones trigonométricas.

Determine el valor de la expresión:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} + \ldots\right)$$

Solución:

Analizando el argumento de la función seno:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} + \ldots$$

Podemos notar que los términos impares corresponden a una progresión geométrica infinita con $a = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ y cuya suma es $P_1 \approx \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \approx \pi$.

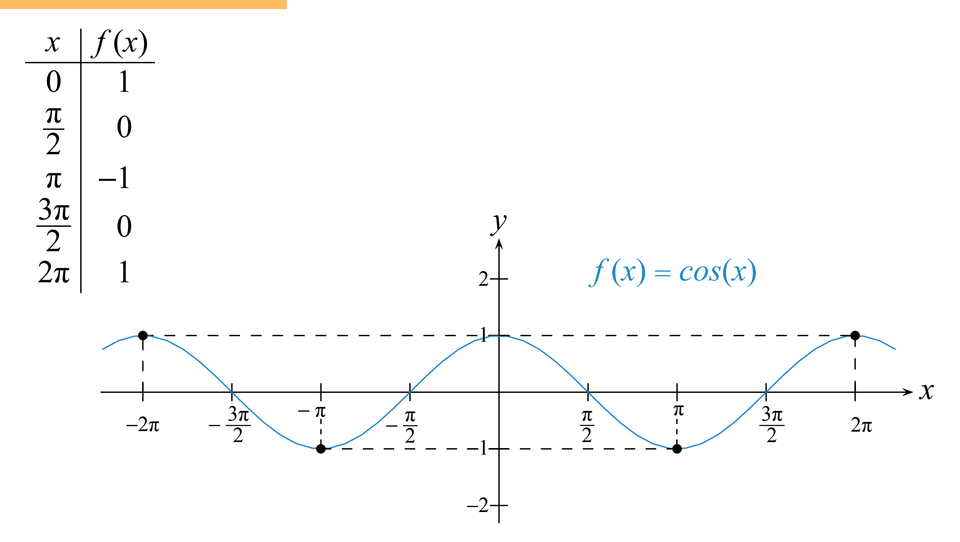
Mientras que los términos pares del argumento de la función corresponden a una progresión geométrica infinita con $a=-\frac{\pi}{3}$, $r=\frac{1}{2}$ y cuya suma es:

$$P_2 \approx \frac{-\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} \approx -\frac{2\pi}{3}$$

Con lo cual, la expresión se reduce a $sen\,(P_1+P_2)$.

$$sen\,(P_1+P_2)=sen\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Función Coseno



x	$f(x)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

La gráfica de la función $f(x)=cos(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\,f=\mathbb{R}$
- $rg\,f=[-1,\,1]$.
- f es par.
- f es acotada, $|f(x)|\leq 1$.
- f es periódica, su período fundamental es $T=2\pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\{x/x=(2n+1)\,\frac{\pi}{2},\, n\in\mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 4.9 Aplicación de las funciones trigonométricas.

Determine el valor de la suma: $cos(1º) + cos(2º) + cos(3º) + ... + cos(360º)$

Solución:

Al observar detenidamente la gráfica de $f(x) = cos(x)$, se puede deducir que evaluando todos los valores de x entre $1º$ y $90º$, más los que se encuentran entre $270º$ y $360º$, resultan positivos, mientras que los valores de x entre $90º$ y $270º$ resultan negativos.

Tales resultados positivos se van a cancelar completamente con todos los valores negativos. Por lo tanto, el valor de la suma es 0.

Se puede observar en las gráficas de las dos primeras funciones trigonométricas, que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ y $-1 \leq cos(x) \leq 1$, es decir, $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = cos(x)$ tienen una cota superior en $y = 1$ y una cota inferior en $y = -1$, valores que definen su amplitud. Sin embargo, se puede definir una amplitud diferente con las reglas de correspondencia $f(x) = A\ sen(x)$ y $g(x) = A\ cos(x)$.

Este valor A provoca un alargamiento vertical de las gráficas de las funciones cuando $|A| > 1$; o, una compresión vertical cuando $|A| < 1$, tal como se puede notar en la figura 4.10:

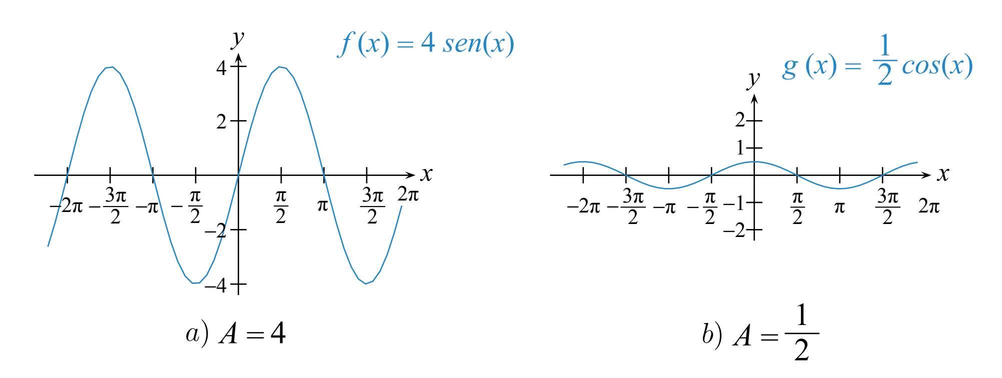
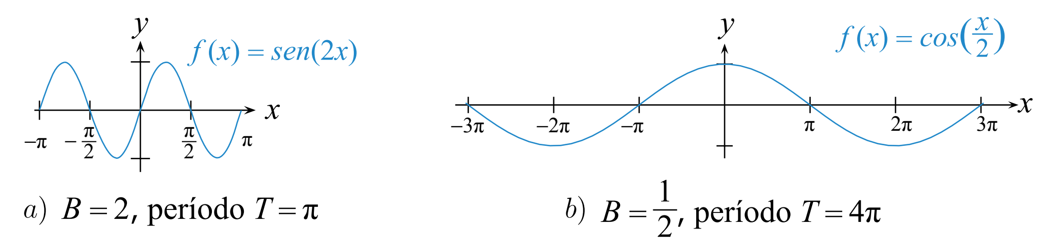


Figura 4.10: Alargamiento o Compresión Vertical de Funciones Senoidales o Cosenoidales.

El período fundamental de estas funciones también puede ser modificado. Las funciones $f(x) = sen(Bx)$ y $g(x) = cos(Bx)$ con $B > 0$, tienen un período $T = \frac{2\pi}{B}$. Esto representa una compresión horizontal para ambas funciones cuando $B > 1$; o, un alargamiento horizontal cuando $0 < B < 1$, los cuales se pueden observar en la figura 4.11:



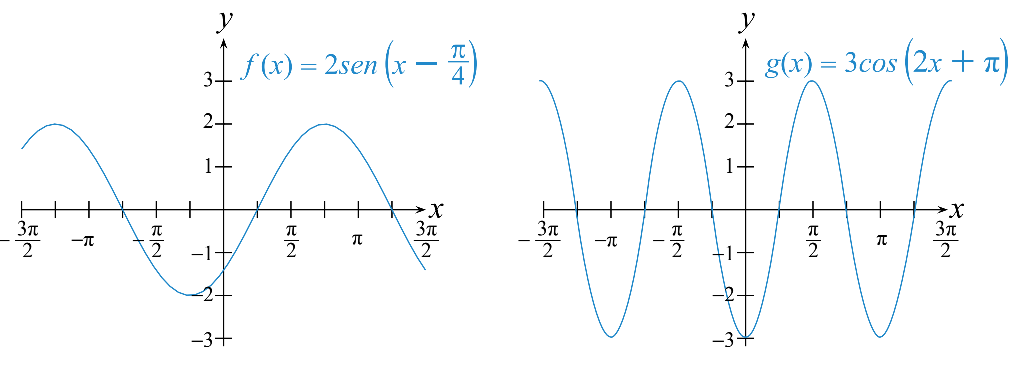
a) $B = 2$, período $T = \pi$ *b*) $B = \frac{1}{2}$, período $T = 4\pi$

Figura 4.11: Compresión o Alargamiento Horizontal de Funciones Trigonométricas Senoidales o Cosenoidales.

Si el signo de B es negativo, se verifica el mismo cambio en el período fundamental de la función, pero adicionalmente se aplica un efecto de reflexión respecto al eje Y.

Ahora analizaremos las gráficas de $f(x) = Asen(Bx + C)$ y $g(x) = Acos(Bx + C)$, las cuales tienen amplitud A, período $\frac{2\pi}{B}$ y un desfase (desplazamiento horizontal) de $\frac{C}{B}$ unidades.

El sentido del desplazamiento depende del signo de $\frac{C}{B}$. La figura 4.12 ilustra tal efecto sobre las gráficas del seno y del coseno, respectivamente.



a) $A = 2$, $B = 1$, período $T = 2\pi$, $\frac{C}{B} = \frac{\pi}{4}$ unidades a la derecha.

b) $A = 3$, $B = 2$, período $T = \pi$, $\frac{C}{B} = \frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda.

Figura 4.12: Desplazamiento Horizontal de Funciones Senoidales o Cosenoidales.

Si a las funciones anteriores se les suma algebraicamente un valor D, se definen las siguientes reglas de correspondencia $f(x) = A\ sen(Bx + C) + D$ y $g(x) = A\ cos(Bx + C) + D$.

El efecto de este valor D consiste en un desplazamiento vertical cuya dirección dependerá de su signo, es decir, si $D > 0$ la gráfica se desplazará D unidades hacia arriba; y, si $D < 0$ la gráfica se desplazará D unidades hacia abajo. En la figura 4.13 se presenta tal efecto.

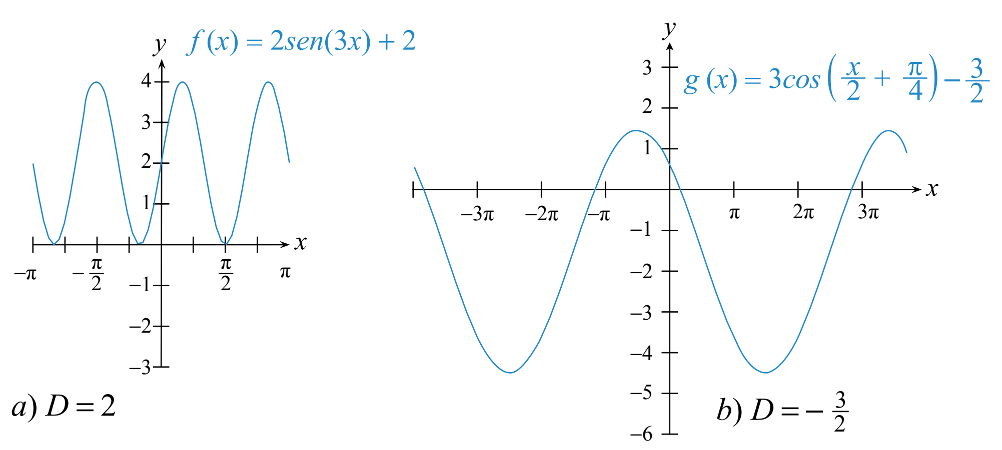


Figura 4.13: Desplazamiento Vertical de las Funciones Senoidales o Cosenoidales.

Las cotas de estas funciones trigonométricas presentan cambios. En la figura 4.13 (a), las cotas inferior y superior son 0 y 4, respectivamente. En la figura 4.13 (b), las cotas inferior y superior son $-\frac{9}{2}$ y $\frac{3}{2}$, respectivamente.

Cuando se combinan varios efectos sobre la gráfica, es recomendable hacer los cambios en el siguiente orden: reflexión horizontal, cambio del período, desfase, cambio en la amplitud, reflexión vertical y desplazamiento vertical.

Ejemplo 4.10 Gráfica de funciones trigonométricas.

Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $rg\,f = [-2, 2]$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\, [f(-x) = f(x)]$

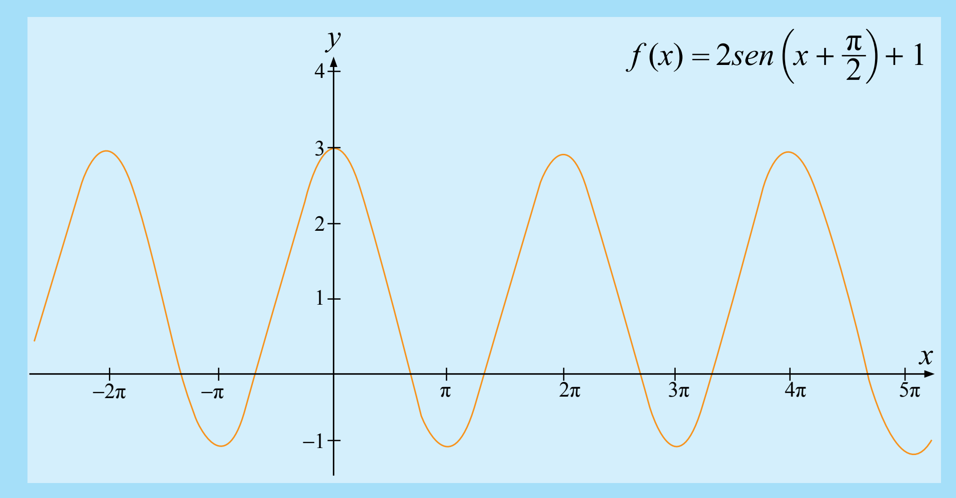
c) $\exists x \in \mathbb{R}\, [f(x) < -1]$

Solución:

Con la regla de correspondencia dada, podemos concluir que:

- Su amplitud es $|A| = 2$.
- Su período fundamental es $T = 2\pi$.
- Su desplazamiento horizontal es $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.
- Su desplazamiento vertical es de 1 unidad hacia arriba.

La gráfica de f es:



Analizando las opciones:

a) Se puede observar que $rg\,f = [-1, 3]$. Por lo tanto, esta proposición es falsa.

b) La definición dada corresponde a la de una función par. Efectivamente, f es par, lo cual convierte esta proposición en verdadera.

c) El valor mínimo de f es -1. No existe la posibilidad de obtener un valor menor que éste. Esta proposición es falsa.

Ejemplo 4.11 Gráfica de funciones trigonométricas.

Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{2}\,cos(4x) + 2$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x, |f(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) $\forall x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), [(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))]$

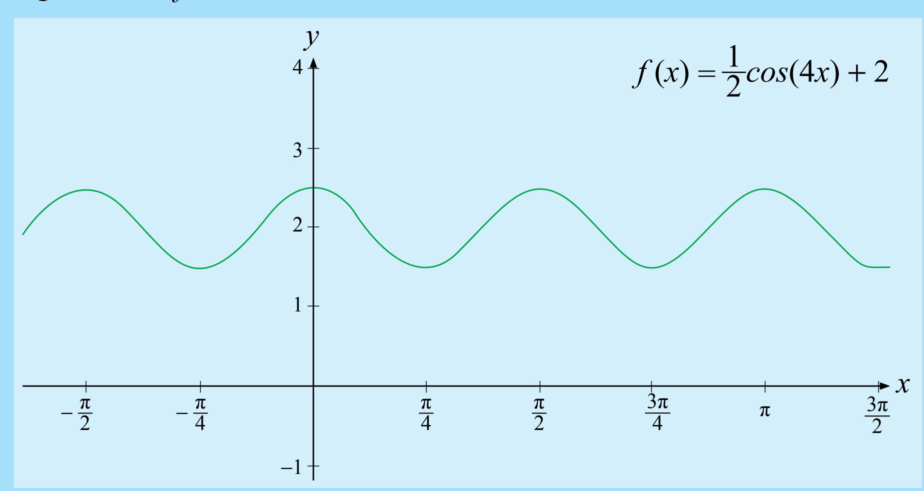
c) $\forall x, [f(x + 2\pi) = f(x)]$

Solución:

Con la regla de correspondencia dada, podemos concluir que:

- Su amplitud es $|A| = \frac{1}{2}$.
- Su período fundamental es $T = \frac{\pi}{2}$.
- Su desplazamiento vertical es 2 unidades hacia arriba.

La gráfica de f es:



Analizando las opciones:

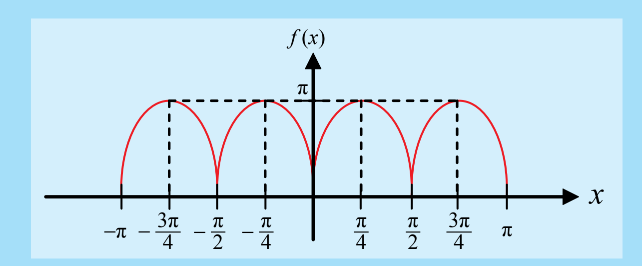
a) Se puede observar que $rg\, f = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Por lo tanto, esta proposición es falsa.

b) La definición dada corresponde a la de una función creciente. Efectivamente, f lo es en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, lo cual convierte a esta proposición en verdadera.

c) El período fundamental de f es $T = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto, $T = 2\pi$ también es otro período de la función. Esta proposición es verdadera.

Ejemplo 4.12 Gráfica de funciones trigonométricas.

Determine una regla de correspondencia para la función trigonométrica $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, cuya gráfica se adjunta:



Solución:

Se puede observar que la amplitud es $|\pi|$.

Como la función siempre es positiva, se deduce que se ha aplicado el valor absoluto a una función cuyo período fundamental era π, la cual podría ser $f(x) = sen(2x)$.

Con estas observaciones, podemos concluir que una posible regla de correspondencia para f es: $f(x) = \pi|sen(2x)|$.

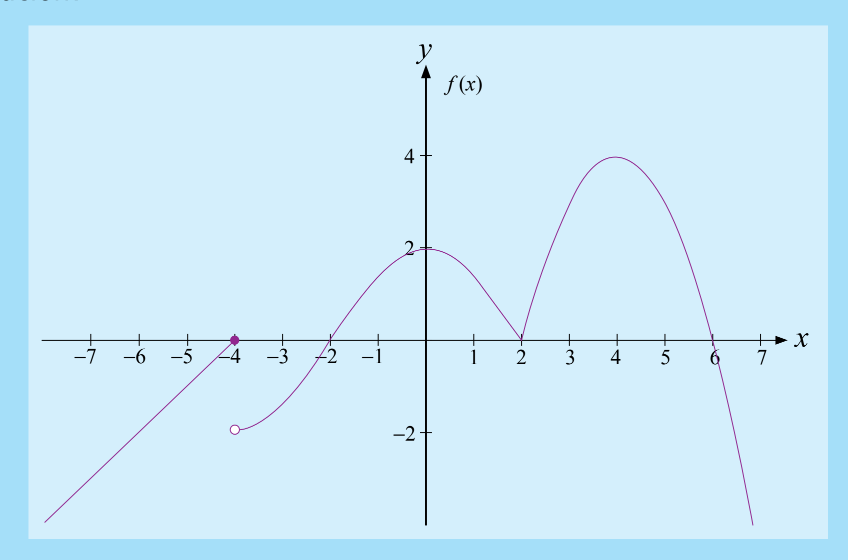
También se podría considerar la regla de correspondencia de la función $cos(2x)$, con amplitud π y desplazamiento de $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la derecha.

Esto es, $f(x) = \pi\left|cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$.

Ejemplo 4.13 Gráfica de funciones de variable real.

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x + 4 & , x \leq -4 \\ 2cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) & , -4 < x \leq 2 \\ -(x-4)^2 + 4 & , x > 2 \end{cases}$ y adicionalmente indique sus características.

Solución:



Se puede observar que:

- $dom\ f = \mathbb{R}$.
- $rg\ f = (-\infty, 4]$.

- f es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, 0) \cup (2, 4)$.
- f es decreciente en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$.
- f está acotada superiormente por la recta $y = 4$.
- f tiene una discontinuidad en $x = -4$.

Ejemplo 4.14 Gráfica de funciones de variable real.

Bosqueje la gráfica de la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) & , \ 0 \leq x \leq 8 \\ ln\,(-x+1) & , \ x < 0 \end{cases}$$

Adicionalmente:

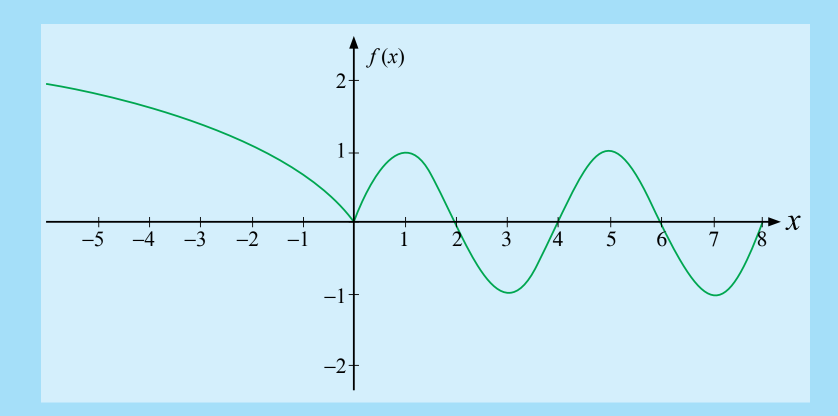
a) Indique sus características.

b) Calcule $f(1)$, $f(1-e)$.

Solución:

El período de $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ es $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, cuando $0 \leq x \leq 8$.

Construir la gráfica de $f(x) = ln[-(x-1)]$ implica desplazar $ln(-x)$ una unidad hacia la derecha.



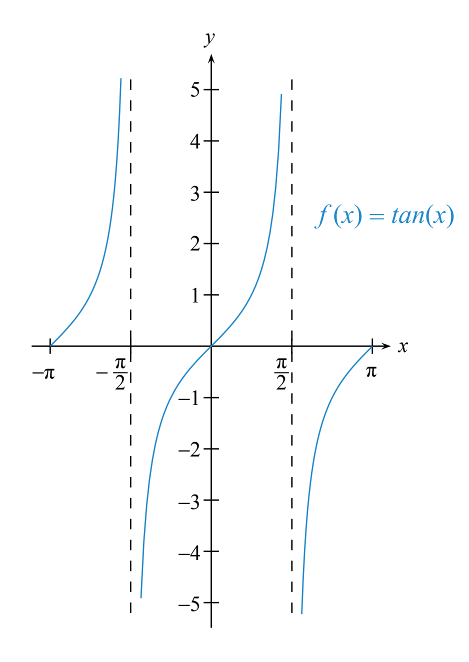
a) Se puede observar que:

- $dom\, f = (-\infty, 8]$.
- $rg\, f = [-1, +\infty)$.
- f es creciente en $(0, 1) \cup (3, 5) \cup (7, 8)$.
- f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (5, 7)$.
- f está acotada inferiormente por la recta $y = -1$.
- f es continua, $\forall x \in dom\, f$.

b) $f(1) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(1-e) = ln\,[-(1-e)+1] = ln\,(e) = 1.$

Función Tangente

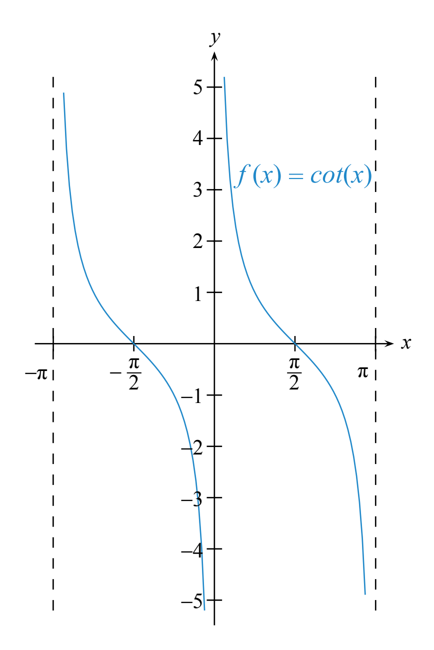


La gráfica de la función $f(x) = tan\,(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $rg\, f = \mathbb{R}$.
- f es impar.

- f es periódica, su período fundamental es $T = \pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Función Cotangente



La gráfica de la función $f(x) = cot(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\ f = \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- $rg\ f = \mathbb{R}$.
- f es impar.
- f es periódica, su período fundamental es $T = \pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 4.15 Valores de las funciones trigonométricas.

Si $f(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right) cot\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, determine el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:

Aplicando la identidad cociente, $f(x) = 1, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

Lo cual el lector también puede confirmar, evaluando $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{3}$ en la función original.

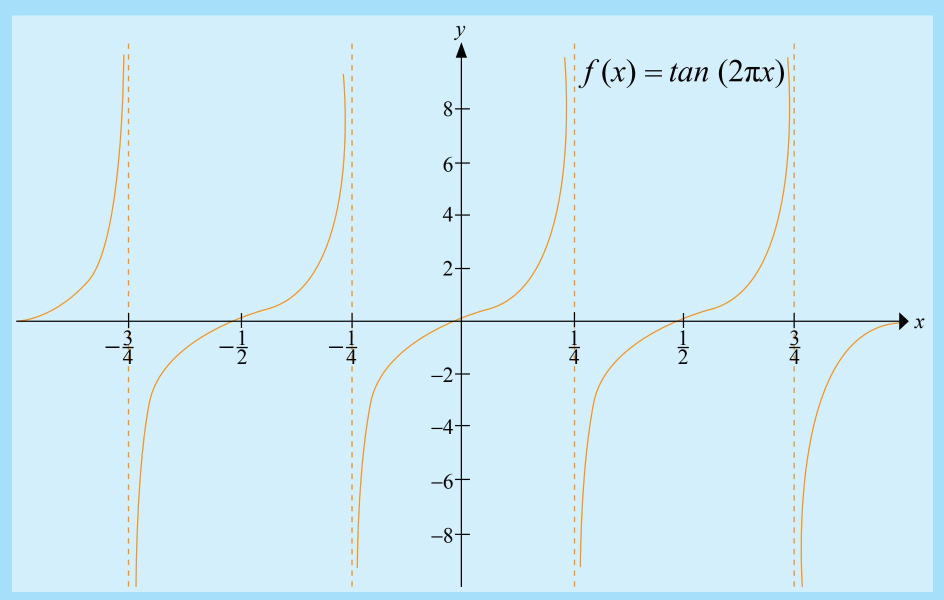
Ejemplo 4.16 Gráfica de funciones trigonométricas.

Bosqueje la gráfica de $f(x) = tan\ (2\pi x)$, especifique su dominio y sus características.

Solución:

El período fundamental de esta función es $T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$.

Su gráfica es:



Su dominio es todo número real, menos los impares multiplicados por el factor $\frac{1}{4}$, lo cual puede ser expresado así:

$$dom\ f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}(2k+1)\right\};\ k \in \mathbb{Z}.$$

f es sobreyectiva, impar, periódica y estrictamente creciente por intervalos.

Ejemplo 4.17 Propiedades de funciones trigonométricas.

Proporcione un contraejemplo para la siguiente proposición: "Si f y g son funciones periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con período fundamental T, entonces la función f/g también es periódica con período fundamental T".

Solución:

Para $f(x) = sen(x)$, su período fundamental $T = 2\pi$.

Para $g(x) = cos(x)$, su período fundamental $T = 2\pi$.

La división entre las funciones f y g es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{sen(x)}{cos(x)} = tan(x)$$

Podemos notar que la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = tan(x)$, tiene período fundamental $T = \pi$, lo cual verifica que la proposición dada es falsa; es decir, $y = tan(x)$ constituye un contraejemplo para la proposición dada. Observe además que esta función no está definida $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.18 Propiedades de funciones trigonométricas.

Proporcione un contraejemplo para la siguiente proposición: "Si f y g son funciones periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con período fundamental T, entonces la función $f\,g$ también es periódica con período fundamental T".

Solución:

Para $f(x) = sen(x)$, su período fundamental $T = 2\pi$.

Para $g(x) = cos(x)$, su período fundamental $T = 2\pi$.

El producto entre las funciones f y g es:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = sen(x)\,cos(x)$$

En la sección 4.5 se demostrará que $sen(x)\,cos(x) = \frac{1}{2}\,sen(2x)$.

Podemos notar que la función $(fg)(x) = \frac{1}{2}\,sen(2x)$ tiene período fundamental $T = \pi$, lo cual verifica que la proposición dada es falsa; es decir, $y = \frac{1}{2}\,sen(2x)$ constituye un contraejemplo para la proposición dada.

Ejemplo 4.19 Propiedades de funciones trigonométricas.

Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones:

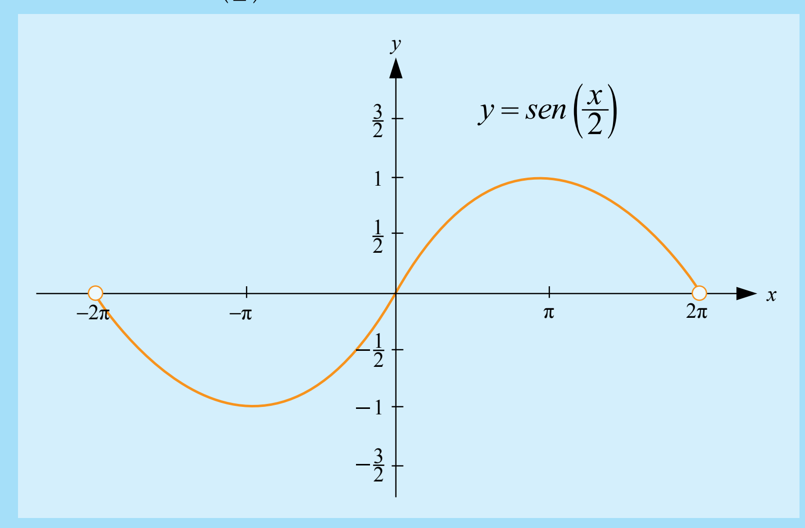
a) $f(x) = \left[\!\left[sen\left(\frac{x}{2}\right) \right]\!\right]$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

b) $g(x) = \mu\left(tan\left(\frac{x}{4}\right)\right)$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

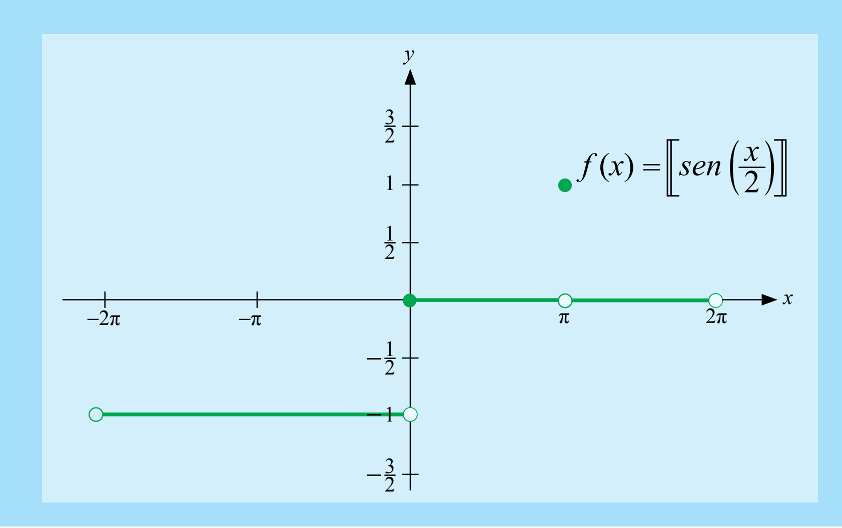
c) $h(x) = sgn\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

Solución:

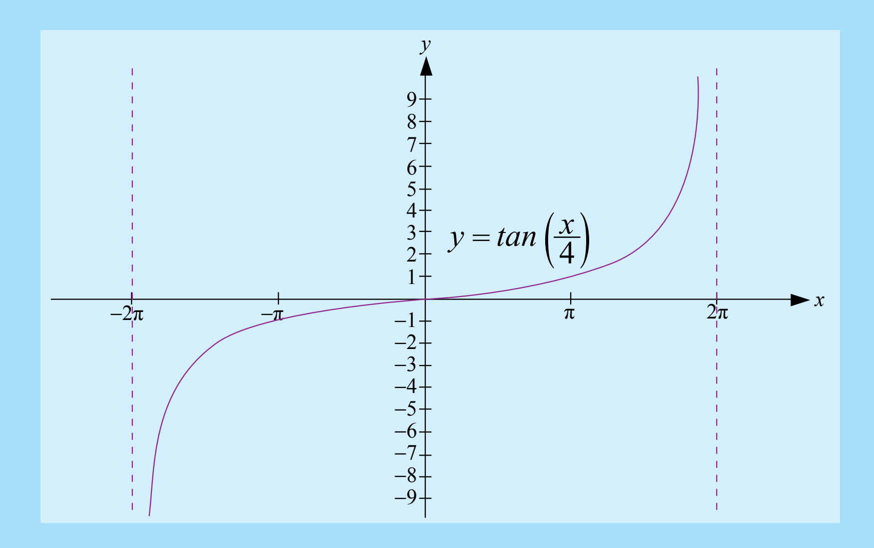
a) La función $y = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ tiene período fundamental 4π, y su gráfica es:



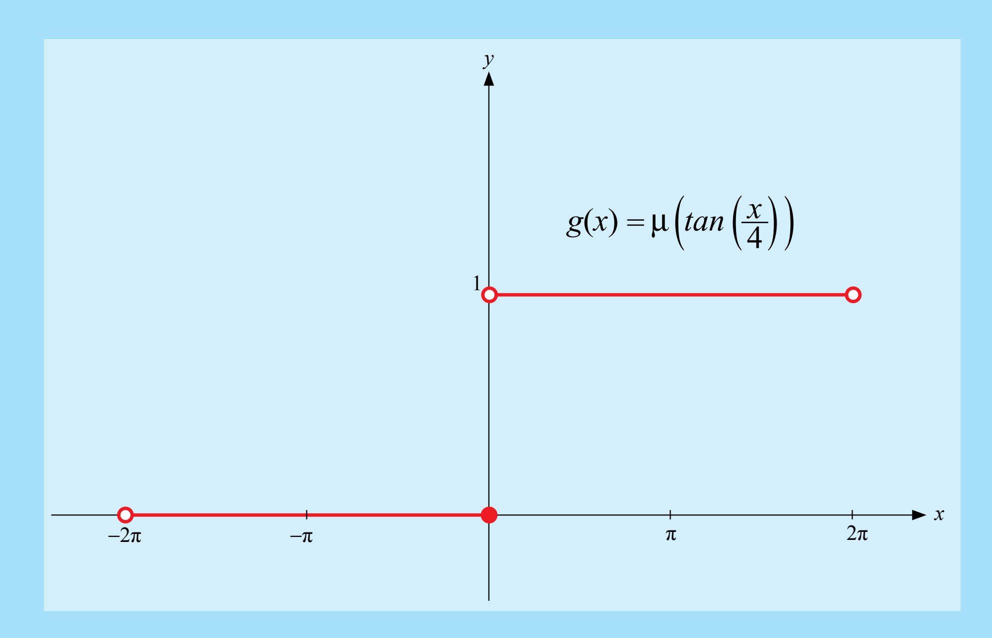
Al aplicar la definición de la función entero mayor, se obtiene:



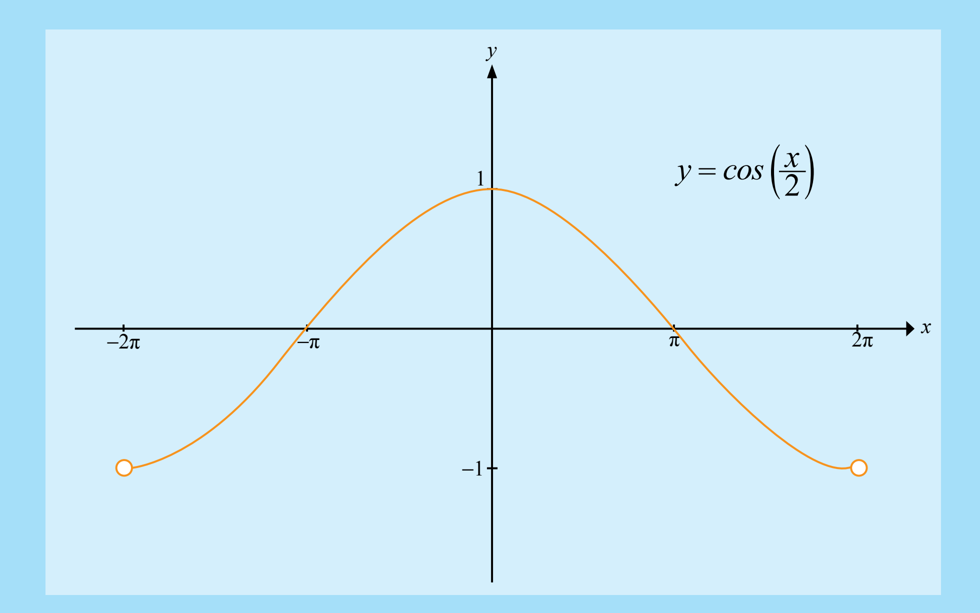
b) La función $y = tan\left(\frac{x}{4}\right)$ tiene período fundamental $T = 4\pi$, y su gráfica es:



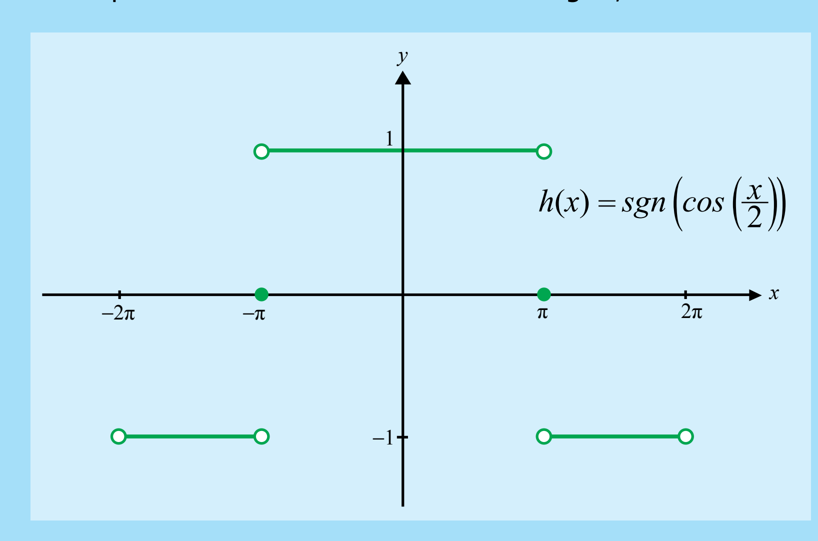
Al aplicar la definición de la función escalón, se obtiene:



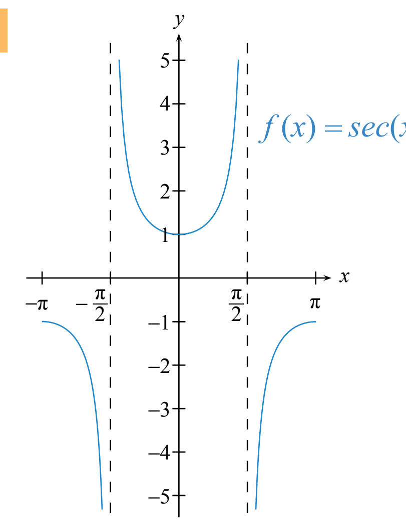
c) La función $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ tiene período fundamental $T = 4\pi$, y su gráfica es:



Al aplicar la definición de la función signo, se obtiene.



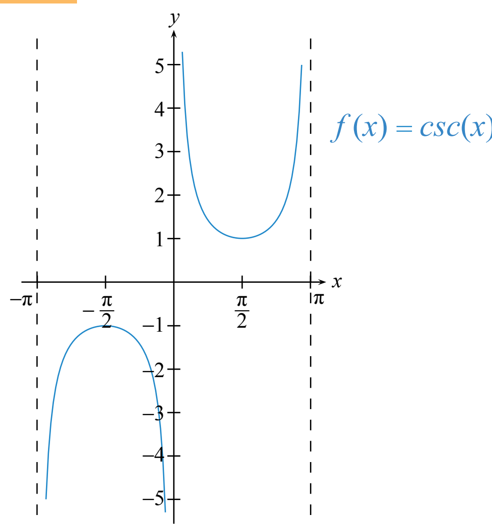
Función Secante



La gráfica de la función $f(x) = sec(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.
- $rg\, f = \mathbb{R} - (-1, 1)$.
- f es par.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- No tiene intersecciones con el eje X.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Función Cosecante



La gráfica de la función $f(x) = csc(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
- $rg\, f = \mathbb{R} - (-1, 1)$.
- f es impar.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- No tiene intersecciones con el eje X.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante también pueden experimentar desplazamientos horizontales y verticales, así como compresiones o alargamientos horizontales.

4.4 Funciones Trigonométricas Inversas

Objetivos

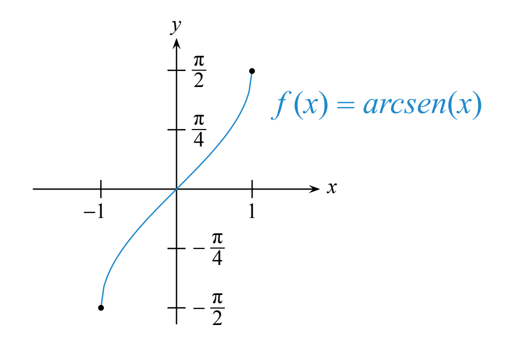
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una función trigonométrica, determinar el dominio, rango, asíntotas, monotonía y otras características de su función inversa.
* Dada la gráfica estándar de una función trigonométrica inversa, aplicar técnicas de graficación para obtener nuevas funciones.
* Encontrar relaciones trigonométricas de ángulos, dado su argumento con relaciones trigonométricas inversas.

En la sección 3.11, analizamos que si una función es biyectiva es posible obtener su función inversa. Como ya se ha podido notar, las funciones trigonométricas no son inyectivas y no todas son sobreyectivas. Sin embargo, podemos restringir sus dominios y conjuntos de llegada de manera adecuada para obtener las funciones trigonométricas inversas.

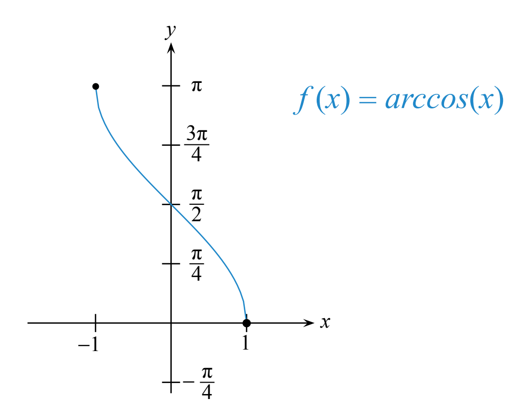
Función seno inverso

Si restringimos el dominio de $f(x) = sen(x)$ al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y el conjunto de llegada al intervalo $[-1, 1]$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa del seno se la denota por $sen^{-1}(x)$ o $arcsen(x)$.



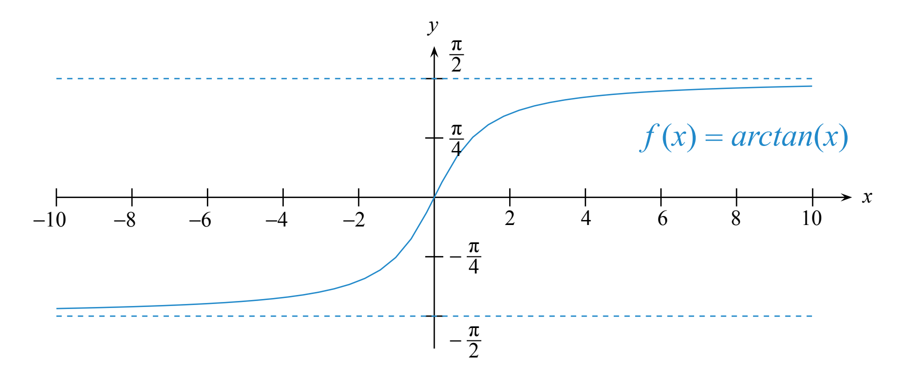
Función coseno inverso

Si restringimos el dominio de $f(x) = cos(x)$ al intervalo $[0, \pi]$ y el conjunto de llegada al intervalo $[-1, 1]$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa del coseno se la denota por $cos^{-1}(x)$ o $arccos(x)$.



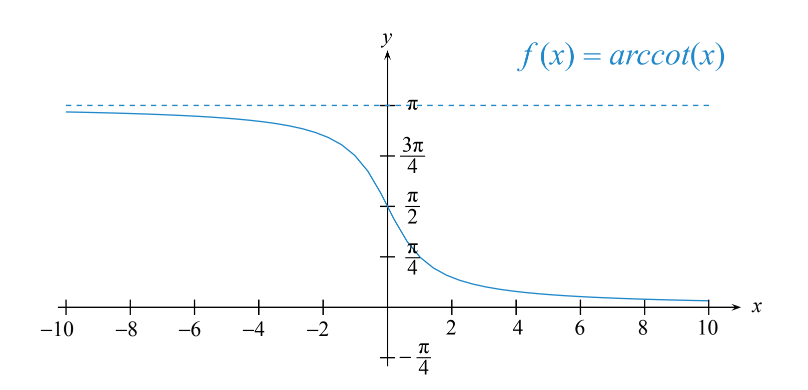
Función tangente inversa

Si restringimos el dominio de $f(x) = tan(x)$ al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la tangente se la denota por $tan^{-1}(x)$ o $arctan(x)$.



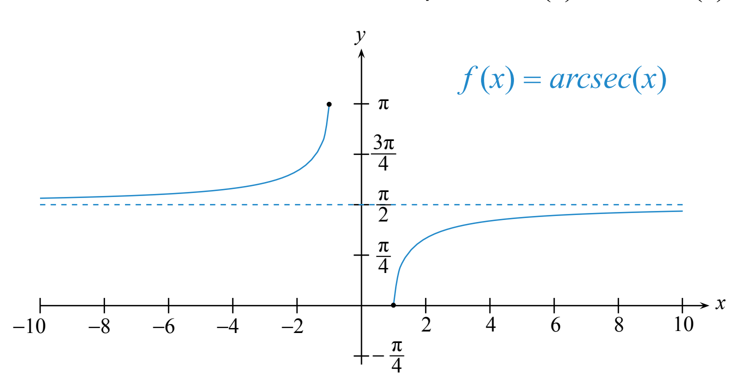
Función cotangente inversa

Si restringimos el dominio de $f(x) = cot(x)$ al intervalo $(0, \pi)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la cotangente se la denota por $cot^{-1}(x)$ o $arccot(x)$



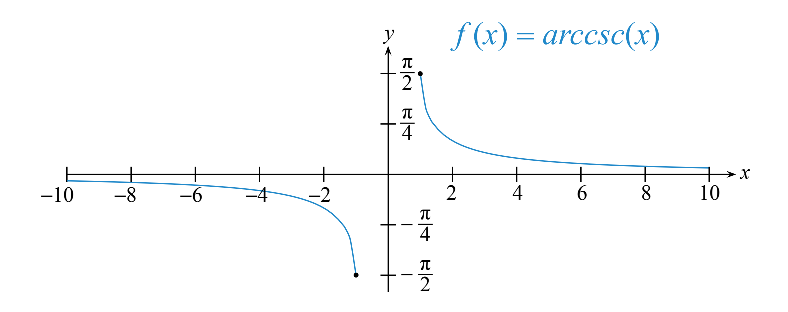
Función secante inversa

Si restringimos el dominio de $f(x) = sec(x)$ al intervalo $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ y el conjunto de llegada al intervalo $\mathbb{R} - (-1, 1)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la secante se la denota por $sec^{-1}(x)$ o $arcsec(x)$.



Función cosecante inversa

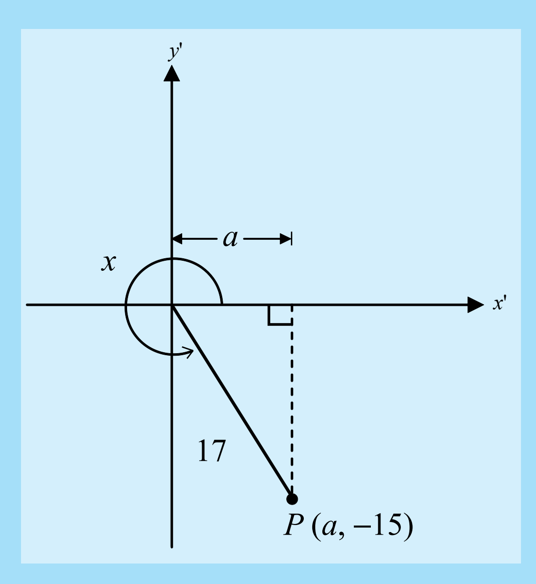
Si restringimos el dominio de $f(x) = csc(x)$ al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ y el conjunto de llegada al intervalo $\mathbb{R} - (-1, 1)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la cosecante se la denota por $csc^{-1}(x)$ o $arccsc(x)$.



Ejemplo 4.20 Relaciones trigonométricas inversas.

Determine el valor de $tan(x)$, tal que $x = arcsen\left(-\frac{15}{17}\right)$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{(17)^2 - (-15)^2}$$
$$a = \sqrt{289 - 225}$$
$$a = \sqrt{64}$$
$$a = 8$$
$$tan(x) = -\frac{15}{8}$$

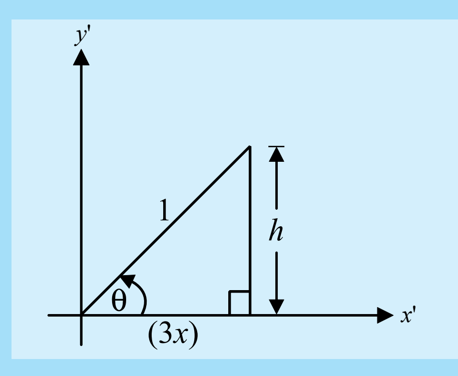
Ejemplo 4.21 Relaciones trigonométricas inversas.

Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $\theta = arccos(3x)$, encuentre expresiones para $sen(\theta)$ y $cot(\theta)$.

Solución:

$$\theta = arccos(3x) \Rightarrow cos(\theta) = 3x$$

La gráfica correspondiente en el plano cartesiano es:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(1)^2 - (3x)^2}$$

$$h = \sqrt{1 - 9x^2}$$

Los valores solicitados son:

$$sen(\theta) = \frac{h}{1} \qquad cot(\theta) = \frac{3x}{h}$$

$$sen(\theta) = \sqrt{1 - 9x^2} \qquad cot(\theta) = \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

Note que por ser θ la medida de un ángulo del I cuadrante, sus funciones trigonométricas poseen signos positivos.

Ejemplo 4.22 Funciones trigonométricas inversas.

Sea $f(x) = arcsen(3x - 2)$ una función de variable real cuyo rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, determine, el dominio de f.

Solución:

A partir de la definición de la función seno inverso, se deduce que:

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1$$

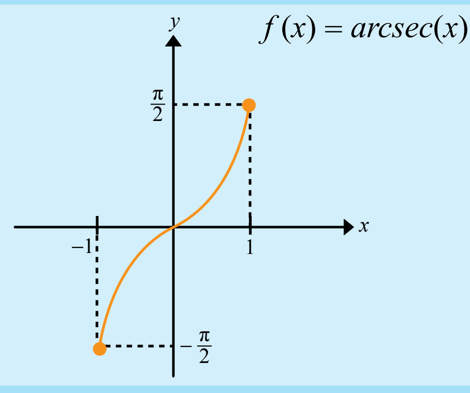
$$1 \leq 3x \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

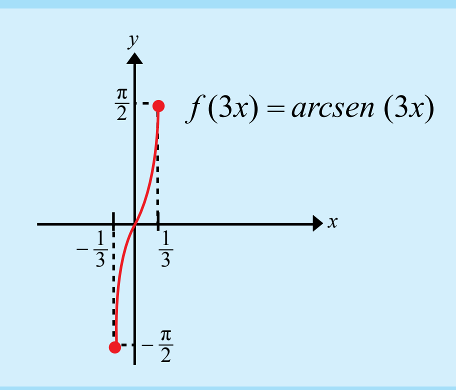
$$\therefore\ dom\, f = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

La función $f(x) = arcsen(3x - 2)$ también puede ser graficada así:

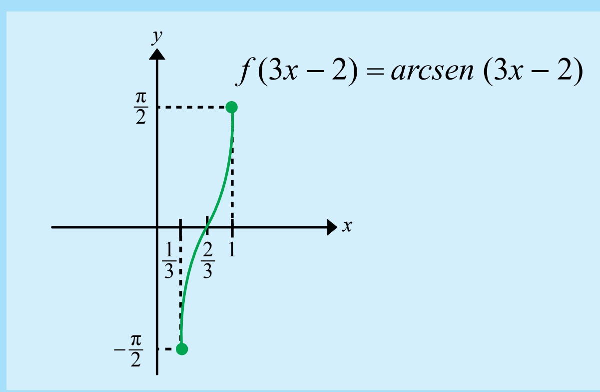
Paso 1: Función original $f(x) = arcsen\ (x)$.



Paso 2: Compresión horizontal $f(3x) = arcsen\ (3x)$.



Paso 3: Desplazamiento $\frac{2}{3}$ unidades a la derecha, $f(3x-2) = arcsen\left[3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]$.



Con esta última gráfica, se puede notar que efectivamente $dom\ f = \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$.

4.5 Identidades Trigonométricas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Demostrar identidades trigonométricas empleando identidades de seno, coseno y tangente.
* Deducir identidades para el ángulo suma, ángulo doble, ángulo mitad y de suma a producto.
* Identificar identidades trigonométricas analítica y gráficamente.
* Obtener relaciones trigonométricas de ángulos compuestos, a partir de otras relaciones conocidas.

En esta sección veremos que dada una expresión trigonométrica, es posible simplificarla o transformarla en otra expresión equivalente a la original, empleando las principales identidades trigonométricas del seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, ángulo doble, ángulo medio, productos de seno y/o coseno.

Así mismo, se dará una interpretación gráfica de algunas identidades, lo cual es más eficiente en algunos casos.

Para poder alcanzar los objetivos precedentes, se usarán propiedades de gran importancia en trigonometría. Así, en esta sección se analizarán varias de las denominadas identidades trigonométricas.

El procedimiento para demostrar identidades es:

- Empezar con el miembro que tenga la expresión más compleja.
- Preferir el uso de funciones senos y cosenos.
- Trabajar en el miembro seleccionado de la expresión teniendo en cuenta la expresión del otro miembro.

Identidades Cocientes

$$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Identidades Recíprocas

$$cot(x) = \frac{1}{tan(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}\right\}$$

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$csc(x) = \frac{1}{sen(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Identidades Pitagóricas

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

A partir de esta identidad y dividiendo por $cos^2(x)$ y $sen^2(x)$, se obtiene:

$$tan^2(x) + 1 = sec^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$1 + cot^2(x) = csc^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Identidades Pares o Impares

En base a las gráficas de las seis funciones trigonométricas, se puede deducir que:

$$sen(-x) = -\,sen(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$cos(-x) = \ \ cos(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$tan(-x) = -\,tan(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$cot(-x) = -\,cot(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$sec(-x) = \ \ sec(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$csc(-x) = -\,csc(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 4.23 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $(sen(x) + cos(x))^2 + (sen(x) - cos(x))^2 = 2$

Solución:

$(sen(x) + cos(x))^2 + (sen(x) - cos(x))^2 =$

$= (sen^2(x) + 2sen(x)\,cos(x) + cos^2(x)) +$
$\quad (sen^2(x) - 2sen(x)\,cos(x) + cos^2(x))$ — Productos notables.

$= 2sen^2(x) + 2cos^2(x)$ — Simplificación de términos.

$= 2(sen^2(x) + cos^2(x))$ — Factor común.

$= 2$ — Identidad pitagórica.

Ejemplo 4.24 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $sec^2(x) + csc^2(x) = sec^2(x)csc^2(x)$.

Solución:

$$sec^2(x) + csc^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} + \frac{1}{sen^2(x)} \qquad \text{Identidades cocientes.}$$

$$= \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{cos^2(x)sen^2(x)} \qquad \text{m.c.m. del denominador.}$$

$$= \frac{1}{cos^2(x)sen^2(x)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \left(\frac{1}{cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{sen^2(x)}\right) \qquad \text{Propiedad de las fracciones.}$$

$$sec^2(x) + csc^2(x) = sec^2(x)csc^2(x) \qquad \text{Identidades recíprocas.}$$

Ejemplo 4.25 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $\frac{tan(x) + tan(y)}{cot(x) + cot(y)} = tan(x)\ tan(y)$.

Solución:

$$\frac{tan(x) + tan(y)}{cot(x) + cot(y)} = \frac{\frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{sen(y)}{cos(y)}}{\frac{cos(x)}{sen(x)} + \frac{cos(y)}{sen(y)}} \qquad \text{Identidades cocientes.}$$

$$= \frac{\frac{sen(x)\ cos(y) + sen(y)\ cos(x)}{cos(x)\ cos(y)}}{\frac{sen(y)\ cos(x) + sen(x)\ cos(y)}{sen(x)\ sen(y)}} \qquad \text{m.c.m. del denominador.}$$

$$= \frac{sen(x)\ sen(y)}{cos(x)\ cos(y)} \qquad \text{Simplificación de términos.}$$

$$= \left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)\left(\frac{sen(y)}{cos(y)}\right) \qquad \text{Propiedades de las fracciones.}$$

$$\frac{tan(x) + tan(y)}{cot(x) + cot(y)} = tan(x)\ tan(y) \qquad \text{Identidades cocientes.}$$

Ejemplo 4.26 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $\dfrac{1 + cos(-x) - sen(-x)}{1 + cos(-x) + sen(-x)} = sec(x) + tan(x)$.

Solución:

$$\frac{1 + cos(-x) - sen(-x)}{1 + cos(-x) + sen(-x)}$$

$$= \frac{1 + cos(x) + sen(x)}{1 + cos(x) - sen(x)}$$ Identidades pares o impares.

$$= \left(\frac{1 + cos(x) + sen(x)}{1 + (cos(x) - sen(x))}\right)\left(\frac{1 - (cos(x) - sen(x))}{1 - (cos(x) - sen(x))}\right)$$ Multiplicación por el conjugado del denominador.

$$= \frac{1 - cos(x) + sen(x) + cos(x) - cos^2(x) + sen(x)cos(x) + sen(x) - sen(x)cos(x) + sen^2(x)}{1 - (cos(x) - sen(x))^2}$$

$$= \frac{1 - cos^2(x) + 2sen(x) + sen^2(x)}{1 - (cos^2(x) - 2sen(x)cos(x) + sen^2(x))}$$ Simplificación de términos.

$$= \frac{sen^2(x) + 2sen(x) + sen^2(x)}{2sen(x)\,cos(x)}$$ Identidad pitagórica.

$$= \frac{2sen^2(x) + 2sen(x)}{2sen(x)\,cos(x)}$$ Simplificación de términos.

$$= \frac{2sen^2(x)}{2sen(x)cos(x)} + \frac{2sen(x)}{2sen(x)cos(x)}$$ Propiedades de las fracciones.

$$= \frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{1}{cos(x)}$$ Propiedades de las fracciones.

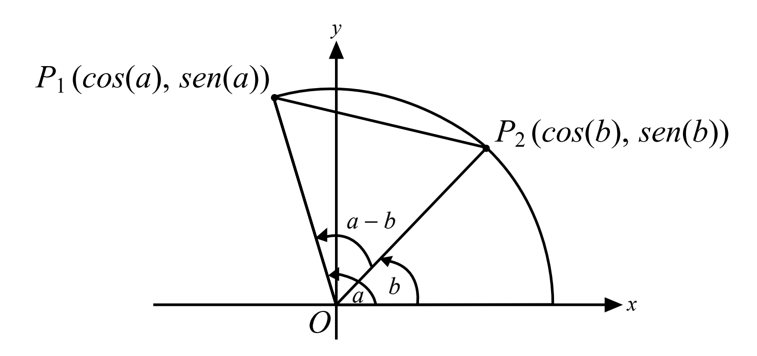
$$= tan(x) + sec(x)$$ Identidades cociente y recíproca.

$$= sec(x) + tan(x)$$ Propiedad conmutativa.

Identidades de suma y diferencia de medidas de ángulos

En esta sección vamos a demostrar las identidades correspondientes a $cos(x+y)$, $cos(x–y)$, $sen(x+y)$ y $sen(x–y)$.

Sean los ángulos cuyas medidas son a, b y $a–b$, en la siguiente gráfica:



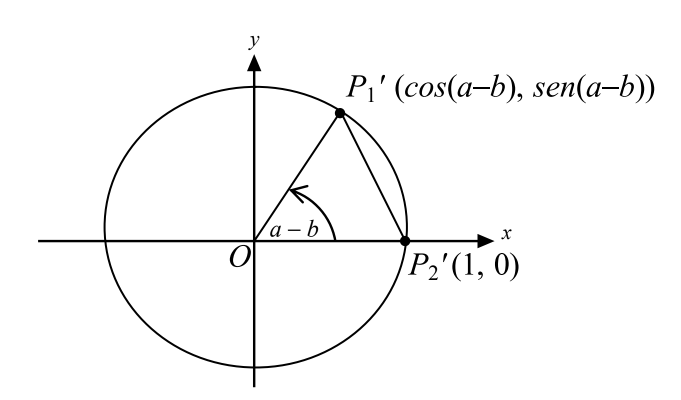
La longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ es:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(cos(b) - cos(a))^2 + (sen(b) - sen(a))^2}$$

$$= \sqrt{(cos^2(b) - 2cos(b)\,cos(a) + cos^2(a)) + (sen^2(b) - 2sen(b)\,sen(a) + sen^2(a))}$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{2 - 2cos(a)cos(b) - 2sen(a)sen(b)}$$

Hagamos rotar el triángulo OP_1P_2 de manera tal que el punto P_2 se sitúe sobre el eje horizontal.



Si designamos por P_1' y P_2' las posiciones de los vértices luego de la rotación, y observando que las coordenadas de P_2' son $(1, 0)$, podemos calcular la longitud del segmento $\overline{P_1'P_2'}$:

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{(cos(a-b) - 1)^2 + (sen(a-b) - 0)^2}$$

$$= \sqrt{cos^2(a-b) - 2cos(a-b) + 1 + sen^2(a-b)}$$

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{2 - 2cos(a-b)}$$

Desde luego,

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1'P_2'}$$

y así:

$$2 - 2cos(a - b) = 2 - 2cos(a)cos(b) - 2sen(a)sen(b)$$

Finalmente:

$$cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$$

El procedimiento anterior puede repetirse para un par de ángulos completamente arbitrarios x, y:

$$cos(x - y) = cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

A partir de este resultado, se puede obtener $cos(x + y)$.

$$cos(x + y) = cos[x - (-y)]$$

$$cos(x + y) = cos(x)cos(-y) + sen(x)sen(-y)$$

Puesto que $cos(y)$ es par y $sen(y)$ es impar,

$$cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $y = \frac{\pi}{2}$,

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos(x)\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(x)\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Esto es:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = - sen(x)$$

Si tomamos $x + \frac{\pi}{2} = z$,

$$x = z - \frac{\pi}{2}$$

Del resultado anterior:

$$cos(z) = - sen\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por otra parte:

$$cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=cos(x)\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen(x)\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=sen(x)$$

Resumiendo:

$$cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\ sen(x)$$

$$cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=sen(x)$$

$$cos(x)=-\ sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$cos(x)=sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Podemos ahora calcular $sen\ (x+y)$:

$$\begin{aligned} sen\ (x+y) &= cos\left[(x+y)-\frac{\pi}{2}\right] \\ &= cos\left[x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= cos(x)\ cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right)-sen(x)\ sen\left(y-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= cos(x)\ sen(y)-sen(x)(-\ cos(y)) \end{aligned}$$

$$sen\ (x+y)\ =\ sen(x)\ cos(y)+cos(x)\ sen(y) \qquad \forall x,\ y\in\mathbb{R}$$

A partir de este resultado, se puede obtener $sen\ (x-y)$.

$$\begin{aligned} sen\ (x-y) &= sen[x+(-y)] \\ &= sen(x)\ cos(-y)+cos(x)\ sen\ (-y) \end{aligned}$$

$$sen\ (x-y)\ =\ sen(x)\ cos(y)-cos(x)\ sen(y) \qquad \forall x,\ y\in\mathbb{R}$$

Podemos ahora calcular $tan(x+y)$:

$$\begin{aligned} tan\ (x+y) &= \frac{sen(x+y)}{cos(x+y)} \\ &= \frac{sen(x)\ cos(y)+cos(x)\ sen(y)}{cos(x)\ cos\ (y)-sen(x)\ sen(y)} \\ &= \frac{\dfrac{sen(x)}{cos(x)}+\dfrac{sen(y)}{cos(y)}}{1-\dfrac{sen(x)}{cos(x)}\ \dfrac{sen(y)}{cos(y)}} \end{aligned}$$

$$tan\ (x+y)\ =\frac{tan\ (x)\ +\ tan\ (y)}{1-tan\ (x)\ \ tan\ (y)} \qquad \forall x,\ y\in\mathbb{R}-\{(2n+1)\ \frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\}$$

A partir de este resultado, se puede obtener $tan\,(x-y)$.

$$\begin{aligned} tan\,(x-y) &= tan\,(x+(-y)) \\ &= \frac{tan\,(x) + tan\,(-y)}{1 - tan\,(x)\;tan\,(-y)} \end{aligned}$$

$$tan\,(x-y) = \frac{tan\,(x) - tan\,(y)}{1 + tan\,(x)\;tan\,(y)} \qquad \forall x,\, y \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\,\frac{\pi}{2},\, n \in \mathbb{Z}\}$$

También se puede demostrar que:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} sen\,(x) = cos\,(y) \\ cos\,(x) = sen\,(y) \end{cases}$$

Se pueden comprobar estas últimas identidades con ángulos notables:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 4.27 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad $sen(x+y) + sen(x-y) = 2sen(x)\,cos(y)$.

Solución:

$$sen(x+y) + sen(x-y) = (sen(x)\,cos(y) + cos(x)\,sen(y)) + (sen(x)\,cos(y) - cos(x)\,sen(y))$$

$$sen(x+y) + sen(x-y) = 2sen(x)\,cos(y)$$

Ejemplo 4.28 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $sen(x+y)\,sen(x-y) = sen^2(x) - sen^2(y)$.

Solución:

$$\begin{aligned} sen(x+y)\,sen(x-y) &= [sen(x)\,cos(y) + cos(x)\,sen(y)][sen(x)\,cos(y) - cos(x)\,sen(y)] \\ &= sen^2(x)\,cos^2(y) - cos^2(x)\,sen^2(y) \\ &= sen^2(x)[1 - sen^2(y)] - sen^2(y)[1 - sen^2(x)] \\ &= sen^2(x) - sen^2(x)\,sen^2(y) - sen^2(y) + sen^2(x)\,sen^2(y) \end{aligned}$$

$$sen(x+y)\,sen(x-y) = sen^2(x) - sen^2(y)$$

Ejemplo 4.29 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $cot(x - y) = \dfrac{cot(x)\, cot(y) + 1}{cot(y) - cot(x)}$.

Solución:

$$\frac{cot(x)\, cot(y) + 1}{cot(y) - cot(x)} = \frac{\dfrac{1}{tan(x)} \dfrac{1}{tan(y)} + 1}{\dfrac{1}{tan(y)} - \dfrac{1}{tan(x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{1 + tan(x)\, tan(y)}{tan(x)\, tan(y)}}{\dfrac{tan(x) - tan(y)}{tan(x)\, tan(y)}}$$

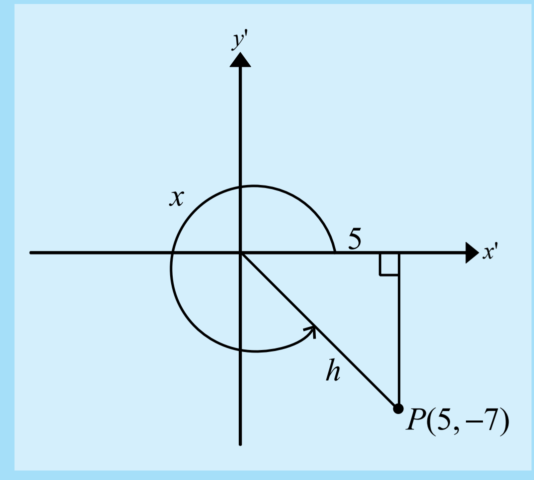
$$= \frac{1}{tan(x - y)}$$

$$\frac{cot(x)\, cot(y) + 1}{cot(y) - cot(x)} = cot(x - y)$$

Ejemplo 4.30 Identidades trigonométricas.

Si $tan(x) = -\frac{7}{5}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, determine el valor de $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{(5)^2 + (-7)^2}$

$h = \sqrt{25 + 49}$

$h = \sqrt{74}$

$$\left(tan(x) = -\frac{7}{5} \wedge \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right) \Rightarrow \left(cos(x) = \frac{5}{\sqrt{74}} \wedge sen(x) = -\frac{7}{\sqrt{74}}\right)$$

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos(x)cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sen(x)\, sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{74}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-7}{\sqrt{74}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5 + 7\sqrt{3}}{2\sqrt{74}}$$

Ejemplo 4.31 Identidades trigonométricas y funciones inversas.

Sean los ángulos α, $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donde $\alpha = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $\beta = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, determine $(\alpha + \beta)$.

Solución:

Se tiene que $cos(\alpha) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $cos\ (\beta) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Pero $sen(\alpha) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\alpha)}$. Y, puesto que α, β, $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$sen(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ y $sen(\beta) = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Como: $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)\, cos(\beta) - sen(\alpha)\, sen(\beta)$.

Entonces: $cos(\alpha + \beta) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, $(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 4.32 Aplicación de identidades trigonométricas.

Sin utilizar calculadora, determine el valor de:

a) $sen(75^o)$
b) $cos(105^o)$

Solución:

a) $sen(75^o) = sen(30^o + 45^o)$

$= sen(30^o)\ cos(45^o) + cos(30^o)\ sen(45^o)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$sen(75^o) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $cos(105^o) = cos(45^o + 60^o)$

$= cos(45^o)\ cos(60^o) - sen(45^o)\ sen(60^o)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$

$cos(105^o) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Identidades de ángulo doble

$$cos(2x) = cos(x + x)$$
$$cos(2x) = cos(x)cos(x) - sen(x)sen(x)$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con la identidad pitagórica y esta última, se puede deducir que:

$$cos(2x) = 1 - 2sen^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Además:

$$sen(2x) = sen(x + x)$$
$$sen(2x) = sen(x)cos(x) + cos(x)sen(x)$$

$$sen(2x) = 2sen(x)\ cos(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$tan(2x) = \frac{sen\ (2x)}{cos\ (2x)}$$

$$tan(2x) = \frac{2sen(x)\ cos(x)}{cos^2(x) - sen^2(x)}$$

$$tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)}\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\{(2n+1)\ \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2n+1)\ \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}\}\right\}$$

Ejemplo 4.33 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $\dfrac{sen^3(x) + cos^3(x)}{sen(x) + cos(x)} = 1 - \dfrac{1}{2}\ sen(2x)$.

Solución:

$$\frac{sen^3(x) + cos^3(x)}{sen(x) + cos(x)} = \frac{(sen(x) + cos(x))\ (sen^2(x) - sen(x)\ cos(x) + cos^2(x))}{(sen(x) + cos(x))}$$

$$= \frac{(sen(x) + cos(x))\ (1 - sen(x)\ cos(x))}{(sen(x) + cos(x))}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\ sen(2x).$$

Identidades de ángulo mitad

$$cos(2x) = 2\ cos^2(x) - 1$$

De donde:

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}$$

y así:

$$cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(2x)}{2}}$$

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(x)}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El signo del radical debe escogerse en relación con la ubicación de $\left(\frac{x}{2}\right)$. Si se encuentra en el primer cuadrante, $cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ y así sucesivamente.

$$cos(2x) = 1 - 2\,sen^2(x)$$

$$sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

$$sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(2x)}{2}}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(x)}{1 + cos(x)}} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 4.34 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $\frac{sen(3x)}{sen(x)} - \frac{cos(3x)}{cos(x)} = 2.$

Solución:

$$\frac{sen(3x)}{sen(x)} - \frac{cos(3x)}{cos(x)}$$

$$= \frac{sen(2x + (x))}{sen(x)} - \frac{cos(2x + (x))}{cos(x)}$$

$$= \frac{sen(2x)\,cos(x) + cos(2x)\,sen(x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)\,cos(x) - sen(2x)\,sen(x)}{cos(x)}$$

$$= \frac{2sen(x)\,cos^2(x) + (2cos^2(x) - 1)\,sen(x)}{sen(x)} - \frac{(2cos^2(x) - 1)\,cos(x) - 2\,sen^2(x)\,cos(x)}{cos(x)}$$

$$= \frac{2sen(x)\,cos^2(x) + 2cos^2(x)\,sen(x) - sen(x)}{sen(x)} - \frac{2cos^3(x) - cos(x) - 2\,sen^2(x)\,cos(x)}{cos(x)}$$

$$= \frac{sen(x)\,(2cos^2(x) + 2cos^2(x) - 1)}{sen(x)} - \frac{cos(x)\,(2cos^2(x) - 1 - 2sen^2(x))}{cos(x)}$$

$$= 2cos^2(x) + 2cos^2(x) - 1 - 2cos^2(x) + 1 + 2sen^2(x)$$

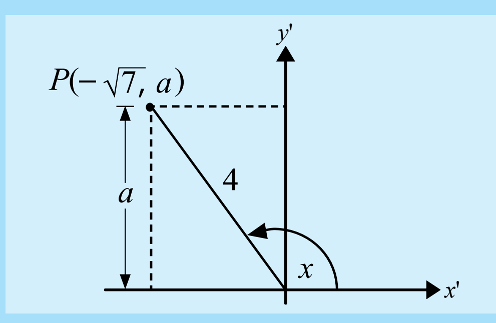
$$= 2(sen^2(x) + cos^2(x))$$

$$= 2$$

Ejemplo 4.35 Aplicación de identidades trigonométricas.

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, y $cos(x) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, determine el valor de $tan(2x + \pi)$.

Solución:



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$a = \sqrt{(4)^2 - (-\sqrt{7})^2}$

$a = \sqrt{16 - 7}$

$a = 3$

$tan(x) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

$$tan(2x + \pi) = tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)} = \frac{2\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)}{1 - \frac{9}{7}} = \frac{-\frac{6}{\sqrt{7}}}{-\frac{2}{7}}$$

$tan(2x + \pi) = 3\sqrt{7}$

Ejemplo 4.36 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $csc^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1 - cos(x)}$.

Solución:

$$csc^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{1-cos(x)}$$

Ejemplo 4.37 Identidades trigonométricas.

Determine si las siguientes expresiones constituyen identidades trigonométricas.

a) $cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$

b) $sen\,(3x) = 2sen\left(\frac{3x}{2}\right)\,cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

c) $cos\,(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Solución:

a) $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}}$

$$cos\left(\frac{x}{3}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}}$$

$$cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1+cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}$$

$\therefore$ La expresión dada no es una identidad trigonométrica.

b) $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$

$$sen(3x) = 2sen\left(\frac{3x}{2}\right)cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$\therefore$ La expresión dada sí es una identidad trigonométrica.

c) $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

$$cos(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\therefore$ La expresión dada sí es una identidad trigonométrica.

Identidades de suma a producto

El lector puede verificar que:

$$sen(x+y) + sen(x-y) = 2sen(x)\ cos(y)$$
$$cos(x-y) - cos(x+y) = 2sen(x)\ sen(y)$$
$$cos(x+y) + cos(x-y) = 2cos(x)\ cos(y)$$
$$sen(x+y) - sen(x-y) = 2cos(x)\ sen(y)$$

Es frecuente utilizar estas fórmulas de otra manera. Si hacemos:

$$x+y=u \qquad x=\frac{u+v}{2}$$

$$x-y=v \qquad y=\frac{u-v}{2}$$

$$sen(u)+sen(v)=2sen\left(\frac{u+v}{2}\right)cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$cos(v)-cos(u)=2sen\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$cos(u)+cos(v)=2cos\left(\frac{u+v}{2}\right)cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$sen(u)-sen(v)=2cos\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

Las cuales pueden ser expresadas como:

$$sen(x)+sen(y) = 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$sen(x)-sen(y) = 2sen\left(\frac{x-y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$cos(x)-cos(y) = -2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$cos(x)+cos(y) = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Identidades de producto a suma

$$sen(x)\ cos(y) = \frac{1}{2}\Big[sen(x+y) + sen(x-y)\Big] \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

$$sen(x)\ sen(y) = \frac{1}{2}\Big[cos(x-y) - cos(x+y)\Big] \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

$$cos(x)\ cos(y) = \frac{1}{2}\Big[cos(x+y) + cos(x-y)\Big] \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

$$cos(x)\ sen(y) = \frac{1}{2}\Big[sen(x+y) - sen(x-y)\Big] \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4.38 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $\dfrac{sen(4x) + sen(8x)}{cos(4x) + cos(8x)} = tan(6x)$.

Solución:

$$\frac{sen(4x) + sen(8x)}{cos(4x) + cos(8x)} = \frac{2sen\left(\frac{4x+8x}{2}\right) cos\left(\frac{4x-8x}{2}\right)}{2cos\left(\frac{4x+8x}{2}\right) cos\left(\frac{4x-8x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2sen(6x)\ cos(-2x)}{2cos(6x)\ cos(-2x)}$$

$$= tan(6x)$$

Ejemplo 4.39 Identidades trigonométricas.

Demostrar la identidad:

$$sen(x)\ (sen(3x) + sen(5x)) = cos(x)\ (cos(3x) - cos(5x))$$

Solución:

$$sen(x)\ (sen(3x) + sen(5x)) = sen(x)\left[\ 2sen\left(\frac{3x+5x}{2}\right) cos\left(\frac{3x-5x}{2}\right)\right]$$

$$= sen(x)\ [2sen(4x)\ cos(-x)]$$

$$= 2cos(x)\ [sen(4x)\ sen(x)]$$

$$= 2cos(x)\left(\frac{1}{2}\ [cos(4x-x) - cos(4x+x)]\right)$$

$$= cos(x)\ (cos(3x) - cos(5x))$$

Ejemplo 4.40 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $\dfrac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)} = -\ cot\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\ cot\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

Solución:

$$\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)} = \frac{2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{-2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= -\ cot\left(\frac{x+y}{2}\right)\ cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Ejemplo 4.41 Demostración de una identidad trigonométrica.

Demostrar la identidad: $sen\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) = -\ cos(x)$.

Solución:

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)cos(x) + cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)sen(x)$$

$$= (-1)(cos(x)) + (0)(sen(x))$$

$$= -\ cos(x)$$

Ejemplo 4.42 Interpretación gráfica de una identidad trigonométrica.

Se requiere establecer si la igualdad $sen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = cos(x)$ es una identidad.

Solución:

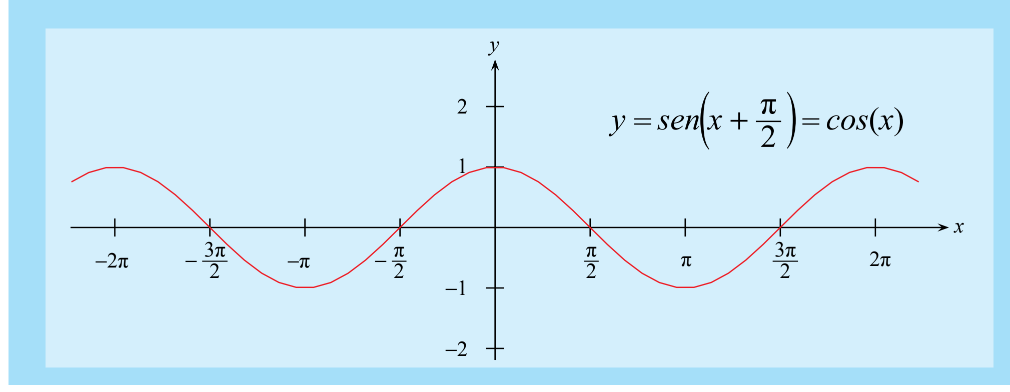
$sen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = sen(x)\ cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + cos(x)\ sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ Se desarrolla el primer miembro.

$sen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = (sen(x))\ (0) + (cos(x))\ (1)$ Reemplazando valores conocidos.

$sen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = cos(x)$ Simplificando.

Con lo cual se demuestra la identidad.

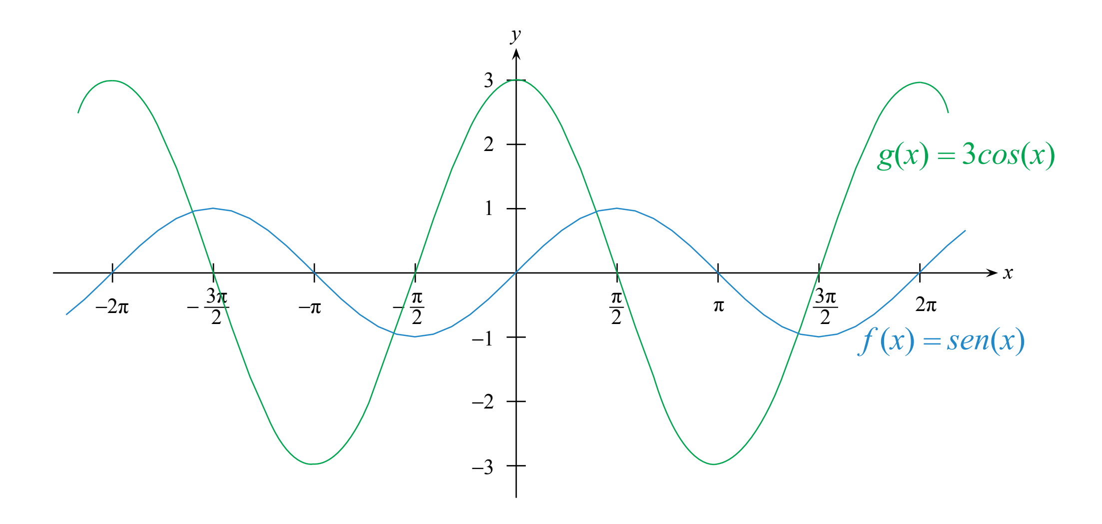
En la siguiente figura se observa que el $sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ es la gráfica estándar de $f(x) = sen(x)$ desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda, lo cual corresponde a la gráfica de $f(x) = cos(x)$. Con esto se verifica la identidad.



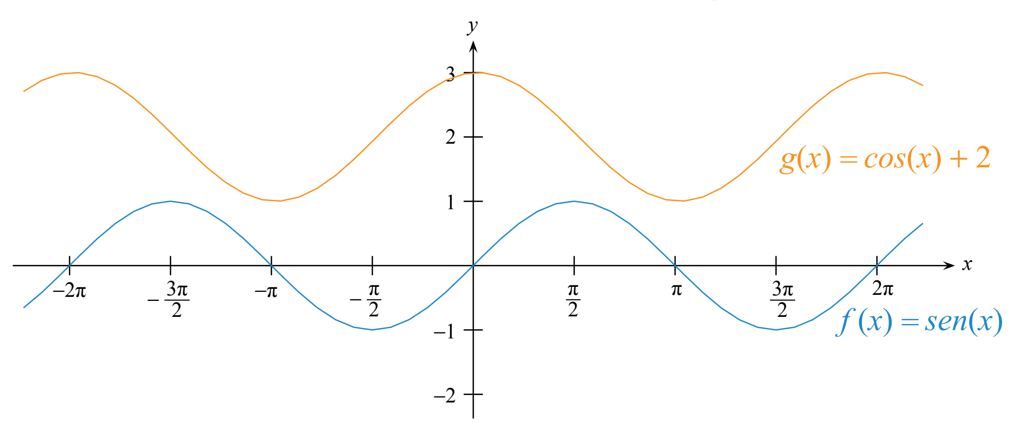
Identificar gráficamente identidades trigonométricas es práctico cuando las gráficas no son muy complicadas de construir o cuando no se dispone de un software graficador.

Una identidad se la puede considerar como una ecuación que se satisface para todos los elementos del referencial.

En caso de tener una igualdad que no represente una identidad trigonométrica, las gráficas serán diferentes y puede ocurrir que se intersequen en algunos puntos o que la intersección no exista, tal como se ilustra en la Figura 4.14.



a) Intersección ocurre en algunos puntos.



b) Intersección no existe.

Figura 4.14: Interpretación Gráfica de Identidades Trigonométricas

La Figura 4.14(a) puede interpretarse como una igualdad que se cumple sólo para ciertos elementos del dominio de las funciones, mientras que en la figura 4.14(b) se puede notar que las dos funciones trigonométricas no tienen puntos en común. Para algunas aplicaciones es necesario obtener estos puntos de intersección entre gráficas, lo cual conlleva a resolver ecuaciones trigonométricas tal como se estudiará en la siguiente sección.

4.6 Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una ecuación trigonométrica, transformarla y despejar su incógnita, empleando despeje directo o factorización.
* Dada una ecuación trigonométrica, transformarla y despejar su incógnita, empleando algún cambio de variable adecuado.
* Dada una inecuación trigonométrica, encontrar gráficamente su solución.

En esta sección veremos que las ecuaciones o inecuaciones que involucran funciones trigonométricas pueden ser resueltas utilizando las identidades estudiadas en la sección anterior, las gráficas de estas funciones y sus respectivas inversas.

Ejemplo 4.43 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\mathrm{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sen(x) = \frac{1}{2}$. Encuentre la suma de los elementos de $\mathrm{A}p(x)$:

Solución:

$$x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6}\right)$$

Comprobando:

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right): \qquad sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \therefore p\left(\frac{\pi}{6}\right) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{6}\right): \qquad sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \therefore p\left(\frac{5\pi}{6}\right) \equiv 1$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{A}p(x) = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

La suma de los elementos de $\mathrm{A}p(x)$ es π.

Ejemplo 4.44 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\mathrm{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $2cos^2(x) - cos(x) - 1 = 0$. Encuentre la suma de los elementos de $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

Sea $u = cos(x)$

$$2u^2 - u - 1 = 0$$

$$\frac{(2u-2)\,(2u+1)}{2} = 0$$

$$(u-1)\,(2u+1) = 0$$

$$(u-1=0) \vee (2u+1=0)$$

$$(u=1) \vee \left(u = -\frac{1}{2}\right)$$

$$(cos(x)=1) \vee \left(cos(x) = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[x = arccos(1)\right] \vee \left[x = arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\left[(x=0) \vee (x=2\pi)\right] \vee \left[\left(x = \frac{2\pi}{3}\right) \vee \left(x = \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Comprobando:

$$p(0) : 2cos^2(0) - cos(0) - 1 = 2(1) - 1 - 1 = 0 \quad \therefore p(0) \equiv 1$$

$$p(2\pi) : 2cos^2(2\pi) - cos(2\pi) - 1 = 2(1) - 1 - 1 = 0 \quad \therefore p(2\pi) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{2\pi}{3}\right) : 2cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \therefore p\left(\frac{2\pi}{3}\right) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{4\pi}{3}\right) : 2cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \therefore p\left(\frac{4\pi}{3}\right) \equiv 1$$

Por lo tanto:

$$Ap(x) = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

La suma de los elementos de $Ap(x)$ es 4π.

Ejemplo 4.45 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $Re = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $tan(2x) + 2sen(x) = 0$, encuentre la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

$$tan(2x) + 2sen(x) = 0$$

$$\frac{sen(2x)}{cos(2x)} + 2sen(x) = 0$$

$$\frac{2sen(x)cos(x)}{2cos^2(x) - 1} + 2sen(x) = 0$$

$$\frac{2sen(x)cos(x) + 2sen(x)\,(2cos^2(x) - 1)}{2cos^2(x) - 1} = 0$$

$$\frac{2sen(x)(cos(x) + 2cos^2(x) - 1)}{2cos^2(x) - 1} = 0$$

$$(2sen(x) = 0) \vee (2cos^2(x) + cos(x) - 1 = 0)$$

$$\left[x = arcsen(0)\right] \vee \left[x = arccos(-1) \vee x = arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\left[(x = 0) \vee (x = \pi) \vee (x = 2\pi)\right] \vee (x = \pi) \vee \left[\left(x = \frac{\pi}{3}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

Comprobando:

$$p(0) \;:\; tan(0) + 2sen(0) = 0 \qquad \therefore p(0) \equiv 1$$

$$p(\pi) \;:\; tan(2\pi) + 2sen(\pi) = 0 \qquad \therefore p(\pi) \equiv 1$$

$$p(2\pi) \;:\; tan(4\pi) + 2sen(2\pi) = 0 \qquad \therefore p(2\pi) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{\pi}{3}\right) \;:\; tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \qquad \therefore p\left(\frac{\pi}{3}\right) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{3}\right) \;:\; tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \qquad \therefore p\left(\frac{5\pi}{3}\right) \equiv 1$$

Por lo tanto: $Ap(x) = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

La suma de los elementos de $Ap(x)$ es 5π.

Ejemplo 4.46 Ecuaciones Trigonométricas.

Sea $Re = [-2\pi, 0]$ y $p(x)$: $sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$$\left[sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \equiv \left[cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = cos(2x)\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen(2x)\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen(2x)$$

$$\left(sen\,(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in [-2\pi, 0]\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = -2\pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi \\ 2x = -2\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \\ 2x = -2\pi + \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{5\pi}{3} \\ 2x = -\frac{11\pi}{3} \\ 2x = -\frac{4\pi}{3} \\ 2x = -\frac{10\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} \\ x = -\frac{11\pi}{6} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Comprobando:

$$p\left(-\frac{5\pi}{6}\right):\ sec\left(-\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)=sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\equiv 1$$

$$p\left(-\frac{11\pi}{6}\right):\ sec\left(-\frac{11\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=sec\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)=sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\equiv 1$$

$$p\left(-\frac{2\pi}{3}\right):\ sec\left(-\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=sec\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\equiv 1$$

$$p\left(-\frac{5\pi}{3}\right):\ sec\left(-\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=sec\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\equiv 1$$

$$\mathrm{A}p(x)=\left\{-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{2\pi}{3}\right\}$$

Ejemplo 4.47 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\mathrm{Re}=[0,\pi]$ y $p(x)$: $sen(3x)+sen(x)=0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$sen(x+2x)+sen(x)=0$	Descomponiendo $3x$.
$sen(x)\,cos(2x)+cos(x)\,sen(2x)+sen(x)=0$	Aplicando identidad $sen(x+y)$.
$sen(x)\,cos(2x)+2sen(x)\,cos^2(x)+sen(x)=0$	Aplicando identidad $sen(2x)$.
$sen(x)\,[cos(2x)+2cos^2(x)+1]=0$	Factorizando.
$[sen(x)=0]\vee[4cos^2(x)=0]$	Igualando a cero cada factor.
$[x=arcsen(0)]\vee[x=arccos(0)]$	Obteniendo las funciones inversas.
$[(x=0)\vee(x=\pi)]\vee\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$	Encontrando los valores de x.

Comprobando:

$p(0)$: $sen(0) + sen(0) = 0 + 0 = 0$ $\therefore p(0) \equiv 1$

$p(\pi)$: $sen(3\pi) + sen(\pi) = 0 + 0 = 0$ $\therefore p(\pi) \equiv 1$

$p\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$ $\therefore p\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv 1$

$Ap(x) = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$

Ejemplo 4.48 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $Re = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $p(x)$: $8^{sen^2(x^2)} = 2\sqrt{2}$, determine $Ap(x)$.

Solución:

Igualando bases y exponentes:

$$2^{3sen^2(x^2)} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3sen^2(x^2) = \frac{3}{2}$$

Encontramos los valores de x:

$$\left\{sen^2(x^2) = \frac{1}{2} \wedge x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \Rightarrow \left[sen(x^2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \Rightarrow x^2 = arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\left(x^2 = \frac{\pi}{4}\right) \vee \left(x^2 = \frac{3\pi}{4}\right)\right] \quad \Rightarrow \left[\left(x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \vee \left(x = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right)\right]$$

Comprobando:

$p\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$: $8^{sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 8^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ $\therefore p\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right)$: $8^{sen^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 8^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ $\therefore p\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right) \equiv 1$

$Ap(x) = \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \right\}$

Ejemplo 4.49 Ecuaciones Trigonométricas.

Sea $Re = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sen^2(2x) - sen\,(2x) - 2 = 0$, determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

Sea $z = sen(2x)$

$z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow [(z-2)\,(z+1) = 0] \Rightarrow [(z-2=0) \vee (z+1=0)] \Rightarrow [(z=2) \vee (z=-1)]$

Descartamos $z = 2$, porque no es una solución trigonométrica posible. Luego:

$$sen(2x) = -1 \Rightarrow \left[\left(2x = \frac{3\pi}{2}\right) \vee \left(2x = \frac{7\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow \left[\left(x_1 = \frac{3\pi}{4}\right) \wedge \left(x_2 = \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$p\left(\frac{3\pi}{4}\right): sen^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0 \ \therefore \ p\left(\frac{3\pi}{4}\right) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{7\pi}{4}\right): sen^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{7\pi}{2}\right) - 2 = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0 \ \therefore \ p\left(\frac{7\pi}{4}\right) \equiv 1$$

Finalmente, $x_1 + x_2 = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$.

Ejemplo 4.50 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\mathrm{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sen^2(3x) - 2cos(2x) + cos^2(3x) = 0$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$[sen^2(3x) + cos^2(3x)] = 2cos(2x)$ Agrupando términos.

$cos(2x) = \frac{1}{2}$ Identidad pitagórica.

$2x = arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ Resolviendo la ecuación.

$\left(2x = \frac{\pi}{3}\right) \vee \left(2x = \frac{5\pi}{3}\right) \vee \left(2x = \frac{7\pi}{3}\right) \vee \left(2x = \frac{11\pi}{3}\right)$ Determinando los valores de x.

$\left(x = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{7\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{11\pi}{6}\right)$

Comprobando, tenemos que:

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right): sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$$

$$\therefore p\left(\frac{\pi}{6}\right) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{6}\right): sen^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) - 2cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$$

$$\therefore p\left(\frac{5\pi}{6}\right) \equiv 1$$

$p\left(\frac{7\pi}{6}\right)$: $sen^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) - 2cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) = (-1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$

$\therefore p\left(\frac{7\pi}{6}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{11\pi}{6}\right)$: $sen^2\left(\frac{11\pi}{2}\right) - 2cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{11\pi}{2}\right) = (-1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$

$\therefore p\left(\frac{11\pi}{6}\right) \equiv 1$

Por lo tanto: $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Ejemplo 4.51 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $Re = [-\pi, \pi]$ y $p(x)$: $3sen(x) + cos(2x) = 2$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$3sen(x) + cos(2x) = 2$

$3sen(x) + 1 - 2sen^2(x) = 2$ Aplicando identidad $cos(2x)$.

$2sen^2(x) - 3sen(x) + 1 = 0$ Obteniendo la ecuación cuadrática.

Sea $u = sen(x)$ Efectuando un cambio de variable.

$2u^2 - 3u + 1 = 0$ Transformando en una ecuación cuadrática.

$\frac{(2u-2)(2u-1)}{2} = 0$ Resolviendo la ecuación.

$(u = 1) \vee \left(u = \frac{1}{2}\right)$ Obteniendo los valores de u.

$[sen(x) = 1] \vee \left[sen(x) = \frac{1}{2}\right]$ Realizando nuevamente el cambio de variable.

$[x = arcsen(1)] \vee \left[x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ Obteniendo los valores de x.

$\left(x = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left[\left(x = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6}\right)\right]$ Expresando las soluciones.

Comprobando, tenemos que:

$p\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $3sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos(\pi) = 3(1) + (-1) = 2$ $\therefore p\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{\pi}{6}\right)$: $3sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 2$ $\therefore p\left(\frac{\pi}{6}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{5\pi}{6}\right)$: $3sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 2$ $\therefore p\left(\frac{5\pi}{6}\right) \equiv 1$

Por lo tanto: $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

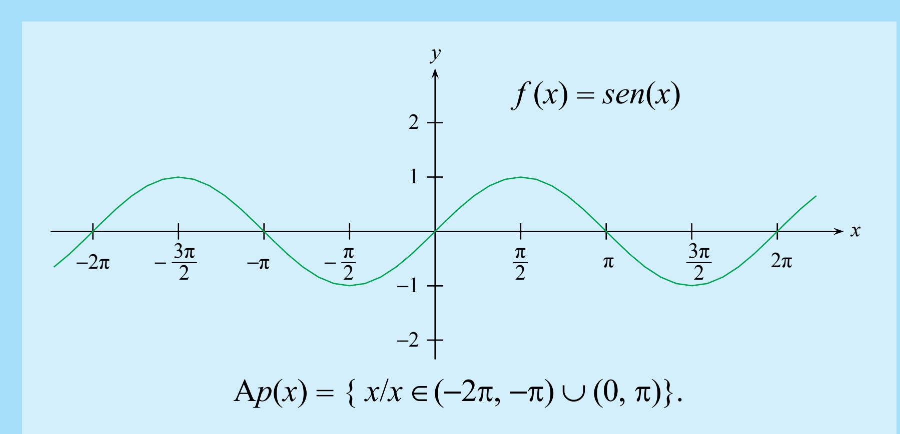
Ejemplo 4.52 Inecuaciones trigonométricas.

Sea $\text{Re} = [-2\pi, 2\pi]$ y $p(x)$: $sgn\,(sen(x)) = 1$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

Para que la función signo tome el valor de 1, su argumento debe ser positivo.

Es decir, $sen(x) > 0$. Gráficamente se observa los intervalos de x entre $[-2\pi, 2\pi]$, en los cuales se cumple esta condición:



$\text{A}p(x) = \{\, x/x \in (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi)\}$.

Ejemplo 4.53 Inecuaciones trigonométricas.

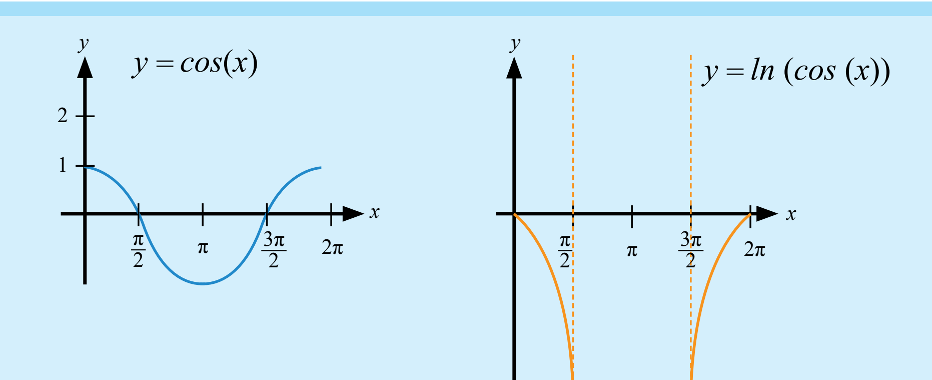
Sea $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $\mu(ln(cos(x))) = 0$, determine $\text{A}p(x)$.

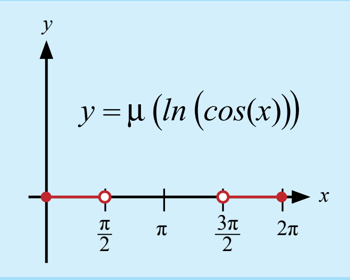
Solución:

Para que la función escalón tome el valor de 0, su argumento debe ser negativo o cero, es decir: $ln(cos(x)) \leq 0$

Para que la función logaritmo natural tome valores negativos o cero, su argumento debe ser mayor que cero y menor o igual que uno, es decir: $0 < cos(x) \leq 1$

Empleando la definición de la función coseno, gráficamente se determina la solución de esta inecuación.





Por lo tanto:

$$Ap(x)=\left\{x/x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]\right\}.$$

Ejemplo 4.54 Inecuaciones trigonométricas.

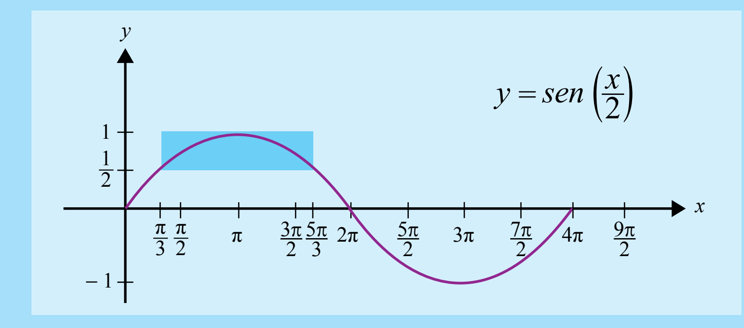
Sea $\text{Re}=[0,\ 2\pi]$ y $p(x)$: $sgn\left(2sen\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)=1$, determine $Ap(x)$.

Solución:

Se debe cumplir lo siguiente:

$$2sen\left(\frac{x}{2}\right)-1>0\Rightarrow sen\left(\frac{x}{2}\right)>\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{\pi}{6}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow\left(\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}\right)$$

En la gráfica de la función mostrada a continuación, se ha sombreado el intervalo para el cual $\left[sen\left(\frac{x}{2}\right)>\frac{1}{2}\right]$.



Ejemplo 4.55 Inecuaciones trigonométricas.

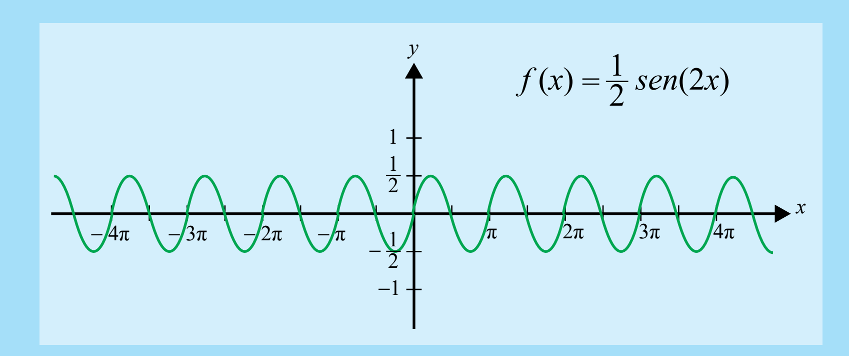
Sea $\text{Re} = [-2\pi, 2\pi]$ y $p(x) = [\![sen(x)\ cos(x)]\!] = 0$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

Para que se cumpla $[\![sen(x)\ cos(x)]\!] = 0$, se debería resolver la siguiente inecuación:

$$0 \leq sen(x)\ cos(x) < 1$$
$$0 \leq \frac{1}{2}\ sen(2x) < 1$$

Si construimos la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}\ sen(2x)$, tenemos:



Podemos notar que para que $0 \leq f(x) < 1$, debe cumplirse que:

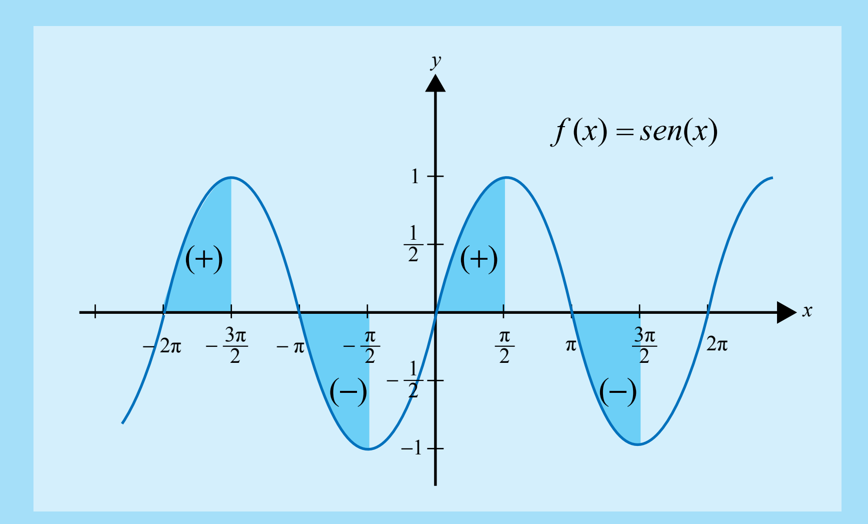
$$2x \in [-4\pi, -3\pi] \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \{4\pi\}$$

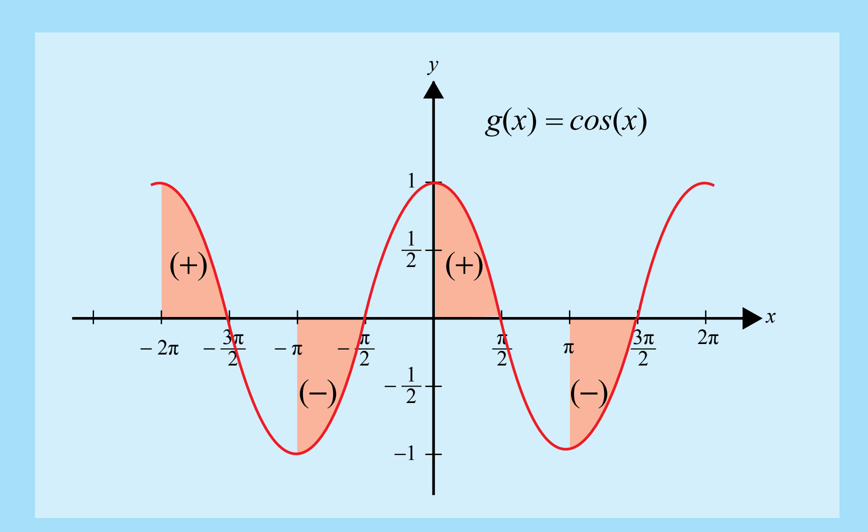
Por lo cual:

$$\text{A}p(x) = \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \{2\pi\}$$

Otra manera de resolver este mismo problema, sería graficar las funciones estándares $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = cos(x)$ y verificar que se cumple:

$0 \leq f(x)\, g(x) < 1$





Se puede observar que $Ap(x)$, efectivamente corresponde al conjunto previamente encontrado.

4.1 Ángulos y medidas

1. Un ángulo es la unión de dos semirrectas de origen común.

   a) Verdadero   b) Falso

2. Un ángulo queda determinado de manera única por su vértice.

   a) Verdadero   b) Falso

3. Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y son suplementarios.

   a) Verdadero   b) Falso

4. Dos ángulos suplementarios son siempre agudos.

   a) Verdadero   b) Falso

5. Dos ángulos opuestos por el vértice siempre son complementarios.

   a) Verdadero   b) Falso

6. Transformar cada ángulo dado de grados a radianes.

   a) 30° b) 135° c) -120° d) 450° e) -540° f) 60°

7. Transformar cada ángulo dado de radianes a grados.

   a) $\pi/6$ b) $-5\pi/4$ c) $4\pi/3$ d) $\pi/2$ e) $\pi/12$ f) 4π

8. Complete la siguiente tabla:

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$				
Grados sexagesimales				60°			135°	112°	150°	15°

9. El extremo del minutero de un reloj recorre $\frac{7\pi}{10}$ cm en tres minutos. ¿Cuál es la longitud del minutero?

10. Determine la medida del ángulo, en el cual la medida de su suplemento es 4 veces la medida de su complemento.

11. Si la suma de las medidas de ocho ángulos congruentes es 180°. ¿Cuánto mide dicho ángulo en radianes?

12. La medida del ángulo suplementario de x es igual a 123°. Hallar la medida del ángulo x y la medida de su ángulo complementario.

4.2 Funciones trigonométricas elementales

13. Calcule el valor de las expresiones siguientes y represéntelas como una fracción o radical simplificado:

a) $sen(30^o)\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

b) $sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(-tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) tan(330^o)$

c) $3cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)-tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d) $tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)-tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

e) $\dfrac{sen(120^o)+cos(240^o)}{tan(60^o)+tan(330^o)}$

f) $\dfrac{2sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right)cos^2(\pi)}{4tan\left(\frac{\pi}{4}\right)sen^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

14. Hallar el valor de cada expresión dada:

a) $tan(\pi)+sen(\pi)$

b) $\dfrac{sen(50^o)}{cos(40^o)}$

c) $3sen(45^o)-4tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

d) $\dfrac{sen(-40^o)}{cos(50^o)}$

e) $6cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+2tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

4.3 Gráficas de funciones trigonométricas

15. Parte de la gráfica de $y= p + qcos(x)$ aparece a continuación. La gráfica contiene los puntos $(0,3)$ y $(\pi,-1)$. Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

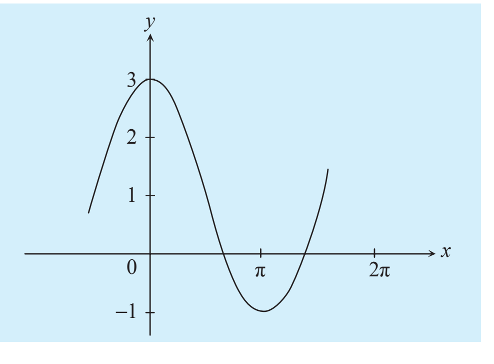
a) $p^2 + q^2 = 9$

b) $p^2 - q^2 = 3$

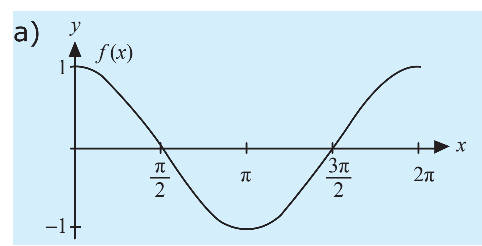
c) $p^2 - q^2 = -9$

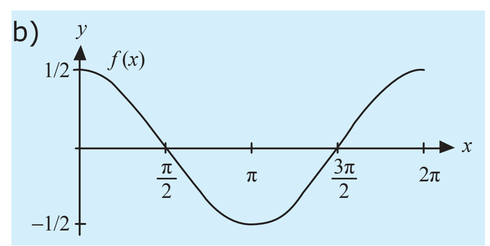
d) $p + q = -3$

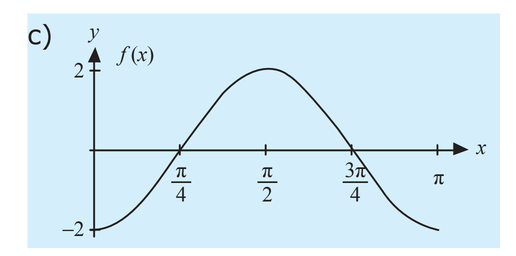
e) $p^2 - q^2 = -3$

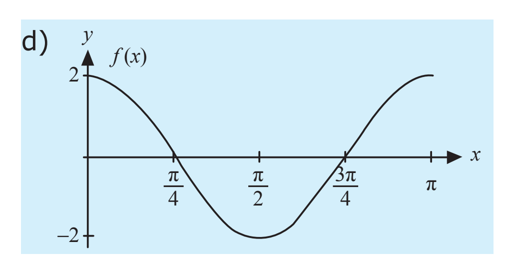


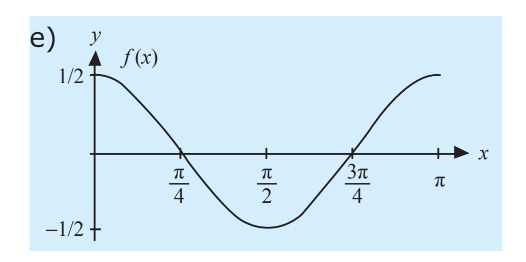
16. Si se tiene la función $f : [0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $f(x)= 2^{-1}cos(2x)$, entonces su gráfica es:

a)


b)


c)


d)


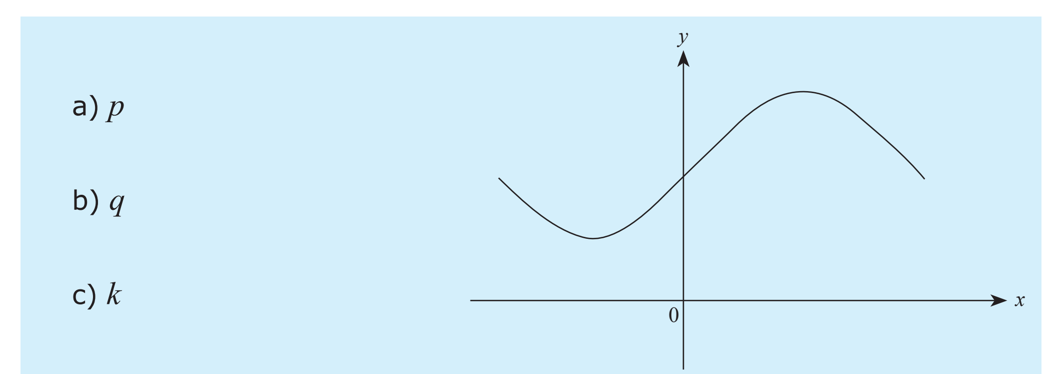
e)


17. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una curva senoidal $f(x) = p + q sen(kx)$. El período es 4π, el valor mínimo es 3 y el valor máximo es 11 (esta gráfica no está a escala). Halle el valor de:

a) p

b) q

c) k



18. Graficar:

a) $y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

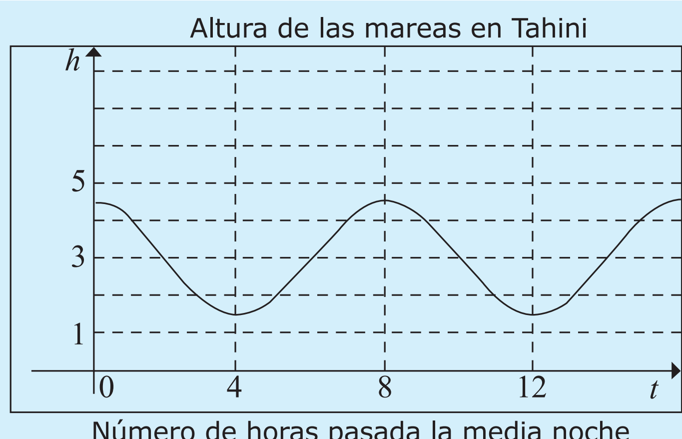
b) $y = |sen(2x) - 1| - 1$

c) $y = 1 - tan(\pi - x)$

d) $y = 0.5 - [\![sen(x/2)]\!]$

e) $y = sgn(cos(2x))$

19. La gráfica muestra la altura h de las mareas en metros, a las t horas pasadas la media noche en la isla de Tahini.



La altura h puede tener como modelo a la función $h(t) = acos(bt) + 3$.

a) Use la gráfica anterior para hallar los valores de las constantes a y b.
b) A partir del resultado anterior, calcule la altura de la marea a las $13{:}00$.
c) ¿A qué hora estará la marea en su mínimo durante el segundo período de 8 horas?

4.4 Funciones trigonométricas inversas

20. Sea $\alpha = arccos(-1/2)$, $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\beta = arcsen(-\sqrt{3}/2)$, $3\pi/2 < \beta < 2\pi$; encuentre el valor de $sen(\alpha) + tan(\beta)$.

21. Encuentre el valor de $cos(x)$ si $x = arctan\ (4/7)$, $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

22. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $cos(arcsen(x))$

b) $cos(arctan(x))$

c) $arccos\left[cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right]$

d) $sen\left[arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$

4.5 Identidades trigonométricas

23. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $[sen^{-1}(x+y) = sen^{-1}(x) + sen^{-1}(y)]$

a) Verdadero

b) Falso

24. El valor de la expresión $8cos(10º)cos(20º)cos(40º)$ es:

a) $8cos(70º)$ b) 1 c) $tan(10º)$ d) $cot(10º)$ e) 8

25. El valor de $cos(\pi/12)$ es:

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

26. Si $\pi/2<x<\pi$ y $sen(x)= 5/13$, entonces el valor de $cos(x+\pi/3)$ es:

a) $-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$ b) $\frac{5\sqrt{3}+7}{74}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-1}{74}$ d) $\frac{3-7\sqrt{3}}{26}$ e) $\frac{5-7\sqrt{3}}{\sqrt{74}}$

27. Si $\pi/2<x<\pi$ y $sen(x)= 5/13$, entonces el valor de $sen(2x)$, es:

a) $-10/13$ b) $12/13$ c) $-12/13$ d) $120/169$ e) $-120/169$

28. La expresión: $\sqrt{\frac{2sec(3x)}{1+sec(3x)}}$, es equivalente a:

a) $sec(3x)$ b) $sec(2x)$ c) -1 d) $cos(3x/2)$ e) $sec(3x/2)$

29. La expresión que no representa una identidad trigonométrica es:

a) $sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}sen(x)$

b) $cos(4x)=cos^2(2x)-sen^2(2x)$

c) $tan(x)\,cos(x)=\frac{1}{csc(x)}$

d) $sen^2(2x)+cos^2(2x)=2$

e) $tan(2x)=\frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$

30. Hallar el valor de: $tan(19\pi/12)$.

31. Hallar $(g\circ f)(x)$ si f y g están definidas por las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} cos(x)\ ;\ x\geq 0 \\ ln(-x)\ ;\ x<0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x\ ;\ |x|\leq 1 \\ e^x\ ;\ |x|>1 \end{cases}$$

32. Si $tan(25º)= a$, representar en términos de a la siguiente expresión:

$$\frac{tan(205º)-tan(115º)}{tan(245º)+tan(335º)}$$

33. Simplificar y hallar el valor de las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{2sen(10^{o})} - 2sen(70^{o})$

b) $sen\left(\frac{\pi}{12}\right) cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

c) $tan(55^{o}) - tan(35^{o})$

d) $cos\left(\frac{\pi}{5}\right) cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

e) $\frac{sen\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{cos(\pi - \alpha)\ cot\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{sen\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) + cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{cos(2\pi - \beta)\ tan(\pi - \alpha)}$

f) $cos\left(\frac{\pi}{65}\right) cos\left(\frac{2\pi}{65}\right) cos\left(\frac{4\pi}{65}\right) cos\left(\frac{8\pi}{65}\right) cos\left(\frac{16\pi}{65}\right) cos\left(\frac{32\pi}{65}\right)$

34. Demuestre:

$$cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

35. Demuestre:

a) $\frac{sen^{3}(\alpha - 270^{o})\ cos(360^{o} - \alpha)}{tan^{3}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) cos^{3}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = cos(\alpha)$

b) $\frac{cos^{2}(\alpha)}{cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) - tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{4}\ sen(2\alpha)$

c) $\frac{tan^{2}(2x) - tan^{2}(x)}{1 - tan^{2}(2x)\ tan^{2}(x)} = tan(3x)tan(x)$

d) $sen(\omega)sen(60^{o} - \omega)\ sen\left(\frac{\pi}{3} + \omega\right) = \frac{1}{4}sen(3\omega)$

e) $sen(47^{o}) + sen(61^{o}) - sen(11^{o}) - sen(25^{o}) = cos(7^{o})$

f) $\frac{1 + sen(\beta) + cos(\beta)}{1 + sen(\beta) - cos(\beta)} = \frac{1 + cos(\beta)}{sen(\beta)}$

36. Una de las siguientes expresiones no constituye una identidad trigonométrica, identifíquela:

a) $sen^{2}(\theta)(1 + cot^{2}(\theta)) = 1$

b) $1 - csc^{2}(\theta) = -cot^{2}(\theta)$

c) $sen(\theta)(cot(\theta) + tan(\theta)) = sec(\theta)$

d) $(1 - sen^{2}(\theta))(1 + tan^{2}(\theta)) = -1$

37. Si $\pi < \alpha < 3\pi/2$ y $sen(\alpha) = -3/5$, hallar el valor de $tan(2\alpha)$.

38. Si $tan(\alpha)=1/7$; $sen(\beta)=1/\sqrt{10}$; $\alpha \in (0,\pi/2)$ y $\beta \in (0,\pi/2)$, determine $sen(\alpha + 2\beta)$.

39. Si $f(x) = 2tan(x/2)$; $x \in [0, \pi/2]$, hallar el valor de $f(2\pi/3) - f(\pi/2)$.

40. Si $sen(x) = -12/13$; $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$, hallar el valor de $cos(x + \pi/3)$.

41. Encuentre una expresión para $tan(3\alpha)$ en términos de $tan(\alpha)$.

42. Si $tan(\alpha)= -7/24$ y $cot(\beta)=3/4$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 3\pi/2$, encuentre el valor de $cos(\alpha + \beta)$.

43. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{(2sen^2(\theta) - 1)^2}{sen^4(\theta) - cos^4(\theta)} = 1 - 2cos^2(\theta)$

b) $\dfrac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)} + \dfrac{1}{2cos^2(x) - 1} = \dfrac{cos(x) + sen(x)}{cos(x) - sen(x)}$

c) $tan(\alpha) + \dfrac{1}{cos^3(\alpha)} - \dfrac{1}{sen(\alpha) - tan(\alpha)} = \dfrac{sen^2(\alpha)}{cos^3(\alpha)}$

d) $\dfrac{3cos^2(z) + 5sen(z) - 5}{cos^2(z)} = \dfrac{3sen(z) - 2}{1 + sen(z)}$

e) $\dfrac{2sen^2(\omega) + 3cos(\omega) - 3}{sen^2(\omega)} = \dfrac{2cos(\omega) - 1}{1 + cos(\omega)}$

f) $\dfrac{sen^2(t) + 4sen(t) + 3}{cos^2(t)} = \dfrac{3 + sen(t)}{1 - sen(t)}$

g) $sec(y) - \dfrac{cos(y)}{1 + sen(y)} = tan(y)$

44. Dado que $sen(x) = \dfrac{1}{3}$, donde x es un ángulo agudo, halle el valor de:

a) $cos(x)$ b) $cos(2x)$ c) $sen(2x)$

4.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

45. Sea $p(x)$: $2sen^2(x) - 7sen(x) + 3 = 0$ y $x \in [0, \pi]$, la suma de los elementos de $Ap(x)$ es:

a) π b) $\pi/3$ c) $5\pi/3$ d) $7\pi/6$ e) 2π

46. Sea $p(x)$: $sen(x) > \frac{1}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$, hallar $Ap(x)$.

47. Sea $q(x)$: $cos(x) < \frac{1}{3}$, $x \in (0, 2\pi)$, hallar $Aq(x)$.

48. La función f de dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se define como $f(x) = cos(x) + \sqrt{3}\ sen(x)$. Esta función puede también expresarse de la forma $f(x) = Rcos(x - \alpha)$, donde $R > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

a) Halle el valor de R y la medida del ángulo α.

b) Halle el rango de f.

c) Es inversible f, ¿por qué?

d) Halle el valor de x que satisface la ecuación $f(x) = \sqrt{2}$.

49. Considere el predicado $p(x)$: $2sen^2(x) = 1 - cos(x)$, $x \in [0, 2\pi]$. La suma de los elementos de $Ap(x)$ es:

a) $\frac{8\pi}{3}$ b) 3π c) $\frac{4\pi}{3}$ d) 4π e) $\frac{7\pi}{3}$

50. Resuelva la ecuación $2cos^2(x) = sen(2x)$, siendo $0 \leq x \leq \pi$.



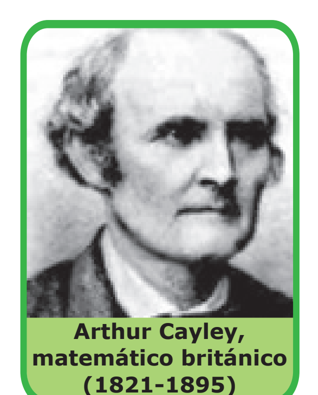
Capítulo 5

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Introducción

La definición de matriz aparece por primera vez en el año 1850, introducida por J. J. Sylvester. Sin embargo, hace más de dos mil años los matemáticos chinos habían descubierto ya un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y, por lo tanto, empleaban tablas con números.

El desarrollo inicial de la teoría de matrices se debe al matemático W. R. Hamilton, en 1853. En 1858, Arthur Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, la misma que fue descrita en su publicación "*Memorias sobre la teoría de matrices*".



Arthur Cayley, matemático británico (1821-1895)

En esta publicación, Cayley daba la definición de matriz y las operaciones de suma entre matrices, de la multiplicación de un número real por una matriz, de la multiplicación entre matrices y de la inversa de una matriz. Cayley afirmaba que obtuvo la idea de matriz a través de la idea del determinante, considerándola como una forma conveniente para expresar transformaciones geométricas.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que surgen de problemas reales de producción, en la resolución de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales, temas que se analizarán en cursos superiores de cálculo. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de forma natural en informática, geometría, estadística, economía, física, logística, etc.

La utilización de matrices constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en las computadoras como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos, entre otros.

5.1 Matrices

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una matriz, identificar su dimensión y los elementos que la conforman, aplicando la notación correcta.
* Dada una matriz, reconocer si es: matriz cuadrada, triangular superior, triangular inferior, diagonal, simétrica, matriz identidad, matriz nula, idempotente, nilpotente, involutiva, simétrica y antisimétrica.
* Dadas dos matrices, establecer condiciones para su igualdad.
* Demostrar propiedades de las operaciones entre matrices.
* Dado un conjunto de matrices, realizar de ser posible, operaciones de suma, multiplicación por un escalar y producto entre ellas.
* Dada una ecuación matricial, emplear operaciones y sus propiedades para despejar de ser posible, la matriz incógnita.
* Dada una matriz cuadrada, encontrar de ser posible su inversa, empleando el método de la matriz aumentada.

Definición 5.1 (Matriz)

Una matriz real A es un arreglo rectangular de números reales, en donde cada elemento a_{ij} que pertenece a la matriz A tiene dos subíndices. El subíndice i representa la *fila* (disposición horizontal), y el subíndice j representa la *columna* (disposición vertical), en las cuales se encuentra el elemento.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si la matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que es de **dimensión** u **orden** m x n y se denota como: A_{mxn}. Se usará $\forall i \, \forall j$ para denotar $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C... y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar que ocupan: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ...

Se puede utilizar el paréntesis curvo o recto para dibujar en su parte interior cada uno de sus elementos.

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.1 Identificación de filas y columnas.

En la matriz $A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

La fila 1 es $(1 \quad 2)$, la fila 2 es $(3 \quad 4)$, la fila 3 es $(5 \quad 6)$.

La columna 1 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y la columna 2 es $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

El tema de matrices está presente en la vida cotidiana, ya que se pueden representar ciertas situaciones con el uso de una matriz, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2 Arreglo de datos en una matriz.

En un seminario internacional se realizó una encuesta a 500 personas y se obtuvo la siguiente información:

150 hombres eran ecuatorianos.
100 mujeres eran ecuatorianas.
60 hombres eran colombianos.
70 mujeres eran colombianas.
70 hombres eran venezolanos.
50 mujeres eran venezolanas.

Se puede colocar los datos anteriores en la siguiente tabla:

	Ecuatorianos	**Colombianos**	**Venezolanos**
Hombres	150	60	70
Mujeres	100	70	50

O como:

$$\begin{pmatrix} 150 & 60 & 70 \\ 100 & 70 & 50 \end{pmatrix}$$

La matriz construida tiene dos filas (hombres y mujeres) y tres columnas (ecuatorianos, colombianos y venezolanos).

Definición 5.2 (Igualdad entre matrices)

Dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{p \times q}$ son iguales, si y sólo si:

- $(m=p) \wedge (n=q)$, es decir, son del mismo orden.
- $\forall i \forall j (a_{ij} = b_{ij})$, es decir, cada uno de los elementos correspondientes de las matrices son iguales.

Ejemplo 5.3 Igualdad entre matrices.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} ln(e) & cos(\pi) \\ log(1) & \sqrt{4} \end{pmatrix}$

son iguales porque tanto A como B son de orden 2 x 2 y se cumple que: $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

5.1.1 Clases de Matrices

Matriz fila

Es una matriz que tiene una sola fila, es decir, su orden es 1 x n. Por ejemplo:

$$A_{1 \times 3} = (1 \ \ 2 \ \ 3)$$

Matriz columna

Es una matriz que tiene una sola columna, es decir, su orden es m x 1. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Matriz rectangular

Es una matriz que tiene el número de filas diferente al de columnas, siendo su orden m x n, $m \neq n$. Por ejemplo:

$$A_{3\text{x}2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

Es una matriz que tiene igual número de filas que de columnas, es decir, $m = n$. Por ejemplo:

$$A_{3\text{x}3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

En las matrices cuadradas tenemos los siguientes conceptos:

Diagonal principal: La constituyen los elementos a_{ij} que cumplen con la condición $i = j$, es decir, a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}. Para el ejemplo dado, los elementos 1, 5 y 9 constituyen la diagonal principal.

Traza: Es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$. Esto se puede representar simbólicamente por $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Para el ejemplo dado $tr(A) = 15$.

Diagonal secundaria: La constituyen los elementos a_{ij} que cumplen con la condición $i + j = n + 1$. Para el ejemplo dado, los elementos 3, 5 y 7 constituyen la diagonal secundaria.

Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Por ejemplo:

$$A_{3\text{x}3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos sobre la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

Es una matriz en la que todos sus elementos son iguales a cero. También se denomina matriz cero y se denota por 0_{mxn}. Observe que existe una matriz cero por cada dimensión m x n. Por ejemplo:

$$0_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero, y los elementos de la diagonal principal iguales entre sí. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ii} = k$ con $k \in \mathbb{R}$. La matriz escalar es un caso particular del conjunto de matrices diagonales. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos iguales a cero, excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1 y se denota por I_{nxn} . Note que existe una matriz identidad por cada tamaño n x n y este tipo de matriz es un caso particular del conjunto de matrices escalares. Por ejemplo:

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.1.2 Operaciones con matrices

Suma entre matrices

Definición 5.3 (Suma entre matrices)

Dadas dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ del mismo orden, se define la suma de matrices como una nueva matriz $C_{m \times n}$ del mismo orden, $C = A + B$, tal que: $\forall i \forall j (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz C es obtenido sumando cada elemento correspondiente de las matrices A y B.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices de orden m x n, la suma cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A, B \in \mathcal{M}, A + B \in \mathcal{M}$	Cerradura
$\forall A, B \in \mathcal{M} \ (A + B = B + A)$	Conmutativa
$\forall A, B, C \in \mathcal{M} \ [A + (B + C) = (A + B) + C]$	Asociativa
$\exists 0 \in \mathcal{M} \ \forall A \in \mathcal{M} \ (A + 0 = 0 + A = A)$	Neutro Aditivo
$\forall A \in \mathcal{M} \ \exists \widehat{A} \in \mathcal{M} \ (A + \widehat{A} = \widehat{A} + A = 0)$	Inverso Aditivo

Cuadro 5.1: Propiedades de la Suma entre Matrices.

Ejemplo 5.4 Demostración de propiedades de la suma entre matrices.

Demuestre la propiedad conmutativa de la suma entre matrices.

$$\forall A, B \in \mathcal{M} \ (A + B = B + A)$$

Solución:

Sean $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ matrices, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

De acuerdo a la definición de la suma entre matrices, tenemos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Utilizando la propiedad conmutativa de la suma entre números reales:

$$A + B = \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aplicando una vez más la definición de la suma entre matrices, tenemos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Con lo cual queda demostrado que:

$$A + B = B + A$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Definición 5.4 (Multiplicación de una matriz por un escalar)

Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una matriz $A_{m \times n}$, se define la multiplicación de una matriz por un escalar como una nueva matriz $B_{m \times n}$, $B = \lambda A$, tal que: $\forall i \forall j (b_{ij} = \lambda a_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz B es obtenido multiplicando el escalar λ por cada elemento de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices de orden m x n, la multiplicación de una matriz por un escalar cumple con las siguientes propiedades:

$\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M},\ \lambda A \in \mathcal{M}$	Cerradura
$\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M}\ [\lambda A = A\lambda]$	Conmutativa
$\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \forall A, B \in \mathcal{M}\ [\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B]$	Distributivas
$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M}\ [(\lambda+\mu) A = \lambda A + \mu A]$	
$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M}\ [\lambda (\mu A) = (\lambda\mu)A]$	Asociativa
$\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M}\ [1\ A = A]$	Elemento Neutro

Cuadro 5.2: Propiedades del producto de una matriz por un escalar.

Ejemplo 5.5 Demostración de propiedades del producto de una matriz por un escalar.

Demuestre que para dos matrices A y B se cumple la propiedad distributiva:

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

Solución:

Consideremos dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Luego aplicamos la definición de la suma entre matrices:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

En base a la definición de la multiplicación de una matriz por un escalar, se tiene que:

$$\lambda(A + B) = \begin{pmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \lambda(a_{12}+b_{12}) & \cdots & \lambda(a_{1n}+b_{1n}) \\ \lambda(a_{21}+b_{21}) & \lambda(a_{22}+b_{22}) & \cdots & \lambda(a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{m1}+b_{m1}) & \lambda(a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & \lambda(a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Efectuando los productos indicados, tenemos que:

$$\lambda(A+B)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}+\lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\lambda b_{m1} & \lambda a_{m2}+\lambda b_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}+\lambda b_{mn} \end{pmatrix}$$

Aplicando una vez más la definición de la suma entre matrices:

$$\lambda(A+B)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{m1} & \lambda b_{m2} & \cdots & \lambda b_{mn} \end{pmatrix}$$

Utilizando nuevamente la definición de la multiplicación de una matriz por un escalar, tenemos:

$$\lambda(A+B)=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se demuestra que:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

Ejemplo 5.6 Operaciones entre matrices.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

determine:

a) $4A$

b) $\frac{1}{3}B$

c) $A+\frac{1}{3}B$

d) $C-2A$

Solución:

a) $4A \;=\; 4\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$4A \;=\; \begin{pmatrix} 12 & 4 & 20 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

c) $A + \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$

$$A + \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{4}{3} & 5 \\ -\frac{14}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

d) $C - 2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C - 2A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -8 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Multiplicación entre matrices

Definición 5.5 (Multiplicación entre matrices)

Dadas dos matrices $A_{m\text{x}n}$ y $B_{n\text{x}p}$, se define la multiplicación entre matrices como una nueva matriz $C_{m\text{x}p}$, $C = AB$, tal que:
$\forall i \forall j (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj})$.

Es decir, cada elemento de la matriz producto C es obtenido sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente elemento de la columna j de la matriz B. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

De aquí que, es importante que el número de columnas de la matriz localizada a la izquierda del producto sea igual al número de filas de la matriz ubicada a la derecha.

La multiplicación entre matrices cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A, B, C \ [A(BC) = (AB)C]$	Asociativa
$\exists I \ \forall A_{m x n} \ [A \ I_{n x n} = I_{m x m} \ A = A]$	
$\forall A, B, C \ [A(B + C) = AB + AC]$	Distributivas
$\forall A, B, C \ [(A + B) \ C = AC + BC]$	

Cuadro 5.3: Propiedades de la Multiplicación Matricial.

Se puede verificar que:

- La multiplicación entre matrices no es conmutativa, esto es, $AB \neq BA$.
- $AB = 0$, aunque A y B no sean matrices nulas.
- La potencia A^n para matrices cuadradas, representa la multiplicación n veces de la misma matriz A.
- Una matriz es idempotente si $A^2 = A$.
- Una matriz es periódica de período p si $A^p = A \ (p \in \mathbb{N} \wedge p > 1)$.
- Una matriz es involutiva si $A^2 = I$.
- Una matriz es nilpotente de índice p si $A^p = 0 \ (p \in \mathbb{N} \wedge p > 1)$.

Para utilizar la propiedad distributiva se requiere que la matriz común esté multiplicando a las demás por la misma ubicación (izquierda o derecha). Así, dada $AB + CA$, no es posible expresarla como $A(B + C)$ o como $(B + C)A$.

Ejemplo 5.7 Demostración de propiedades de la multiplicación entre matrices.

Demuestre que la proposición: "Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$", es falsa.

Solución:

Como la proposición es falsa, vamos a utilizar la demostración por contraejemplo, para lo cual consideraremos dos matrices, A y B no nulas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En base a las matrices A y B, procedemos a aplicar la definición del producto entre ellas, así:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se demuestra que $AB=0$, a pesar de que ni A, ni B, son nulas.

Ejemplo 5.8 Aplicación de multiplicación de matrices.

Susana gana $\$5$ por hora como institutriz, $\$6$ la hora como mecanógrafa y $\$1.50$ la hora como niñera. El número de horas que trabajó en cada tipo de actividad en un período de 4 semanas está dado por la siguiente tabla:

	Semanas			
Actividades	I	II	III	IV
Institutriz	15	10	16	12
Mecanógrafa	6	4	2	3
Niñera	2	7	0	4

Determine cuánto gana Susana cada semana, por las actividades que realiza.

Solución:

Podemos representar matricialmente los datos del número de horas trabajadas por actividad y por semana, así:

$$H = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 16 & 12 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos construir una matriz fila con los datos de ingresos de Susana, así:

$$I = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Si queremos obtener la ganancia de Susana por semana, tenemos que realizar el producto $I\,H$, obteniendo así la matriz G:

$$G = IH$$

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 10 & 16 & 12 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 114 & 84.5 & 92 & 84 \end{pmatrix}$$

Del análisis de esta matriz, podemos concluir que Susana ganó, realizando las 3 actividades:
$\$114$ durante la primera semana, $\$84.50$ durante la segunda semana, $\$92$ durante la tercera semana y $\$84$ durante la cuarta semana.

Ejemplo 5.9 Operaciones entre matrices.

Sea $f(x) = x^2 - 2x$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine $f(A)$.

Solución:

Para evaluar $f(A)$ debemos reemplazar la matriz A en la función, así:

$f(A) = A^2 - 2A$

Luego resolvemos las operaciones indicadas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Reemplazando este resultado en $f(A)$, tenemos:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Transposición de una matriz

Dada una matriz A de orden $m \times n$, para obtener la matriz transpuesta, la cual se denota por A^T, se deben intercambiar los elementos de las filas por las columnas. Note que la nueva matriz A^T es de orden $n \times m$.

Definición 5.6 (Matriz simétrica)

Una matriz cuadrada A, se dice que es simétrica, si y sólo si $A^T = A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i \ \forall j (a_{ij} = a_{ji})$.

Definición 5.7 (Matriz antisimétrica)

Una matriz cuadrada A, se dice que es antisimétrica, si y sólo si $A^T = -A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i \ \forall j (a_{ij} = -a_{ji})$, que implica además que $a_{ii} = 0$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$, la transposición cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A \in \mathcal{M}\ [(A^T)^T = A]$	Involución de la doble transposición
$\forall A, B \in \mathcal{M}\ [(A+B)^T = A^T + B^T]$	Transposición de la suma
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M}\ [(\lambda A)^T = \lambda A^T]$	Transposición de la multiplicación por un escalar
$\forall A, B \in \mathcal{M}\ [(AB)^T = B^T A^T]$	Transposición de la multiplicación entre matrices

Cuadro 5.4: Propiedades de la Transposición de Matrices.

Ejemplo 5.10 Operaciones entre matrices.

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, determine:

a) AB

b) A^2

c) B^TA

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -9 & 15 & 5 \end{pmatrix}$

c) $B^TA = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$B^TA = \begin{pmatrix} -16 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.11 Aplicación de matrices.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de las matrices de dimensión $2x2$. Se define en $\mathcal{M}$ la operación binaria $*$, tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & y \\ z & d \end{pmatrix}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $*$ es una operación conmutativa.

b) $\forall A \in \mathcal{M}, A * A^T = A^T$

Solución:

a) Para que $*$ sea una operación conmutativa, debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pero si aplicamos la definición dada, notaremos que la igualdad entre matrices no se cumple:

$$\begin{pmatrix} a & y \\ z & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x & b \\ c & w \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Esta proposición es falsa.

b) $A * A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T$

$\therefore$ Esta proposición es verdadera.

Ejemplo 5.12 Tipos de matrices.

En base a las definiciones de tipos de matrices, construya un ejemplo de:

a) Matriz idempotente periódica.
b) Matriz involutiva.
c) Matriz nilpotente.
d) Matriz simétrica.
e) Matriz antisimétrica.

Solución:

a) Matriz idempotente periódica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad cumple con la condición de idempotencia, ya que $A^2 = A$. Así mismo, es periódica, ya que se puede generalizar que $A^p = A$, donde $p \in \mathbb{N}$.

b) Matriz involutiva:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar que $B^2 = I$, condición de una matriz involutiva.

c) Matriz nilpotente:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso se cumple que $C^p = 0$, donde $p \in \mathbb{N}$.

d) Matriz simétrica:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nótese que $E^T = E$.

e) Matriz antisimétrica:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo $F^T = -F$.

Inversa de una matriz

Definición 5.8 (Inversa de una matriz)

Dada una matriz cuadrada A, su inversa, la cual se denota por A^{-1}, es una matriz que cumple con:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Una matriz que posee inversa se dice que es **regular**, caso contrario, se dice que es **singular**.

La matriz inversa, en caso de existir, es única.

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de matrices cuadradas de orden n x n inversibles, la inversa de una matriz cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A \in \mathcal{I}[(A^{-1})^{-1} = A]$	Involución de la doble inversa
$\forall A \in \mathcal{I}[(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}]$	Inversa de la transposición
$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \forall A \in \mathcal{I}[(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}]$	Inversa de la multiplicación por un escalar
$\forall A, B \in \mathcal{I}[(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}]$	Inversa de la multiplicación entre matrices

Cuadro 5.5: Propiedades de la Inversa de una Matriz.

Para obtener la inversa de una matriz, se puede utilizar el método de Gauss-Jordan o el de la matriz de cofactores transpuesta.

El objetivo del método de Gauss-Jordan es transformar la matriz A por medio de operaciones algebraicas entre renglones en la matriz identidad I equivalente y simultáneamente la identidad I en la inversa de A. Para tal efecto, las operaciones que están permitidas son:

- Multiplicar una fila por una constante k diferente de cero.
- Intercambiar dos filas.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra.

Ejemplo 5.13 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, determine A^{-1}.

Solución:

Por la definición dada, podemos expresar:

$$A\,A^{-1} = I$$

Considerando $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y planteando la ecuación matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando los elementos correspondientes, resulta:

$$\begin{cases} 2x - 4z &= 1 \\ 2y - 4w &= 0 \\ 5x + 6z &= 0 \\ 5y + 6w &= 1 \end{cases}$$

Este sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas puede plantearse como 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, como se verá en la sección 5.3.

$$\begin{cases} 2x - 4z &= 1 \\ 5x + 6z &= 0 \end{cases}, \begin{cases} 2y - 4w &= 0 \\ 5y + 6w &= 1 \end{cases}$$

Observe que la matriz de coeficientes en ambos sistemas es la misma y los términos independientes son los elementos de la matriz identidad.

Podemos expresar los sistemas como una matriz aumentada y resolverlos mediante el método de Gauss-Jordan, tomando la matriz A y la identidad I para realizar las transformaciones pertinentes.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-1)+f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{5}{16}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(2)+f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

El lector puede verificar que los elementos de A^{-1} son x, y, z, w respectivamente.

Ejemplo 5.14 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, determine A^{-1}.

Solución:

Tomamos la matriz A y la identidad I para realizar las transformaciones pertinentes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-1)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(-1)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{26}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3\left(-\frac{3}{26}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3(-4)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(2)+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{2}{26} & \frac{28}{26} & -\frac{8}{26} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3(-3)+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{26} & \frac{19}{26} & -\frac{11}{26} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{26} & \frac{19}{26} & -\frac{11}{26} \\ -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{26} & \frac{19}{26} & -\frac{11}{26} \\ -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3x3}$$

5.2 Determinantes

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una matriz cuadrada de $1x1$ ó $2x2$, encontrar su determinante mediante cálculo directo.
* Dada una matriz cuadrada, definir el menor y el cofactor de cada uno de sus elementos.
* Dada una matriz cuadrada de $3x3$, encontrar su determinante mediante cálculo directo o mediante el cálculo de cofactores.
* Aplicar el teorema para cálculo de determinantes, en el caso de matrices diagonales o triangulares.
* Dada una matriz cuadrada de orden $4x4$ o superior, encontrar su determinante empleando propiedades de los determinantes.
* Dadas dos matrices relacionadas entre sí, una con determinante conocido y otra no, encontrar el determinante desconocido empleando propiedades.
* Dada una ecuación con determinantes, despejar la incógnita empleando reglas de cálculo de determinantes.
* Dada una matriz con una incógnita, determinar condiciones para que no sea inversible.
* Dada una matriz cuadrada, encontrar su inversa en caso de ser posible, empleando el método de la matriz adjunta.
* Aplicar las propiedades de los determinantes para la matriz transpuesta, inversa y producto.

El determinante de una matriz cuadrada A, el cual se denota por $det\,(A)$ o $|A|$, es un valor escalar que constituye una aplicación del concepto de funciones. Esto es:

$$\begin{array}{rcl} det : M_{nxn} & \curvearrowright & \mathbb{R} \\ A & \rightarrow & det\,(A) \end{array}$$

El determinante puede ser obtenido de la siguiente manera:

$$det\,(a_{11}) = a_{11}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A^{11} - a_{12}A^{12} + a_{13}A^{13}$$

En esta última expresión, a los determinantes A^{11}, A^{12} y A^{13} se los denomina **cofactores**, los cuales se obtienen eliminando los elementos de la fila y la columna que los superíndices señalan. El signo que se asocia a cada cofactor se obtiene elevando el valor -1 a una potencia cuyo valor es la suma de los respectivos superíndices.

En general, el determinante de una matriz de orden n x n es la suma de los productos entre los elementos de una de sus filas (o una de sus columnas) por sus correspondientes cofactores.

La fila o la columna se elige arbitrariamente, y dado el procedimiento anterior, se prefiere aquella fila o columna donde exista la mayor cantidad de ceros posibles, ya que esto ahorra el cálculo del cofactor para ese elemento.

Así, si desea obtener el valor del determinante de una matriz 4 x 4, debe expresarse en función de determinantes de submatrices 3 x 3 utilizando los respectivos cofactores, y así sucesivamente por cada nuevo incremento en el orden de la matriz.

A partir de este método, se puede deducir el siguiente teorema:

Teorema 5.1

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces $det\,(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.

Tal como se dijo anteriormente y luego de estudiar el concepto de determinante, nos proponemos ahora encontrar la inversa de una matriz por el método de los cofactores.

Teorema 5.2

A es inversible, si y sólo si $det\,(A) \neq 0$.

Sea la matriz:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Y suponiendo que $det(A) \neq 0$, su inversa es la matriz adjunta, $(\widehat{A})^T$, multiplicada por el factor $\frac{1}{det(A)}$, esto es:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(\widehat{A})^T$$

La matriz adjunta $(\widehat{A})^T$ es el resultado de transponer la matriz de cofactores $\widehat{A}$

Ejemplo 5.15 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine la matriz A^{-1}.

Solución:

Encontramos cada cofactor:

$A^{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9$ $\quad A^{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$A^{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A^{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A^{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A^{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A^{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A^{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$

La matriz de cofactores es:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores transpuesta es:

$$(\widehat{A})^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -9 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

El valor del determinante de A es:

$det\ (A) = 1(4+1) - 1\ (6+3) + 1\ (3-6)$

$= 5 - 9 - 3$

$det\ (A) = -7$

La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -9 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3}$$

Ejemplo 5.16 Aplicación del teorema de cálculo de determinantes.

Calcule el determinante de las siguientes matrices utilizando el teorema 5.1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Ya que la matriz A es una matriz triangular superior, su determinante se calcularía como:

$det\ (A) = (1)\ (2)\ (6) = 12$

Este valor coincide con el que resulta si se calculara el $det(A)$ utilizando el procedimiento descrito anteriormente, así:

$det\ (A) = (1)(12) - 3\ (0) + 5\ (0)$

$det\ (A) = 12$

b) Por ser B una matriz diagonal, su determinante se podría calcular así:

$det\ (B) = (3)(4)\ (5)\ (-2)$

$det\ (B) = -120$

Este valor coincide con el que resulta al calcular el $det(B)$ utilizando el procedimiento descrito al inicio de esta sección; así:

$$det\,(B) = 3\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$det\,(B) = (3)\,(4)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$det\,(B) = (3)\,(4)\,(-10)$$

$$det\,(B) = -120$$

El cálculo de los determinantes por el método de cofactores es muy laborioso para matrices de orden 4 o superior, por lo que se hace necesario emplear las propiedades de los determinantes, las cuales se describen a continuación.

1.	Si se intercambian dos de sus filas (o dos de sus columnas), el determinante cambia de signo.
2.	Si dos filas (o dos columnas) son iguales, entonces el determinante de A es igual a cero.
3.	Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) de A por un escalar k, el determinante se multiplica por dicho escalar.
4.	Si dos de sus filas (o dos de sus columnas) son proporcionales, entonces el determinante de A es igual a cero.
5.	Si todos los elementos de una fila o de una columna son iguales a cero, entonces el determinante de A es igual a cero.
6.	Si los elementos de una fila (o de una columna) de A se multiplican por un escalar k y se suman algebraicamente a los elementos correspondientes de otra fila (o columna), el determinante de A no se altera.

Respecto de las operaciones matriciales y siendo A y B matrices cuadradas de orden n x n, se cumple que:

$det\,(\lambda A) = \lambda^n\, det\,(A)$	Determinante del producto de un escalar por una matriz.
$det\,(AB) = det(A)\,det(B)$	Determinante del producto de matrices.
$det\,(A^T) = det(A)$	Determinante de la matriz transpuesta.
$det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$	Determinante de la inversa de una matriz.

Cuadro 5.6: Propiedades de los Determinantes.

Ejemplo 5.17 Aplicación de propiedades de los determinantes.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $\lambda = 4$, determine el valor del $det(\lambda A)$.

Solución:

De acuerdo a una de las propiedades de los determinantes, debe cumplirse que:

$det\ (\lambda A) = \lambda^n\ det\ (A)$.

Como en nuestro caso $n = 3$, tenemos:

$$det\ (4A) = (4)^3\ det\ (A)$$

$$= (64)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (64)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) - 3(4) + 4(-2)\right]$$

$$= (64)\left(\frac{2}{3} - 12 - 8\right)$$

$$= (64)\left(\frac{2}{3} - 20\right)$$

$$= (64)\left(-\frac{58}{3}\right)$$

$$det\ (4A) = -\frac{3712}{3}$$

Verificación:

Para comprobar el resultado anterior, obtenemos la matriz $4A$, así:

$$4A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 16 \\ -4 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 8 & -16 \end{pmatrix}$$

Luego hallamos el $det(4A)$, con lo que:

$$det\,(4A) = (2)\left(\frac{64}{3}\right) - (12)(64) + (16)(-32)$$

$$= \frac{128}{3} - 768 - 512$$

$$= \frac{128}{3} - 1280$$

$$= \frac{128 - 3840}{3}$$

$$det\,(4A) = -\frac{3712}{3}$$

Se puede verificar además que: $det\,(A + B) \neq det\,(A) + det\,(B)$.

Ejemplo 5.18 Demostración de propiedades de los determinantes.

Demuestre que $det\,(A + B) \neq det\,(A) + det\,(B)$.

Solución:

La demostración se basará en el método del contraejemplo, suponiendo que: $det\,(A + B) = det\,(A) + det\,(B)$. Para ello definiremos dos matrices A y B de orden 3 x 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Construimos $A + B$ aplicando la definición de suma entre matrices. Así obtenemos:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Luego calculamos el determinante:

$$det\,(A+B) = (1+\sqrt{2})\,(\sqrt{18}-\sqrt{6}-\sqrt{6}) - (\sqrt{2})(\sqrt{18}) + (1)(\sqrt{18})$$
$$= (1+\sqrt{2})\,(\sqrt{18}-2\sqrt{6}) - \sqrt{2}\sqrt{18} + \sqrt{18}$$
$$= \sqrt{18} + \sqrt{2}\,\sqrt{18} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{12} - \sqrt{2}\sqrt{18} + \sqrt{18}$$
$$= 2\sqrt{18} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{12}$$
$$= (2)(3)\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - (2)(2)\sqrt{3}$$
$$det\,(A+B) = 6\sqrt{2} - 2\,\sqrt{6} - 4\,\sqrt{3}$$

Si ahora evaluamos $det\,(A)$ y $det\,(B)$, tenemos:

$$det\,(A) = (1)\,(\sqrt{18}\,)$$
$$det\,(A) = \sqrt{18}$$

$$det\,(B) = (1)\,(\sqrt{18}\,)$$
$$det\,(B) = \sqrt{18}$$

De donde:

$$det\,(A) + det\,(B) = \sqrt{18} + \sqrt{18}$$
$$= 2\,\sqrt{18}$$
$$= (2)(3)\sqrt{2}$$
$$det\,(A) + det\,(B) = 6\,\sqrt{2}$$

Con lo que efectivamente, se ha encontrado un contraejemplo que verifique el hecho de que $det\,(A+B) \neq det\,(A) + det\,(B)$.

Ejemplo 5.19 Ecuaciones con determinantes.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el predicado $p(\lambda)$: $det\,(A - \lambda\, I) = 0$, determine A$p\,(\lambda)$.

Solución:

Construimos la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Luego calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} det\,(A-\lambda I) &= (1-\lambda)^2-4 \\ &= 1-2\lambda+\lambda^2-4 \\ det\,(A-\lambda I) &= \lambda^2-2\lambda-3 \end{aligned}$$

Igualando a cero este determinante, tenemos:

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$$(\lambda-3=0)\vee(\lambda+1=0)$$

Luego:

$$(\lambda=3)\vee(\lambda=-1)$$

Comprobando:

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, $\mathrm{A}p(\lambda)=\{-1, 3\}$.

Ejemplo 5.20 Aplicación de propiedades de los determinantes.

Sea $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, utilizando las propiedades de los determinantes, calcule: $\begin{vmatrix} c & 4a & 5b \\ f-2i & 4d-8g & 5e-10h \\ 2i & 8g & 10h \end{vmatrix}$.

Solución:

Para obtener la nueva matriz se realizaron cambios a la matriz original, de acuerdo a los pasos que detallamos a continuación:

1er paso: Intercambio de columnas 1 y 3:

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -3$$

2do paso: Intercambio de columnas 2 y 3:

$$\begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} = 3$$

3er paso: Multiplicación de fila 3 por el escalar $\lambda = 2$:

$$\begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ 2i & 2g & 2h \end{vmatrix} = 6$$

4to paso: Multiplicación de columna 2 por el escalar $\lambda = 4$:

$$\begin{vmatrix} c & 4a & b \\ f & 4d & e \\ 2i & 8g & 2h \end{vmatrix} = 24$$

5to paso: Multiplicación de fila 3 por el escalar $\lambda = -1$ y suma con fila 2:

$$\begin{vmatrix} c & 4a & b \\ f-2i & 4d-8g & e-2h \\ 2i & 8g & 2h \end{vmatrix} = 24$$

6to paso: Multiplicación de columna 3 por el escalar $\lambda = 5$:

$$\begin{vmatrix} c & 4a & 5b \\ f-2i & 4d-8g & 5e-10h \\ 2i & 8g & 10h \end{vmatrix} = 120$$

Ejemplo 5.21 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz real A, tal que $A = \begin{pmatrix} \sqrt{x+3} & 1 \\ 3 & \sqrt{x-5} \end{pmatrix}$, determine los valores reales de x, tales que la matriz A sea regular.

Solución:

Para que A sea regular, su determinante tiene que ser diferente de cero.

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} \sqrt{x+3} & 1 \\ 3 & \sqrt{x-5} \end{vmatrix}$$

$$= (\sqrt{x+3})(\sqrt{x-5}) - 3$$

$$det\,(A) = \sqrt{x^2 - 2x - 15} - 3$$

Pero, $det\ (A) \neq 0$, luego:

$\sqrt{x^2 - 2x - 15} - 3 \neq 0$

$\sqrt{x^2 - 2x - 15} \neq 3$

$x^2 - 2x - 15 \neq 9$

$x^2 - 2x - 24 \neq 0$

$(x - 6)\ (x + 4) \neq 0$

$(x - 6 \neq 0) \wedge (x + 4 \neq 0)$

$(x \neq 6) \wedge (x \neq - 4)$

También hay que considerar las restricciones para las expresiones con radicales:

$(x + 3 \geq 0) \wedge (x - 5 \geq 0)$

$(x \geq - 3\ ) \wedge (x \geq 5)$

Por lo tanto, para que A sea regular, los valores de x son: $(x \geq 5) \wedge (x \neq 6)$.

Ejemplo 5.22 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & -\frac{1}{2} \\ k & k & \frac{1}{2} \\ (8k)^{-1} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, $\neg(k = 0)$, determine el valor de k para que la matriz A sea singular.

Solución:

Para que la matriz A no sea inversible, necesitamos que $det(A)=0$, de aquí que empezaremos calculando este determinante, así:

$$det\ (A) = k\left(k - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,k - \frac{k}{8k}\right)$$

$$det\ (A) = k^2 - \frac{1}{4}\,k - \frac{1}{4}\,k + \frac{1}{16}$$

$$det\ (A) = k^2 - \frac{1}{2}\,k + \frac{1}{16}$$

Igualando a cero este valor, tenemos:

$$k^2 - \frac{1}{2}\,k + \frac{1}{16} = 0$$

De donde se obtiene:

$$\left(k-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

Luego:

$$k=\frac{1}{4}$$

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un sistema de ecuaciones lineales, identificar las incógnitas, coeficientes de las incógnitas, coeficientes independientes, empleando la notación adecuada.
* Dado un sistema de ecuaciones lineales, representarlo mediante operaciones entre matrices o mediante la matriz aumentada.
* Reconocer cuando un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente.
* Dado un sistema de ecuaciones lineales, reconocer si tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
* Dado un sistema de ecuaciones lineales, resolverlo mediante el método de Gauss, el método de la matriz inversa o la regla de Cramer.
* Expresar las infinitas soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en forma paramétrica e identificar sus grados de libertad.
* Dado un sistema de ecuaciones lineales con parámetros desconocidos, establecer condiciones sobre ellos de acuerdo al tipo de solución requerido.
* Dado un problema real asociado a un sistema de ecuaciones lineales, plantearlo, resolverlo e interpretar su solución.

Una recta en el plano real puede representarse algebraicamente por una ecuación de la forma:

$$a_1x+a_2y=b;\ a_1,\ a_2,\ b\in\mathbb{R}$$

Una ecuación de esta forma se denomina **ecuación lineal** en las variables x, y.

En general, la ecuación:

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \ = \ b \quad (*)$$

es una ecuación lineal en las variables $x_1,\cdots,x_n$.

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Una solución de la ecuación lineal $(*)$ es una colección ordenada de n números reales $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, tales que al sustituirlos en la ecuación: $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$, obtenemos una proposición verdadera. Por ejemplo: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$ es una solución de la ecuación lineal $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$, porque $2 - 4(1) + 7(1) = 5$ es una proposición verdadera.

Si se combinan varias ecuaciones de este tipo, relacionadas a una misma situación, la solución que se encuentra deberá satisfacer a todas las ecuaciones, en cuyo caso se requiere encontrarla con la ayuda de un método efectivo. Es así que surge la necesidad de estudiar los sistemas de ecuaciones lineales y sus diferentes métodos de solución.

Definición 5.9 (Sistemas de Ecuaciones Lineales)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es un conjunto de ecuaciones lineales que son verificadas simultáneamente, y puede escribirse de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (**)$$

Los elementos a_{ij} se denominan **coeficientes** del sistema. Las **incógnitas** del sistema son las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Los valores $b_1, b_2, \cdots, b_m$ son considerados **términos independientes**.

La i-ésima ecuación del sistema es :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Se puede abreviar el nombre sistema de ecuaciones lineales por S. E. L. y podemos representarlo por medio de una ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

A es la matriz de coeficientes, x es la matriz columna de incógnitas y b es la matriz columna de los términos independientes.

Representación de un sistema de ecuaciones lineales en forma de matriz aumentada

Las **matrices aumentadas** nos sirven para representar los S. E. L. en una forma abreviada. Estas matrices están formadas por la matriz de los coeficientes y la de los términos independientes del sistema, tal como se muestra a continuación.

Considere el S. E. L:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \\ -2x + y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

Su matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Definición 5.10 (S.E.L. Homogéneos)

Si en el S.E.L. se cumple que $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, se denomina S.E.L. homogéneo. Un sistema homogéneo se lo puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Definición 5.11 (Solución de un S.E.L.)

Una solución del sistema de ecuaciones lineales (**) es una sucesión ordenada de números reales $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, que tienen la propiedad que cada ecuación se convierte en una proposición verdadera al reemplazar $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ en el S.E.L.

Todos los S.E.L. homogéneos tienen al menos una solución: $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, la cual se denomina **solución trivial**. Una solución diferente a la trivial se denomina **no trivial**.

Se dice que dos S.E.L. son equivalentes, si y sólo si tienen las mismas soluciones.

Un S.E.L. que tenga solamente dos ecuaciones y dos incógnitas x, y, geométricamente representa un par de rectas en el plano real. Puesto que un punto $P(x, y)$ pertenece a la recta, si y sólo si los números x, y satisfacen su ecuación, las soluciones del sistema corresponderán a los puntos de intersección de las rectas, tal como se muestra a continuación.

$$\begin{cases} x - y = 1 & (a) \\ x + y = 1 & (b) \end{cases}$$

Algebraicamente se resuelve así:

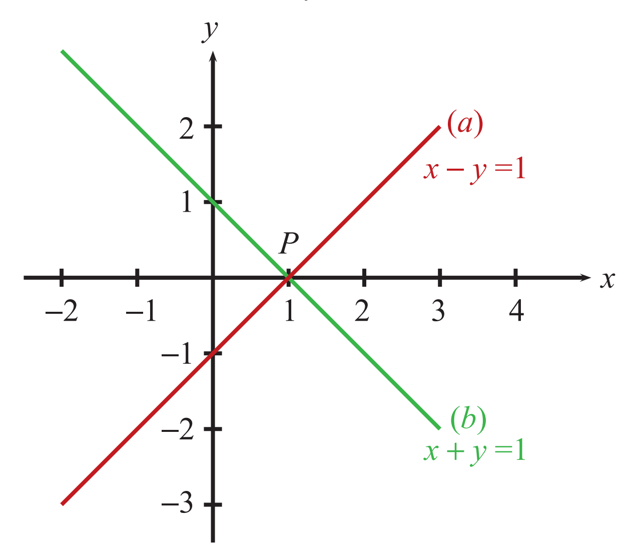
Sumando (a) y (b):

$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Reemplazando el valor encontrado en la ecuación (a):

$$1 - y = 1$$
$$y = 0$$

Gráficamente, ambas ecuaciones representan dos funciones lineales.



Puede observarse en la figura que el punto de intersección de ambas rectas es P $(1,0)$, el cual coincide con el resultado del análisis algebraico.

Para resolver un S.E.L., se deben considerar las siguientes características que puede presentar una matriz:

a) El primer número (desde la izquierda), en cualquier fila que no conste exclusivamente de ceros, es uno.

b) Si hay filas que constan exclusivamente de ceros, aparecen en la parte inferior de la matriz.

c) Si dos filas consecutivas no constan exclusivamente de ceros, entonces el primer uno de la fila inferior está a la derecha del primer uno de la fila superior.

d) Cualquier columna que contiene el primer uno de una fila tendrá ceros en las demás posiciones.

Si una matriz cumple con a), b) y c) se dice que está en **forma escalonada**, mientras que si cumple las cuatro características, se dice que está en **forma escalonada reducida**.

MÉTODOS DE GAUSS Y DE GAUSS-JORDAN

En general, existen dos métodos para resolver un S.E.L.:

- Si reducimos la matriz aumentada a la forma escalonada, resolvemos para la última incógnita y aplicamos sustitución regresiva para resolver las otras incógnitas, estamos aplicando el método de eliminación de Gauss.
- Si reducimos la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada reducida, estamos aplicando el método de Gauss-Jordan.

Al resolver un S.E.L. puede ocurrir que éste tenga al menos una solución o que la solución no exista. De aquí que es importante reconocer un S.E.L. de acuerdo al tipo de solución que posee. Esto se define a continuación.

Definición 5.12 (S.E.L. consistentes e inconsistentes)

Un S.E.L. que tiene solución se dice que es consistente, si y sólo si:

- Tiene solución única, o
- Tiene infinitas soluciones

Si el S.E.L. no tiene solución se dice que es inconsistente.

Para poder identificar el tipo de solución del S.E.L. aplicando el método de Gauss, se debe analizar regresivamente las últimas filas de la matriz aumentada, una vez reducida. En este análisis puede ocurrir que:

- Si la última ecuación tiene la forma $x_n = k$, $\forall k \in \mathbb{R}$, el S.E.L. tiene solución única.
- Si la última ecuación tiene la forma $0x_n = k$, donde k es un número real diferente de cero, el S.E.L. no tiene solución ya que la proposición dada es siempre falsa.
- Si la última ecuación tiene la forma $0x_n = 0$, el S.E.L. tiene infinitas soluciones y x_n es una variable libre, ya que esta última expresión es siempre una proposición verdadera para cualquier x_n real. Esto es válido, siempre y cuando no se presente alguna inconsistencia con las ecuaciones previas y el número de incógnitas sea mayor al número de ecuaciones.

Es importante anotar que todo S.E.L. puede definirse como un predicado de varias variables, y la solución como su conjunto de verdad.

Ejemplo 5.23 S.E.L. consistente con solución única.

Resolver:

$$p(x, y, z): \begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(-2)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ -3 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(3)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -4 & 7 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(4)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$$(0)x + (0)y + (1)z = 1$$
$$z = 1$$

Por sustitución regresiva, en la segunda fila:

$$
\begin{aligned}
(1)\,y + (-1)\,z &= -2\\
y - z &= -2\\
y &= z - 2\\
y &= 1 - 2\\
y &= -1
\end{aligned}
$$

Y en la primera fila:

$$
\begin{aligned}
(1)\,x + (-2)\,y + 3z &= 7\\
x - 2y + 3z &= 7\\
x &= 2y - 3z + 7\\
x &= 2(-1) - 3(1) + 7\\
x &= -2 - 3 + 7\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Comprobando para cada ecuación del S.E.L. original:

$$
\begin{aligned}
(2) - 2(-1) + 3(1) &= 2 + 2 + 3 &= 7\\
2(2) + (-1) + (1) &= 4 - 1 + 1 &= 4\\
-3(2) + 2(-1) - 2(1) &= -6 - 2 - 2 &= -10
\end{aligned}
$$

El conjunto de verdad del predicado $p(x, y, z)$ es:

$Ap(x, y, z) = \{(x, y, z) / (x = 2) \wedge (y = -1) \wedge (z = 1)\}$

$Ap(x, y, z) = \{(2, -1, 1)\}$

Ejemplo 5.24 S.E.L. consistente con infinitas soluciones.

Resolver:

$$
p(x, y, z) : \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}
$$

Solución:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right)
$$

$\xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(-3)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{f_2(-1)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$(0)x + (0)y + (0)z = 0$

$z = t;\ t \in \mathbb{R}$ (t es una variable libre)

Por sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} y - 4z &= -3 \\ y - 4t &= -3 \\ y &= -3 + 4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x &= 1 + y + z \\ x &= 5t - 2 \end{aligned}$$

El conjunto de verdad del predicado $p(x, y, z)$, es:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p(x, y, z) &= \{(x, y, z)/(x = 5t - 2) \wedge (y = 4t - 3) \wedge (z = t), \forall t \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{A}p(x, y, z) &= \{(5t - 2, 4t - 3, t) \ / \ \forall t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.25 S.E.L. consistente con infinitas soluciones.

Resolver:

$$p(x, y, z, w): \begin{cases} 2x + 6y - 4z + 2w = 4 \\ x - z + w = 5 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Solución:

Note que en este ejemplo, la cantidad de incógnitas (4) es mayor que la cantidad de ecuaciones (3).

La matriz aumentada es de dimensión 3x5, y llevándola a su forma escalonada tenemos:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{f_1(-1)+f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(3)+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 11 & -8 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -8 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2(-11)+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3\left(-\frac{3}{13}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{45}{13} \end{array}\right)$$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$$(1)z-\left(\frac{9}{13}\right)w=-\left(\frac{45}{13}\right)$$

Si hacemos:

$w=t;\ \ t\in\mathbb{R}$ (t es una variable libre)

Reemplazando en la última ecuación:

$$z=\frac{9}{13}w-\frac{45}{13}$$

$$z=\frac{9}{13}t-\frac{45}{13}$$

Por sustitución regresiva:

$$(1)\,y-\left(\frac{1}{3}\right)z=-1$$

$$y=\frac{1}{3}z-1$$

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{13}t-\frac{45}{13}\right)-1$$

$$y=\frac{3}{13}t-\frac{15}{13}-1$$

$$y=\frac{3}{13}t-\frac{28}{13}$$

$$x+3y-2z+w=2$$

$$x=-3y+2z-w+2$$

$$x=-3\left(\frac{3}{13}t-\frac{28}{13}\right)+2\left(\frac{9}{13}t-\frac{45}{13}\right)-t+2$$

$$x=-\frac{9}{13}t+\frac{84}{13}+\frac{18}{13}t-\frac{90}{13}-t+2$$

$$x=-\frac{4}{13}t+\frac{20}{13}$$

El conjunto de verdad del predicado $p(x, y, z, w)$, es:

$$\text{A}p(x,\ y,\ z,\ w) = \left\{(x,\ y,\ z,\ w)\ /\ \left(x = -\frac{4}{13}t + \frac{20}{13}\right) \wedge \left(y = \frac{3}{13}t - \frac{28}{13}\right) \wedge \left(z = \frac{9}{13}t - \frac{45}{13}\right) \wedge (w = t),\ \forall t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\text{A}p(x,\ y,\ z,\ w) = \left\{\left(-\frac{4}{13}t + \frac{20}{13},\ \frac{3}{13}t - \frac{28}{13},\ \frac{9}{13}t - \frac{45}{13},\ t\right) /\ \forall t \in \mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo 5.26 S.E.L. inconsistente.

Resolver:

$$p(x, y, z): \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(-2) + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-3) + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2(-5) + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$$(0)x + (0)y + (0)z = -3$$

La cual constituye una proposición falsa para cualquier valor de x, y, z real.

Por lo tanto:

$$\text{A}p\ (x, y, z) = \emptyset$$

Ejemplo 5.27 S.E.L. inconsistente.

Resolver:

$$p(x, y, z): \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 3 \\ -2x + y - z = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-4)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(2)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos notar que las filas 2 y 3 de la matriz tienen situaciones contradictorias.

$$(0z = 0) \wedge (0z = 1)$$

No existen valores de z que satisfagan ambas ecuaciones lineales, por lo tanto:

$$Ap\,(x, y, z) = \emptyset$$

Ejemplo 5.28 Sistema de ecuaciones lineales.

Dado el siguiente S.E.L.:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b, $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, para que el S.E.L.:

a) Tenga solución única.

b) Tenga infinita cantidad de soluciones.

c) No tenga solución.

Solución:

Debemos empezar expresando matricialmente el S.E.L. de acuerdo a la forma $Ax = b$, así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 9 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego construimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & b \\ 5 & -8 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

Utilizando el método de Gauss, llevamos la matriz de los coeficientes a su forma escalonada:

$$\xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 5 & -8 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-5)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{22}{3} & \frac{-5b+9}{3} \\ 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-2)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{22}{3} & \frac{-5b+9}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{3a-2}{3} & \frac{-3-2b}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(-\frac{3}{14}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{5b-9}{14} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{3a-2}{3} & \frac{-3-2b}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3\left(\frac{3}{7}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{5b-9}{14} \\ 0 & 1 & \frac{3a-2}{7} & \frac{-3-2b}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(-1)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{5b-9}{14} \\ 0 & 0 & \frac{3a+9}{7} & \frac{-9b+3}{14} \end{array}\right)$$

En esta última matriz, analizamos la última fila de la manera siguiente:

a) Para que el sistema tenga solución única debe cumplirse que:

$\left(\frac{3a+9}{7} \neq 0\right)$, es decir, $(a \neq -3)$.

b) Para que el sistema tenga infinito número de soluciones, debe cumplirse que:

$\left(\frac{3a+9}{7} = 0\right) \wedge \left(\frac{-9b+3}{14} = 0\right)$, es decir, $(a = -3) \wedge \left(b = \frac{1}{3}\right)$.

c) Para que el sistema no tenga solución deberá cumplirse que:

$\left(\frac{3a+9}{7} = 0\right) \wedge \left(\frac{-9b+3}{14} \neq 0\right)$, es decir, $(a = -3) \wedge \left(b \neq \frac{1}{3}\right)$.

Así como se ha utilizado el método de Gauss en varios ejemplos de este capítulo, también podemos utilizar el método de Gauss-Jordan para encontrar de manera directa las soluciones, sin aplicar sustitución regresiva.

Otra forma de resolver un S. E. L., es empleando la representación matricial, de la siguiente manera:

$Ax = b$	Representación matricial del S.E.L.
$A^{-1}Ax = A^{-1}b$	Multiplicación por izquierda de la inversa A^{-1}
$I\,x = A^{-1}b$	Propiedad de la inversa
$x = A^{-1}b$	Solución del S.E.L.

Esta última expresión nos sugiere que la matriz de las incógnitas x del S.E.L. puede ser determinada multiplicando la inversa de la matriz de los coeficientes A por la matriz de los términos independientes b. En este caso, si $det(A) \neq 0$ el sistema tiene solución única.

Por el contrario, si la matriz A no es inversible $(det\,(A) = 0)$, se puede concluir que el S.E.L. es inconsistente o tiene infinitas soluciones.

Adicional a estos dos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, existe la regla de Cramer que se aplica cuando la matriz A es inversible, tal como se explica a continuación.

Regla de Cramer

Para un S.E.L. de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya forma es:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

sus soluciones están dadas por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

siempre que: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Para un S.E.L. de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya forma es:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

sus soluciones están dadas por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Siempre que el determinante de la matriz de coeficientes que está presente en cada denominador sea diferente de cero.

Ejemplo 5.29 Aplicación de la regla de Cramer.

Resolver:

$$p(x, y, z): \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Solución:

La matriz aumentada del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3(12-2) -2(21-4) -1(-14+16)}{1(12-2) -2(-6+2) -1(4-8)} = -\frac{66}{22} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1(21-4) +3(-6+2) -1(8-14)}{22} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -7 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1(-16+14) -2(8-14) -3(4-8)}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

$$\mathrm{A}p(x, y, z) = \left\{\left(-3, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

En general, para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & . \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

con la regla de Cramer, la incógnita j puede obtenerse así:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Note que el arreglo del numerador es igual al del denominador, excepto por la columna j, cuyos coeficientes son reemplazados por los términos independientes del sistema.

Ejemplo 5.30 Planteo de un sistema de ecuaciones lineales.

En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas y las patas se obtiene 50 y 134, respectivamente. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Solución:

Sea g: cantidad de gallinas.

c: cantidad de conejos.

Con las condiciones anotadas y suponiendo que las gallinas y los conejos son normales, cada animal debe tener una cabeza; mientras que cada gallina debe tener 2 patas y cada conejo debe tener 4 patas.

Por lo tanto, se puede construir el S.E.L.:

$$\begin{cases} g + c = 50 & \text{(I)} \\ 2g + 4c = 134 & \text{(II)} \end{cases}$$

Si multiplicamos la ecuación (I) por el factor -2 y se la sumamos algebraicamente a la ecuación (II), se obtiene:

$2c = 34$

$c = 17$

Reemplazando el resultado en la ecuación (I):

$g = 50 - c$

$g = 50 - 17$

$g = 33$

Comprobando los valores: al tener 33 gallinas, quiere decir que hay 33 cabezas y 66 patas; al tener 17 conejos, quiere decir que hay 17 cabezas y 68 patas. Al sumar la cantidad de cabezas y la de patas, coincide con las condiciones anotadas.

Ejemplo 5.31 Planteo de un sistema de ecuaciones lineales.

Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido sulfúrico, H_2SO_4. Un recipiente contiene una solución concentrada de H_2SO_4 al 15%, el segundo tiene H_2SO_4 al 25% y el tercero H_2SO_4 al 50%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 40% de H_2SO_4?

Solución:

Sean x, y, z: cantidad de litros de las concentraciones de 15%, 25% y 50% de H_2SO_4 respectivamente, entonces lo que necesitamos para plantear nuestro sistema es que sean 100 litros en total y que la concentración de H_2SO_4 de cada solución sea el 40% de 100 litros, así:

H_2SO_4 al 15% + H_2SO_4 al 25% + H_2SO_4 al 50% = H_2SO_4 al 40%

$$x + y + z = 100$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0.15x + 0.25y + 0.50z = 0.40\,(100) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0.15x + 0.25y + 0.50z = 40 \end{cases}$$

Expresando el S.E.L. en forma matricial a través de su matriz aumentada, y llevándola a la forma escalonada, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.15 & 0.25 & 0.50 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(100)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 15 & 25 & 50 & 4000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-15)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 10 & 35 & 2500 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(-\frac{1}{10}\right)+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{25}{10} & -150 \\ 0 & 10 & 35 & 2500 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{10}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{25}{10} & -150 \\ 0 & 1 & \frac{35}{10} & 250 \end{array}\right)$$

De donde se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x - \frac{25}{10}z = -150 \\ y + \frac{35}{10}z = 250 \end{cases}$$

Lo cual nos lleva a un sistema con infinita cantidad de soluciones, sin embargo, debemos considerar que: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. El siguiente cuadro nos presenta 3 de estas infinitas posibilidades:

H_2SO_4			
15%	25%	50%	40%
0	40	60	100
10	26	64	100
20	12	68	100

A partir del estudio de sistemas de ecuaciones lineales podemos a manera de conclusión, referirnos a importantes consideraciones válidas para su resolución, tal como se resume a continuación:

Teorema resumen

Sea A una matriz de orden n x n. Entonces las cuatro afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ella implica las otras tres (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

a) A es inversible.

b) La única solución al sistema homogéneo $Ax = 0$ es la solución trivial ($x = 0$).

c) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_{nxn}; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_{nxn}.

d) $det\ (A) \neq 0$.

5.4 Sistemas de ecuaciones no lineales en el plano (S.E.N.L.)

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Resolver un sistema de ecuaciones no lineales empleando métodos de eliminación o sustitución.
* Inspeccionar gráficamente las soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas.
* Resolver un sistema de ecuaciones no lineales empleando cambios de variable adecuados para su linealización.

No existe un método específico para resolver un S.E.N.L. Sin embargo, considere lo siguiente:

- Si el sistema consta de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden hacer las gráficas de las ecuaciones en el plano cartesiano. Al hacer tal graficación, podemos tener una idea de la cantidad de soluciones del sistema y su ubicación en el plano. Tal como se dijo en la sección anterior, la solución a este tipo de sistemas estará conformada por aquellos puntos comunes a ambas gráficas.
- Al resolver analíticamente este tipo de sistemas, es necesario verificar la presencia de soluciones extrañas en el desarrollo algebraico.

Ejemplo 5.32 Sistema de ecuaciones no lineales.

Resolver:

$$p(x, y) : \begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Solución:

Algebraicamente:

1) $xy = 1$

$y = \dfrac{1}{x}$

2) $y = 2x + 1$

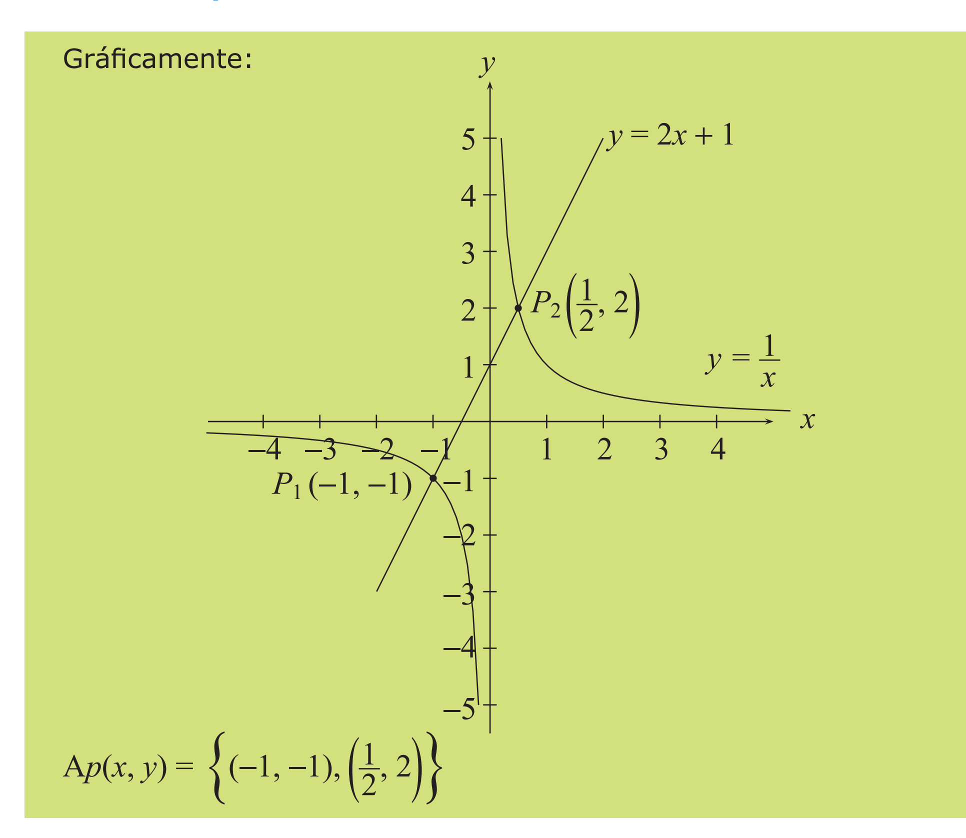
$\dfrac{1}{x} = 2x + 1$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \therefore \quad \begin{aligned} x_1 &= -1 \Leftrightarrow y_1 = -1 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_2 = 2 \end{aligned}$$

Gráficamente:



$Ap(x, y) = \left\{(-1, -1), \left(\frac{1}{2}, 2\right)\right\}$

Ejemplo 5.33 Sistema de ecuaciones no lineales.

Resolver:

$$p(x, y) : \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Solución:

Igualando ambas ecuaciones:

$$\sqrt{x} = 2 - x$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

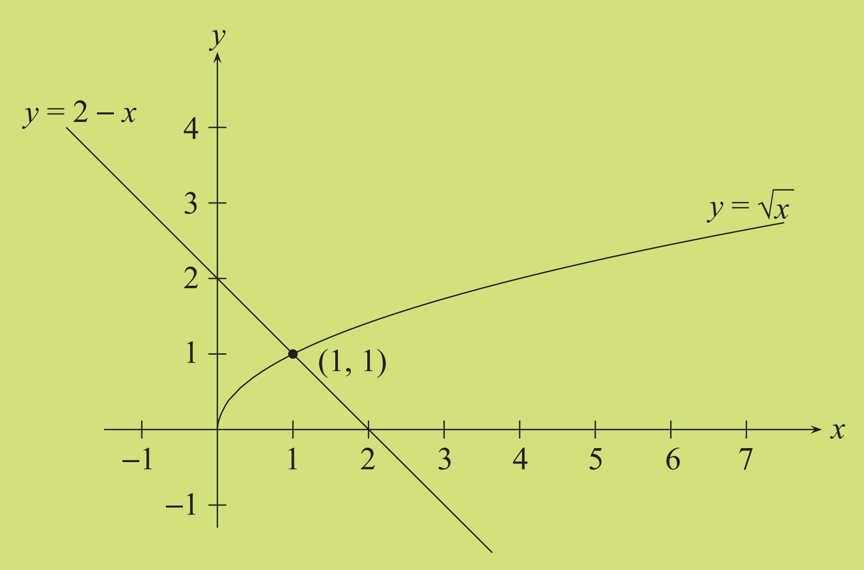
$$(x_1 = 1) \wedge (x_2 = 4)$$

Reemplazando:

$y_1 = 1 \quad \wedge \quad y_2 = -2$

Se puede notar que el par ordenado (x_2, y_2), es decir, $(4, -2)$, no es solución del S.E.N.L.

Haciendo la representación gráfica:



Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x, y) = \{(1, 1)\}$.

Ejemplo 5.34 Sistema de ecuaciones no lineales.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}^2$ y $p(x, y)$: $\begin{cases} log\,(3x + 5) - log\,(y) = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$, determine $\mathrm{A}p(x, y)$.

Solución:

De la primera ecuación y aplicando la definición de logaritmo de un cociente, tenemos:

$log\,(3x + 5) - log\,(y) = 1$

$log\left(\dfrac{3x + 5}{y}\right) = 1$

Luego, cambiando la expresión logarítmica a su exponencial equivalente:

$10 = \left(\dfrac{3x + 5}{y}\right)$

$3x + 5 = 10\,y$

$3x - 10\,y = -5$

Finalmente construimos un sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{cases} 3x - 10y = -5 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Si resolvemos el S.E.L. utilizando la regla de Cramer, se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{10 + 30}{-6 + 30} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{9 + 15}{-6 + 30} = \frac{24}{24} = 1$$

Comprobando:

$$p\left(\frac{5}{3}, 1\right) \quad : \quad \begin{cases} log\left[3\left(\frac{5}{3}\right) + 5\right] - log\,(1) = 1 \\ 3\left(\frac{5}{3}\right) - 2\,(1) = 3 \end{cases}$$

$$p\left(\frac{5}{3}, 1\right) \quad : \quad \begin{cases} log\,(10) - log\,(1) = 1 \\ 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad p\left(\frac{5}{3}, 1\right) \equiv 1$$

Por lo tanto, $\mathrm{A}p(x, y) = \left\{\left(\frac{5}{3}, 1\right)\right\}$.

Ejemplo 5.35 Aplicación de sistema de ecuaciones no lineales.

Dada la matriz $\begin{pmatrix} a & 3 \\ -5 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y el predicado $p(a, b)$: es una matriz involutiva, determine $\mathrm{A}p(a, b)$:

Solución:

Si A es una matriz involutiva, debe cumplirse que $A^2 = I_{2x2}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -5 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ -5 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-15 & 3a+3b \\ -5a-5b & -15+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde, aplicando la igualdad entre matrices, se construye el siguiente S.E.N.L.:

$$\begin{cases} a^2 - 15 = 1 \\ b^2 - 15 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 4 \end{cases}$$

Por otra parte, se cumple también que:

$$\begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ -5a - 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = -3b \\ -5a = 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -b \end{cases}$$

Por lo tanto, los pares ordenados que satisfacen el predicado son $(4, -4)$ y $(-4, 4)$.

Comprobando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, se conluye que $\mathrm{A}p(a, b) = \{(4, -4), (-4, 4)\}$.

5.5 Sistema de inecuaciones lineales en el plano (S.I.L.)

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, resolverlo gráficamente empleando las reglas de sombreado y de frontera.
* Identificar la solución no vacía de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, como una región acotada o no acotada.
* Plantear y resolver gráficamente problemas de programación lineal con dos variables.

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Numerosos problemas en economía y la industria se plantean con el fin de tomar decisiones para minimizar gastos o maximizar beneficios, siempre sujetos a restricciones de distinta naturaleza, como son: capacidad de producción, stocks en el almacén, demanda del mercado, etc.

Alrededor de estos temas, una idea fundamental es la inecuación lineal. Una inecuación lineal divide al plano en dos regiones, una donde se satisface la desigualdad y la otra donde no se satisface. La parte correspondiente a la igualdad constituye la frontera entre las regiones.

Todos los puntos de una región que satisfacen simultáneamente las inecuaciones presentes en el sistema, conforman lo que se conoce como **conjunto factible**.

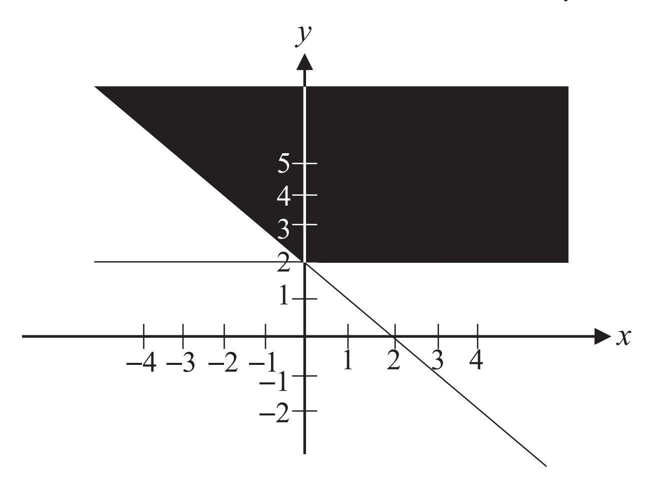
La solución de este tipo de sistemas, para órdenes bajos, es completamente gráfica, y los pasos a seguir son:

- Reemplazar el símbolo de desigualdad por el de igualdad y hacer la gráfica de la ecuación resultante. Si la desigualdad no incluye la frontera, se utiliza una línea segmentada, en caso contrario, se utiliza una línea continua.
- En cada uno de los semiespacios, elija un punto de prueba P. Si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad, entonces los demás puntos también la satisfacen. Esto se especifica sombreando dicha región.

Otra forma de encontrar la región que representa al sistema de inecuaciones lineales, es:

- Expresar la variable y (o la variable x) en forma explícita.
- Luego se grafica la frontera cambiando la desigualdad por una igualdad.
- Se sombrea según indica la desigualdad, siguiendo las reglas:
    - $y > f(x)$ Sombrear hacia arriba de la frontera.
    - $y < f(x)$ Sombrear hacia abajo de la frontera.
    - $x > g(y)$ Sombrear hacia la derecha de la frontera.
    - $x < g(y)$ Sombrear hacia la izquierda de la frontera.
- Si la desigualdad contiene la igualdad, la frontera se incluye en la solución.
- Identifique la intersección de las regiones sombreadas, la cual representa la solución del sistema.

Es importante recordar que las rectas de la forma $x = k$ o $y = k$ son rectas verticales u horizontales, respectivamente. Así tenemos que los límites de una región de inecuaciones puede incluir expresiones como $y > k$, $y < k$, $x > k$ y $x < k$. En la siguiente figura se muestra la solución de $y \geq 2$ y $x + y \geq 2$.



Ejemplo 5.36 Sistema de inecuaciones lineales.

Resolver:

$$p(x, y): \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$$

Solución:

$y = \dfrac{6 - 2x}{3}$

$Ap(x, y)$

$y = 4 - x$

Note que: $P_1(1, 2) \in Ap(x, y)$

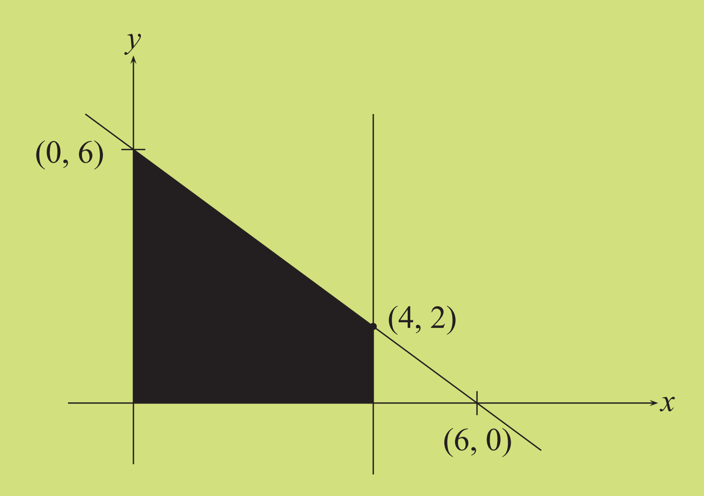
$P_2(1, 1) \notin Ap(x, y)$

$P_3(3, 1) \in Ap(x, y)$

$P_4(4, 2) \notin Ap(x, y)$

Ejemplo 5.37 Sistema de inecuaciones lineales.

Dada la región sombreada, la cual representa el conjunto factible de un S.I.L., determine el sistema de desigualdades.



Solución:

La región sombreada se encuentra en el I cuadrante, entonces debe cumplirse que $x \geq 0$, $y \geq 0$.

La recta vertical $x = 4$ sugiere que la región que está a la izquierda de ella es parte del conjunto factible, se deduce entonces que $x \leq 4$.

La función lineal $y = 6 - x$ es la última referencia y está sombreada la parte inferior a su frontera, esto es, $y \leq 6 - x$.

El S.I.L. puede ser representado por:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$

Programación lineal

Desde el punto de vista histórico, la programación lineal surgió como una técnica para resolver problemas relacionados con la distribución de artículos y materiales para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, durante la Segunda Guerra Mundial.

En la actualidad es utilizada para la optimización de la distribución de los vuelos de las líneas aéreas y el establecimiento de redes telefónicas. Aunque los problemas prácticos contienen cientos de desigualdades lineales con otros cientos de incógnitas, en esta sección limitaremos nuestro estudio a sólo dos variables para resolverlo gráficamente.

Ejemplo 5.38 Programación lineal.

El Gerente de Producción de una empresa se dispone a construir al menos 5 muestras de un tipo de mesas auxiliares, para luego probarlas y venderlas. El costo de cada mesa construida en madera es de $\$18.00$, y el de cada mesa construida en plástico es de $\$9.00$. Se desean por lo menos 2 mesas de cada tipo, debiéndolas entregar dentro de las próximas 48 horas. Cada mesa construida en madera tarda 6 horas en producirse y una plástica tarda 3 horas. En base a esta información, grafique la región que represente el conjunto factible y evalúe la función objetivo en sus extremos, analizando los resultados.

Solución:

Para esta situación, vamos a considerar:

x : cantidad de mesas de madera.

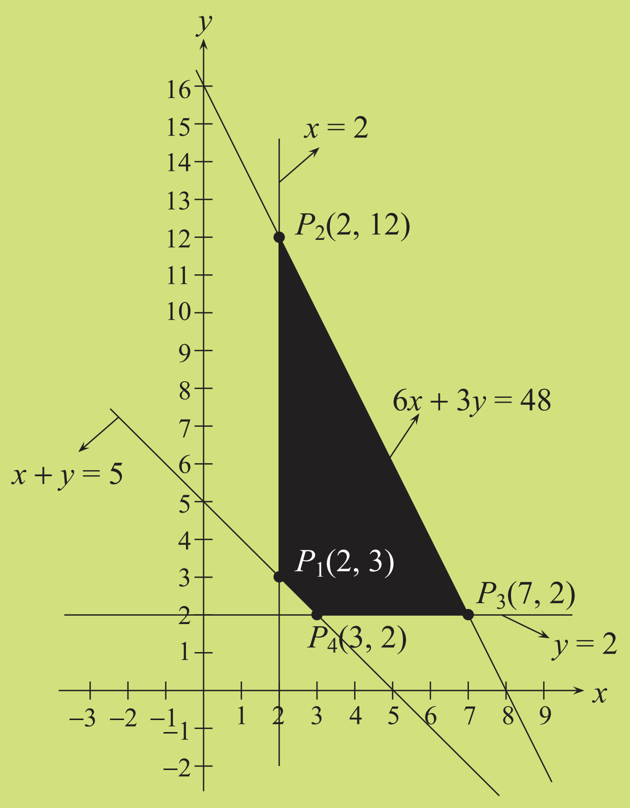
y : cantidad de mesas de plástico.

La función que se desea minimizar, también llamada función objetivo es $C = 18x + 9y$, cuyo valor estará expresado en dólares.

Esta función está condicionada a un conjunto de restricciones, que se pueden representar en un S.I.L., tal como se ilustra:

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 6x + 3y \leq 48 \\ x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

La representación gráfica del conjunto factible se muestra a continuación:



Los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4, representan posibles valores extremos de la función objetivo. Evaluando cada uno tenemos:

Límite	Valor de la función objetivo
$P_1(2, 3)$	$C = (18)(2) + (9)(3) = 63$
$P_2(2, 12)$	$C = (18)(2) + (9)(12) = 144$
$P_3(7, 2)$	$C = (18)(7) + (9)(2) = 144$
$P_4(3, 2)$	$C = (18)(3) + (9)(2) = 72$

Por tanto, al construir 2 muestras de mesas de madera y 3 muestras de mesas plásticas, se generará un costo mínimo de $63.00 para estos puntos extremos.

De acuerdo a la tabla, también se puede notar que construir 2 mesas de madera y 12 mesas plásticas genera el mismo costo que construir 7 mesas de madera y 2 mesas plásticas.

Ejemplo 5.39 Programación Lineal.

Una compañía decide comercializar dos tipos de azúcar: una mezcla de menor calidad con $\frac{1}{4}$ libra de azúcar blanca y $\frac{3}{4}$ libra de azúcar morena; y otra mezcla de mayor calidad con $\frac{1}{2}$ libra de azúcar blanca y $\frac{1}{2}$ de azúcar morena, obteniendo así una ganancia de $\$0.60$ por cada paquete de la mezcla de menor calidad y una ganancia de $\$0.80$ por cada paquete de mezcla de mayor calidad. Si se cuenta con 180 libras de azúcar morena y 160 libras de azúcar blanca, grafique la región del plano que represente el conjunto factible y evalúe la función objetivo en sus extremos. Analice los resultados.

Solución:

Consideremos:

x : cantidad de libras de la mezcla de menor calidad.

y : cantidad de libras de la mezcla de mayor calidad.

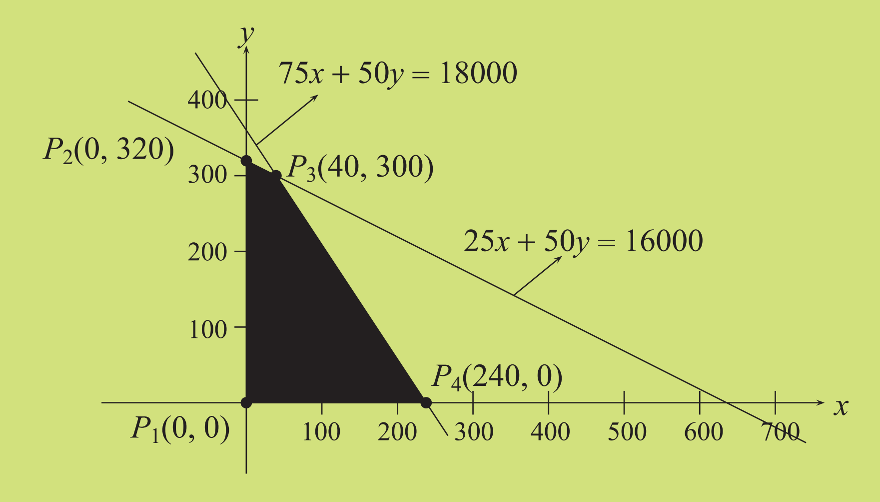
Si G representa la ganancia, es decir la función objetivo, tenemos:

$G = 0.60x + 0.80y$.

La función G está restringida por una serie de consideraciones, las mismas que se resumen en el siguiente S.I.L.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0.25x + 0.50y \leq 160 \\ 0.75x + 0.50y \leq 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 25x + 50y \leq 16000 \\ 75x + 50y \leq 18000 \end{cases}$$

La representación gráfica del conjunto factible se muestra a continuación:



A continuación se presentan los valores de la función objetivo en los puntos extremos P_1, P_2, P_3 y P_4.

Límite	Valor de la función objetivo
$P_1(0, 0)$	$G = (0.60)(0) + (0.80)(0) = 0$
$P_2(0, 320)$	$G = (0.60)(0) + (0.80)(320) = 256$
$P_3(40, 300)$	$G = (0.60)(40) + (0.80)(300) = 264$
$P_4(240, 0)$	$G = (0.60)(240) + (0.80)(0) = 144$

Con lo que se concluye que cuando la compañía prepare 40 paquetes de la mezcla de menor calidad y 300 paquetes de la mezcla de mayor calidad de azúcar, obtendrá la mayor ganancia.

5.6 Sistemas de inecuaciones no lineales (S.I.N.L.)

Tal como analizamos en la sección precedente, para resolver este tipo de sistemas se considerará nuevamente la representación gráfica. La única diferencia es que las nuevas inecuaciones contienen expresiones con radicales, que incluyen valor absoluto, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, con funciones especiales, etc.

Para encontrar la región en el plano que represente la solución de todas las inecuaciones no lineales, se pueden aplicar las mismas reglas dadas para los sistemas de inecuaciones lineales, con la diferencia de que en estos problemas las fronteras pueden ser curvas o rectas.

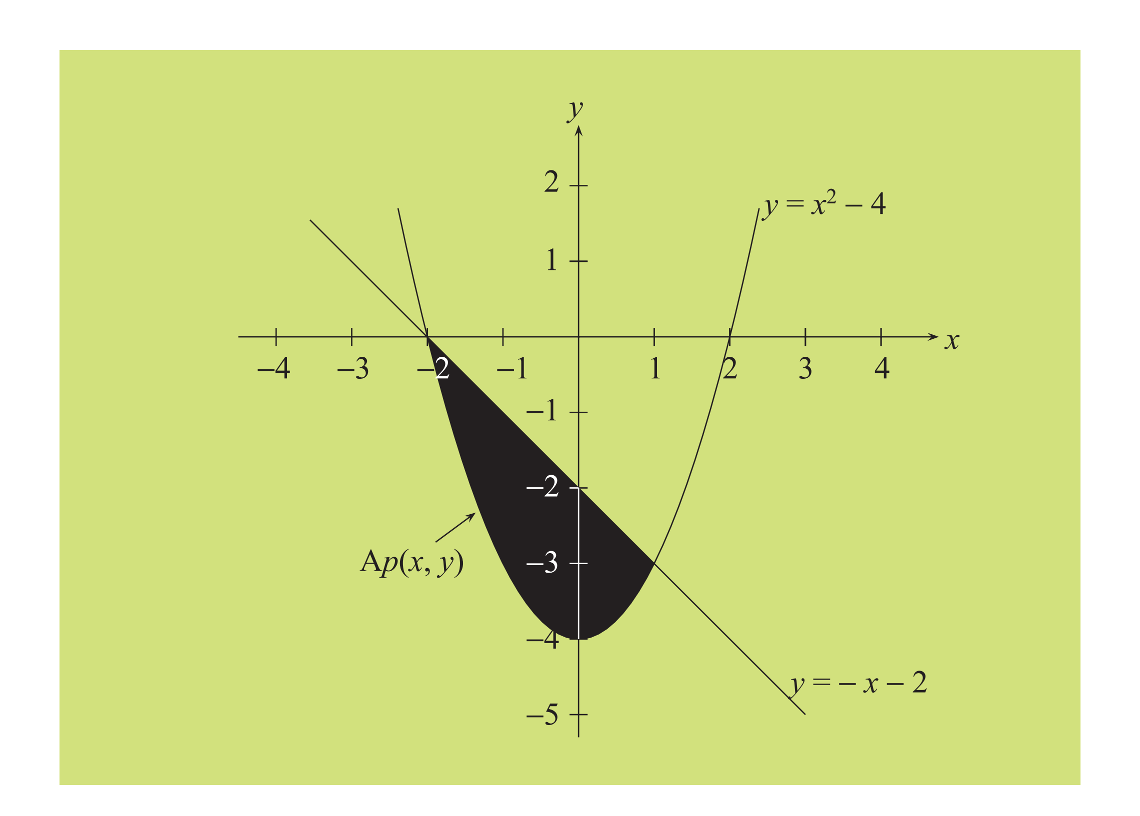
Ejemplo 5.40 Sistema de inecuaciones no lineales.

Resolver:

$$p(x, y) : \begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y \leq -x - 2 \end{cases}$$

Solución:

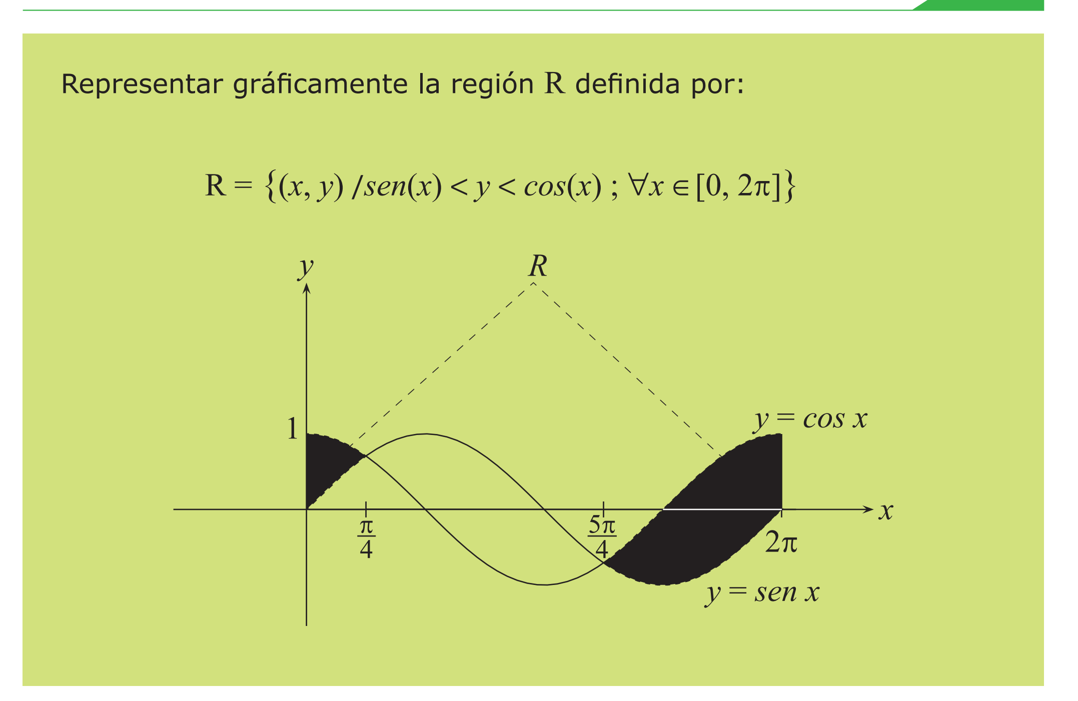
La representación gráfica de $\mathrm{A}p(x, y)$ es:



Ejemplo 5.41 Sistema de inecuaciones no lineales.

Representar gráficamente la región R definida por:

$$R = \{(x, y) / sen(x) < y < cos(x) \ ; \ \forall x \in [0, 2\pi]\}$$



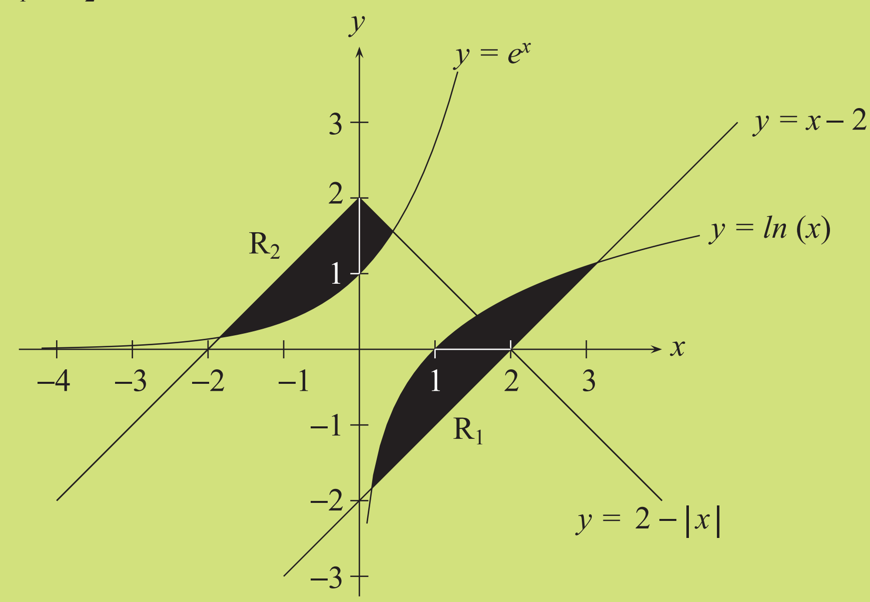
Ejemplo 5.42 Sistema de inecuaciones no lineales.

Representar gráficamente la región R definida por:

$R_1 = \{(x, y) \,/\, x - 2 \leq y \leq ln(x)\}$

$R_2 = \{(x, y) \,/\, e^x \leq y \leq 2 - |x|\}$

$R = R_1 \cup R_2$

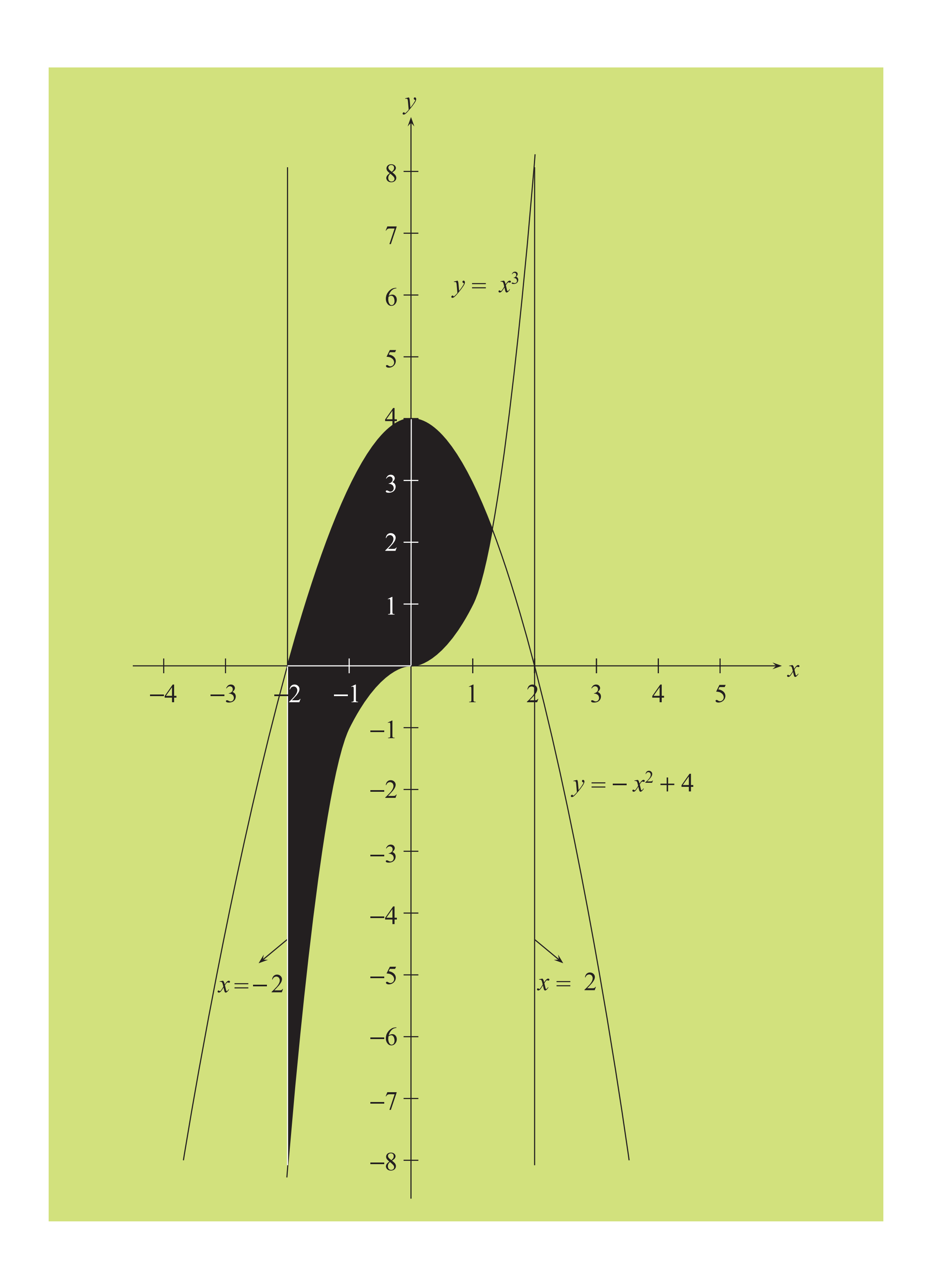


Ejemplo 5.43 Sistema de inecuaciones no lineales.

Sea $Re = \mathbb{R}^2$ y $p(x, y): \begin{cases} |x| \leq 2 \\ y \geq x^3 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$, determine gráficamente $Ap(x, y)$.

Solución:

La representación gráfica de $Ap(x, y)$ es:



y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
y = x^3
y = − x^2 + 4
x = − 2
x = 2

5.1 Matrices y operaciones

1. Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

a) Verdadero   b) Falso

2. Dada la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 7 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, hallar X.

3. a) Determine la matriz $A_{2x2} = (a_{ij})$, para la cual $a_{ij} = i + j - 2$.

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Es B una matriz diagonal?

c) Sea $C = A + B$. ¿Es C una matriz identidad?

d) Sea la matriz $D_{3x2} = (d_{ij})$, para la cual $d_{ij} = 2i + 3j - 4$, encuentre:

(i) DA
(ii) DB
(iii) DC

4. Determine la matriz $A_{3x4} = (a_{ij})$, para la cual: $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; \ i \neq j \\ 0 & ; \ i = j \end{cases}$.

5. Sea $f(x, y) = x + y$; $x, y \in M_{3x3}$. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, determine:

a) $f(A, A^T)$ b) $f(A^T, A^{-1})$ c) $f(A^{-1}, AA^{-1})$ d) $f(A^{-1}, A^{-1}A^T)$

6. Considere las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} n & 3 \\ 3 & -n \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz $B - 2C$.
b) Si $F^2 = 9I$, donde I es la matriz identidad de 2 x 2, demostrar que $n=0$.
c) Hallar BC^T.
d) Hallar C^TB.

7. Encuentre la matriz "X" en las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

d) $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^3 - 3B^2 + 10I$.

b) Verifique que $(AB)^T = B^T A^T$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, verifique que $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

9. Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si y solo si $A^{-1} = A^T$.

Sea $A = \begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sen(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{pmatrix}$. Demuestre que A es ortogonal.

10. Las matrices A, B y X están dadas por:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donde a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$.

Suponiendo que: $AX + X = B$, encuentre los valores de a, b, c y d.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que:

Si $AB = AC$, no necesariamente $B = C$.

12. Sea $M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es elemento de los números enteros.

(i) Exprese M^2 en función de a.

(ii) Si M^2 es igual a $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, encontrar el valor de a.

13. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; $B=(5 \quad 1 \quad 0 \quad -3)$; $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}10 & 15 & -5\\ 11 & 10 & 10\end{pmatrix}$. Halle:

a) AD b) A^TC^T c) CD d) C^TB^T

14. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, compruebe que $(BA)^T=A^TB^T$.

15. Encontrar todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa.

16. Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2=2A+I$, donde I es la matriz identidad. Demuestre que A tiene inversa y obtenerla en función de A.

17. Dada la matriz $B=\begin{pmatrix}1+m & 0\\ 0 & 1-m\end{pmatrix}$, encuentre los valores de m, tales que $B^2=2B+I$, y para estos valores halle la inversa de B.

18. Se dice que dos matrices cuadradas A y B de orden n x n son semejantes, si existe una matriz inversible P, tal que $B=P^{-1}AP$. Determine si son semejante las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

5.2 Determinantes

19. Hallar los valores de x elemento de los reales para que la matriz A sea singular.

$$A=\begin{pmatrix}2 & |x-2|\\ 1 & |x|\end{pmatrix}$$

20. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 4 & -8 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 1 & -4 & 8\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$

Determinar:

a) A^{-1}
b) AB^{-1}
c) $det\,(AB-2C^T)$
d) $det\,(A)+det\,(B)-det\,(C)$
e) $B^{-1}C^{-1}$

21. Determinar el valor de k para que la matriz AB sea triangular superior, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ k & -k & 3 \\ -\frac{k^2}{2} & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 1 \\ -k & -\frac{k^3}{3} & k^5 \\ -1 & -2k & 3 \end{pmatrix}$$

22. Para las siguientes matrices, considere $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$.

a) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & e^x & 0 \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} sen(x) & cos(x) \\ -cos(x) & sen(x) \end{pmatrix}$

Encuentre los valores de x, tales que las matrices dadas no sean inversibles.

23. Para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el determinante de A y B.
b) Hallar AB y BA. ¿Son iguales? Que podría decir acerca de AB.
c) Hallar CD y DC. ¿Son iguales? Notar que C y D no son nulas.

24) Si $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine $a + b + c$.

25. Sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la suma de los valores de λ para los cuales $(A - \lambda I)$ es una matriz singular, es:

a) 6 b) 1 c) 7 d) 5 e) −5

26. El valor de: $\begin{vmatrix} log_2(8) & log_2(4) & -1 \\ log_3(81) & 3 & -1 \\ log_2\left(\frac{1}{2}\right) & 2 & -4 \end{vmatrix}$ es:

a) 2 b) −1 c) 1 d) −2 e) −7

27. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$. Sabiendo que $XA + B = C$, el $det(X)$ es:

a) 14 b) -14 c) 19 d) -10 e) 0

28. Si $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8x & 2 \\ -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$, entonces la suma de los elementos de $\text{A}p(x)$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{2}{3}$

29. Dadas las matrices A y B, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} sen\left(\frac{\pi}{2}\right) & sec\left(\frac{\pi}{3}\right) & sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ cos\,(2\pi) & sen\,(\pi) & cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -\,cos\,(\pi) & sen\,(2\pi) & cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} log\,(1) & log_2\left(\frac{1}{4}\right) & 0 \\ log_2\left(\frac{1}{4}\right) & log_3\,(9) & 0 \\ log_3\,(9) & ln(e) & ln(e) \end{pmatrix}.$$

El $det\left(A^T + \frac{1}{2}B\right)$ es:

a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2

30. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2m \end{pmatrix}$, tal que $det(A) = 10$, es verdad que:

a) $det\,(B) = -5$

b) $det\,(B) = -20$

c) $det\,(A)\; det\,(B) = 25$

d) $\dfrac{det(A)}{det(B)} = \dfrac{1}{2}$

31. Si el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ es n, encuentre el determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix};\qquad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

32. Sea $x \in \mathbb{R}$, encuentre $\mathrm{A}p(x)$ si $p(x)$: $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$.

33. Considere la función: $f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

Sabiendo que: $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determine a y b.

34. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:

a) $\forall a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$; $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$

c) $\forall a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$; $\begin{vmatrix} k^2a & kb \\ k^2c & kd \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

d) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

e) $\forall a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$; $\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

35. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentre:

a) $det(A)$
b) $det(B)$
c) AB
d) BA
e) Verificar que $det(AB) = det(A)\ det(B)$; $det(BA) = det(B)\ det(A)$.

36. Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $det(A) = 1$, para $A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ 1 & cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

37. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

38. Usando las propiedades de los determinantes, demuestre las igualdades siguientes, si se tiene que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 6$ b) $\begin{vmatrix} c & b & -a \\ f & e & -d \\ i & h & -g \end{vmatrix} = 3$ c) $\begin{vmatrix} a-4c & b & c \\ d-4f & e & f \\ g-4i & h & i \end{vmatrix} = 3$

39. El valor del determinante $\begin{vmatrix} sen\,(x) & cos\,(x) & sen\,(x) \\ cos\,(x) - sen\,(x) & -\,sen\,(x) & cos\,(x) \\ 1 + cos\,(x) + sen\,(x) & cos\,(x) & sen\,(x) \end{vmatrix}$ es:

a) 1
b) -1
c) $1 + cos(x)$
d) $sen^2\,(x) + sen\,(x) + cos\,(x)$
e) $cos^2\,(x) - sen\,(x)$

40. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & sen\,(a) & cos\,(a) \\ 1 & sen\,(b) & cos\,(b) \\ 1 & sen\,(c) & cos\,(c) \end{vmatrix} = sen\,(b-c) + sen\,(c-a) + sen\,(a-b)$.

41. Factorizar las siguientes expresiones de x:

a) $\begin{vmatrix} x+4 & x+14 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ x+1 & x & 2 \\ x+2 & x+1 & x-1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ x & -4 & 4 \\ 3 & x & 6 \end{vmatrix}$

42. Hallar $Ap(x)$. Considere $Re = [0, \pi]$ y el predicado:

$$p(x): \begin{vmatrix} 2\,sen^2(2x) & 2\,cos\,(x) \\ 3\,sen\,(x) & 1 \end{vmatrix} = -1$$

43. Demostrar: $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (y-z)\,(x-y)\,(x-z)$.

44. Si se conoce que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, encuentre el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 3+2y \\ 1+x & 1+y & z+1 \end{vmatrix}$.

45. Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5$, hallar el valor de $\begin{vmatrix} -a_{31} & -2a_{32} & -a_{33} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$.

46. El determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_2 \\ c_1 & d_1+d_2 \end{vmatrix}$ es equivalente a:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} c_1 & d_1+d_2 \\ a_1 & b_1+b_2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_1+b_2 \\ 1 & c_1+d_1+d_2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

47. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+z = k \\ 2x+y+4z = 6 \\ x-4y+5z = 9 \end{cases}$$ donde k es una constante real.

a) Demuestre que el sistema no tiene solución única.

b) Halle el valor de k para que el sistema sea consistente.

c) Halle la solución general del sistema para el valor de k obtenido.

48. Considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la inversa de A.
b) Calcule la inversa de A^T y la de A^{-1}.
c) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

49. Encuentre dos matrices, A y B, de orden 3×3 con coeficientes reales, tales que satisfagan las dos igualdades siguientes:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

50. Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores de α y β, sabiendo que el par ordenado $P(2, -1)$ satisface la primera ecuación y el par ordenado $Q(2, 0)$ satisface la segunda.

b) Si sustituimos estos valores de α y β calculados, ¿el sistema tiene solución única? ¿Por qué?

51. Considere la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & t \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar los valores de t para que esta matriz no sea inversible.

b) Calcule su inversa para el valor o valores de t, tales que el determinante de la matriz es 1.

52. Considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Tomando $\lambda = 1$, resuelva el siguiente sistema escrito en forma matricial:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

53. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}; \quad X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$$

54. Dado el sistema: $\begin{cases} x - 3z = 1 \\ 2x - 6z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$, entonces es verdad que:

a) El sistema es consistente.

b) El sistema tiene solución única.

c) El sistema tiene infinitas soluciones.

d) No se puede evaluar el determinante del sistema.

e) El determinante del sistema es igual a cero.

55. Calcule a y b para que los siguientes sistemas sean consistentes.

a) $\begin{cases} x + ay + z = -1 \\ y + 2z = 1 \\ x + y - z = -a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - ay + bz = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ ax - by - z = 0 \end{cases}$

56. ¿Para qué valores de m es consistente el siguiente sistema?

$$\begin{cases} (m+2)x + y + 2z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

57. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - my = m^2 n \\ \dfrac{x}{m} + y = 2mn \end{cases}$, $m, n \in \mathbb{R}$; $m \neq 0$ entonces es verdad que:

a) El sistema no tiene solución.

b) El sistema tiene infinitas soluciones.

c) El sistema tiene solución única.

d) El valor de x e y son iguales.

e) Sólo tiene solución trivial.

58. Encontrar el valor, o los valores, del parámetro α que hace que el sistema $\begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea inconsistente.

59. Supongamos que la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$ es inversible.

Demostrar que la solución del sistema: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verifica que $x_3 = 0$.

60. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre los valores de λ y t para que $A = B$.

61. Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

62. Encuentre el valor de a para que el siguiente sistema no tenga solución.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)\, z = a + 1 \end{cases}$$

63. Si se conoce que $(1, 1, 1, 1, 1)$ y $(3, 3, 3, 3, 3)$ son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y 5 incógnitas, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) El sistema debe ser homogéneo.

b) $(2, 2, 2, 2, 2)$ también es una solución del sistema.

c) m debe ser igual a 5.

d) La información dada es insuficiente para encontrar más soluciones.

e) No existe un sistema de ecuaciones lineales que satisfaga las condiciones dadas.

64. Respecto al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}$$, es falso que:

a) El sistema siempre tiene solución.

b) El valor de a para que el sistema tenga sólo solución trivial debe ser diferente de -2.

c) Para que el sistema tenga solución, a debe ser diferente de -3.

d) Si $a = -2$, el sistema tiene infinitas soluciones.

e) El sistema dado es inconsistente.

65. Para qué valores de "m" es consistente el sistema:

a) $\begin{cases} (m-2)x + y + 2z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -mx + y - z = 1 \\ 2mx + y - z = 0 \\ -my + z = 2m \\ mx = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (m-1)x - 2y = 2 \\ -x + y + mz = 0 \\ -y + 2z = m \end{cases}$

5.4 Sistemas de ecuaciones no lineales

66. Hallar la solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 3^{y-x} = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{y-x} = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 20 \\ 2^{x+y} = 64 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{2x+1} - 3^{2y} = 23 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^x\, 9^y = 3^8 \\ 2^{x-1}\, 2^{y+1} = 2^6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 110 \\ log(x) + log(y) = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} log_2(x-y) = 2 \\ log_2(x) - log_2(y) = 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} log(x) + log(y) = 4 \\ y - 4x = 0 \end{cases}$

67. Resolver los siguientes sistemas. Considere $x, y \in (0,2\pi)$.

a) $\begin{cases} sen(x) + sen(y) = 1 \\ cos(x-y) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} cos(x)\, tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sen(x+y) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} sen(x)\, sen(y) = \frac{1}{4} \\ cos(x)\, cos(y) = \frac{3}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ sen(x) + sen(y) = \frac{2}{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} sen(x)\, sen(y) = cos(x)\, cos(y) \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ f) $\begin{cases} sen(x) + cos(y) = \frac{1}{2} \\ sen(x) + sen(y) = \frac{3}{2} \end{cases}$

68. La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, donde p es el precio y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$, el punto de intersección de la demanda y oferta se lo conoce como punto de equilibrio, entonces el precio de equilibrio es:

a) 5 b) 12 c) 22 d) 19 e) 17

69. Un hombre y su hijo trabajando juntos pueden hacer una obra en 12 días. Trabajando separadamente el hijo tardaría 7 días más que el padre en hacer él solo la obra, ¿cuánto tiempo tardará cada uno trabajando por su cuenta?

70. Dos resistencias conectadas en serie dan una resistencia total de 25 ohmios (Ω) y conectadas en paralelo dan una resistencia equivalente de $6\ \Omega$. ¿Cuántos ohmios tiene cada resistencia separadamente? [Si r_1 y r_2 son los ohmios que tiene cada resistencia, R es la resistencia total cuando se conectan en serie y r la resistencia equivalente cuando se conectan en paralelo, se sabe que $r_1 + r_2 = R$ y que $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$].

71. Hallar la solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 15 \\ x^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 3xy = -8 \\ xy + y^2 = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$

5.5 Sistemas de inecuaciones lineales

72. Para el siguiente sistema de desigualdades:

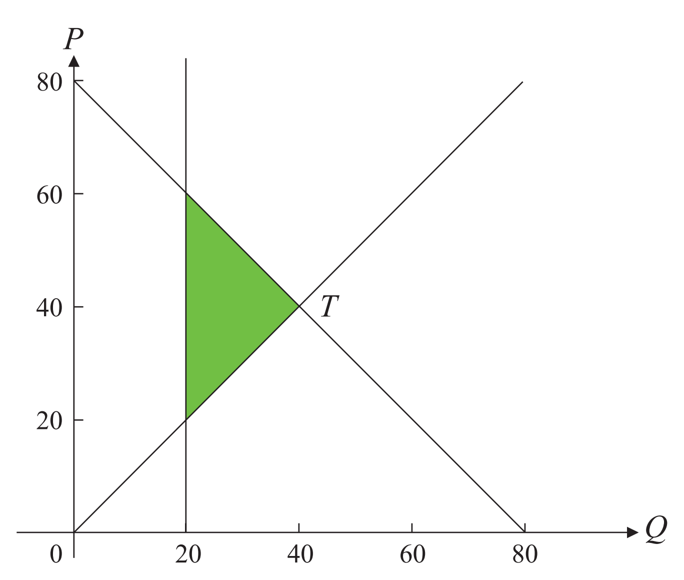
$\begin{cases} 5x + 3y \leq 105 \\ 2x + 4y \leq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, determine:

a) El punto de intersección entre $5x + 3y = 105$ y $2x + 4y = 70$.

b) La representación en un plano cartesiano de las condiciones del sistema.

c) La región factible.

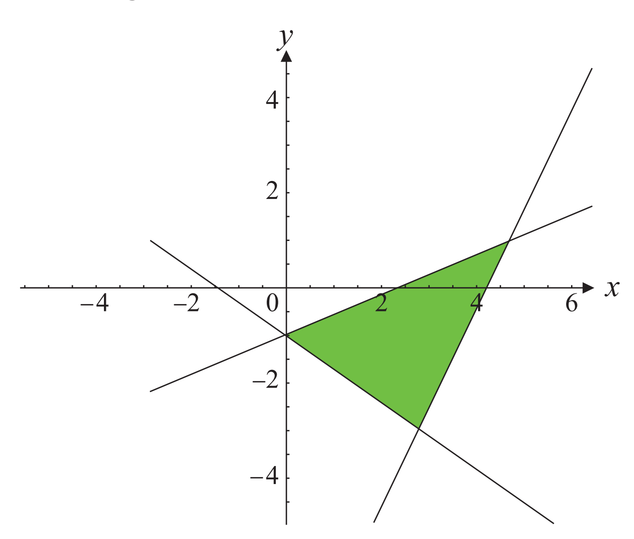
73. Una máquina puede fabricar cajas de tornillos o cajas de pernos. Puede funcionar durante un máximo de 80 horas semanales. Lleva una hora en fabricar una caja. La máquina debe fabricar no menos de 20 cajas de tornillos por semana. El número de cajas de pernos P no debe ser menor que el número de cajas de tornillos Q. El punto T es $(40, 40)$. Esta información aparece en el diagrama adjunto.



Entonces, uno de los siguientes sistemas de desigualdades lineales representa la región sombreada, identifíquelo:

a) $\begin{cases} P \leq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \leq 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \leq 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 + Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$ e) $\begin{cases} P \leq Q \\ P \leq 80 + Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$

74. Para el gráfico adjunto, identificar el sistema que lo representa y encontrar los vértices de la región sombreada.



a) $\begin{cases} 2x + 3y \geq -3 \\ 2x - y - 9 \geq 0 \\ 2x - 5y + 5 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y \geq -3 \\ 2x - y - 9 \geq 0 \\ 2x - 5y - 5 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y \geq -3 \\ 2x - y - 9 \leq 0 \\ 2x - 5y - 5 \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y \leq -3 \\ 2x - y - 9 \geq 0 \\ 2x - 5y - 5 \leq 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y \leq -3 \\ 2x - y - 9 \leq 0 \\ 2x - 5y - 5 \leq 0 \end{cases}$

75. Resolver los sistemas de inecuaciones lineales siguientes, encontrando los vértices de su región solución.

a) $\begin{cases} 5x + 15y \leq 150 \\ 6x + 8y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y \geq 50 \\ 9x + 8y \geq 0 \\ 3x + 4y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 14 \\ 2x + 3y \geq 36 \\ 4x + y \geq 16 \\ x - 3y \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \geq 5 \\ y \leq x + 3 \\ 3y + x \geq -1 \\ y + 2x \leq 16 \\ 4y - x \leq 22 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$

5.6 Sistemas de inecuaciones no lineales

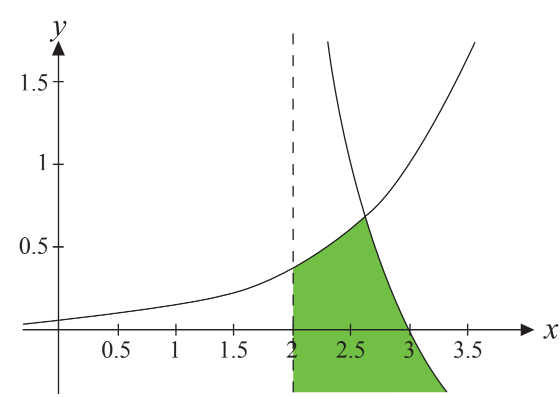
76. La región del plano cartesiano que corresponde al conjunto solución del sistema de desigualdades:

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq |x| \\ y + x^2 \geq 0 \end{cases}$, es un subconjunto de los cuadrantes:

a) I y IV b) II y IV c) II y III d) I y III e) I y II

77. Graficar la región solución del sistema: $\begin{cases} y \geq x^2 - 4x - 5 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$.

78. La región sombreada en el plano cartesiano adjunto, representa el conjunto solución del sistema de desigualdades dado por:



a) $\begin{cases} log_2(x-2) \geq y \\ e^{x-3} \leq y \end{cases}$ b) $\begin{cases} log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq y \\ 2^{x-3} \leq y \end{cases}$ c) $\begin{cases} log_3(x-2) \geq y \\ e^{x-3} \geq y \end{cases}$

d) $\begin{cases} log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq y \\ 2^{x-3} \leq y \end{cases}$ e) $\begin{cases} log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq y \\ e^{x-3} \geq y \end{cases}$

79. En los siguientes ejercicios, haga la gráfica del conjunto solución de cada sistema de desigualdades dado:

a) $\begin{cases} xy \geq 4 \\ y \geq x^2 + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < log_2(x) \\ y + x > 0 \\ y < 4 - x^2 \end{cases}$

80. Si $p(x, y)$: $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x \\ y > 1 - |x - 1| \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces es verdad que:

a) $\text{A}p(x, y) \subseteq \{(x, y)/x \geq 0, y \geq 0\}$
b) $(1, 3) \notin \text{A}p(x, y)$
c) $(1, 1) \in \text{A}p(x, y)$
d) $\text{A}p(x, y) \subseteq \{(x, y)/x > 0, y \in \mathbb{R}\}$
e) $\text{A}p(x, y) \subseteq \{(x, y)/x \in \mathbb{R}, y > 0\}$

81. Si $\text{R}e_x = \text{R}e_y = \mathbb{R}$ y $p(x, y)$ es la conjunción de los siguientes predicados

$\begin{cases} y \geq x^2 + 1 \\ x + y < 2 \\ y - x > 2 \end{cases}$, entonces $\text{A}p(x, y)$ tiene elementos:

a) En el I y II cuadrante del plano cartesiano.
b) En el II y III cuadrante del plano cartesiano.
c) Sólo en el II cuadrante del plano cartesiano.
d) Sólo en el I cuadrante del plano cartesiano.
e) En todos los cuadrantes del plano cartesiano.



Capítulo 6
Números Complejos

Introducción

El matemático Diofanto $(275$ d. C.$)$ construyó un triángulo con una cuerda en la que había realizado 12 nudos equidistantes. Las longitudes de los lados medían 3, 4 y 5 unidades. El triángulo es rectángulo porque cumple el teorema de Pitágoras: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Al ser un triángulo rectángulo, es fácil comprobar que el área de la superficie es 6 unidades cuadradas.

Con la misma cuerda trató de construir otro triángulo rectángulo, de forma que su área fuese 7 unidades cuadradas. Su planteamiento fue el siguiente:

- Un cateto mediría x.
- Como el área de la superficie del triángulo debería ser 7 unidades cuadradas, el otro cateto mediría $\frac{14}{x}$.
- La hipotenusa h debería cumplir el teorema de Pitágoras: $x^2 + \left(\frac{14}{x}\right)^2 = h^2$.
- Por otra parte, la suma de las longitudes de sus lados debería ser 12 unidades: $x + \frac{14}{x} + h = 12$.
- Por lo tanto, se debería cumplir la ecuación: $x^2 + \frac{196}{x^2} = \left(12 - x - \frac{14}{x}\right)^2$.

  De donde se llega a la siguiente ecuación cuadrática: $6x^2 - 43x + 84 = 0$.

  Cuya solución, Diofanto expresó como: $\frac{43 \pm \sqrt{167}\sqrt{-1}}{12}$.

Pero no conocía número alguno que elevado al cuadrado fuese igual a -1; por tanto, el problema no tenía solución.

Este problema planteado por Diofanto tardaría siglos en resolverse. Descartes, en 1637, puso nombre a las raíces cuadradas de números negativos y dedujo que las soluciones no reales de las ecuaciones son números de la forma $a + bi$, con a y b reales.

En el siglo XVI, Rafaello Bombelli fue uno de los primeros en admitir que era útil que los números negativos tuviesen raíces cuadradas. A mediados del siglo XVI, el filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano y sus contemporáneos, comenzaron a experimentar con soluciones de ecuaciones que incluían las raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo, Cardano sugirió que el número real 40 se puede expresar como:

$$(5+\sqrt{-15})\,(5-\sqrt{-15})$$


Gauss, matemático, astrónomo y físico alemán. (1777-1855)

En 1777, Euler simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra i (por imaginario).

Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

Los números complejos se usan en ingeniería electrónica y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas de corriente o de voltaje. El campo complejo es igualmente importante en mecánica cuántica, en la relatividad especial y la relatividad general, algunas fórmulas para la métrica del espacio-tiempo son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria.

6.1 Números Complejos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un número complejo, expresarlo como par ordenado o en forma rectangular empleando la constante imaginaria i.
* Calcular potencias de la unidad imaginaria i.
* Simplificar expresiones complejas empleando potencias de i y propiedades algebraicas de los números reales.
* Dado un número complejo, determinar su conjugado.
* Establecer condiciones para la igualdad de dos números complejos.

Se puede considerar que los números complejos son de la forma $x + iy$, donde $i=\sqrt{-1}$, lo cual puede interpretarse diciendo que $x + iy$ es un polinomio de variable imaginaria y coeficientes reales, con la particularidad de que $i^2 = -1$.

Para resaltar que x, yi tienen naturaleza diferente, usaremos la siguiente definición para los números complejos.

Capítulo 6

Números Complejos

Definición 6.1 (Números complejos)

Al conjunto de pares ordenados:

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) \,/ x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

tal que:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \text{ y,}$$

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

se denomina conjunto de números complejos.

Un número complejo puede representarse en forma de par ordenado $z = (x, y)$ o en **forma rectangular** también llamada **estándar** $z = x + yi$. En esta última expresión, x representa la **parte real**, y la **parte imaginaria** y al valor $i = \sqrt{-1}$ se lo denomina **unidad imaginaria**.

De esta forma, el número complejo $z = (-1, 4)$ también puede escribirse como $z = -1 + 4i$.

El número complejo $x + 0i$ generalmente se escribe como x y constituye un número real puro.

El número complejo $0 + yi$ generalmente se escribe como yi y constituye un número imaginario puro.

También se suele denominar a la parte real del número complejo simplemente como Re y a la parte imaginaria como Im.

$$Re\,(z) = x$$

$$Im\,(z) = y$$

El **conjugado** de un número complejo z, se obtiene cambiando el signo a la parte imaginaria de dicho número. Se lo denota por $\overline{z}$.

De aquí, si $z = 2 - 6i$, su conjugado es $\overline{z} = 2 + 6i$.

Para efectos de operaciones, es muy útil conocer como se comportan las potencias de la unidad imaginaria i . Al elevar i a las potencias enteras 1, 2, 3, 4, se obtiene:

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}$$

Este comportamiento es cíclico, es decir, se repite cada cuatro potencias enteras. De aquí que i^5, i^6, i^7 e i^8 tendrán estos mismos valores, respectivamente. Como se analizará más adelante, i^0 es 1.

Ejemplo 6.1 Potencias de i.

Calcule el valor de las siguientes expresiones: i^{21}, i^{62}, i^{89}, i^{96}.

Solución:

$i^{21} = i^{20}i^{1} = (i^4)^5 i = i$

$i^{62} = i^{60}i^{2} = (i^4)^{15}(-1) = -1$

$i^{91} = i^{88}i^{3} = (i^4)^{22}i^{3} = -i$

$i^{96} = (i^4)^{24} = 1$

Una forma práctica de deducir el valor de la potencia i^n, con $n > 4$, es dividiendo n para 4 y trabajar con el residuo de esta división. El lector puede verificar que esta regla se cumple para todos los números del ejemplo 6.1.

Ejemplo 6.2 Potencias de i.

Determine el valor de la expresión: $\dfrac{(2-i)^2}{3-4i}$.

Solución:

$$\frac{(2-i)^2}{3-4i} = \frac{4-4i+(i)^2}{3-4i} = \frac{4-4i-1}{3-4i} = \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$\frac{(2-i)^2}{3-4i} = 1$$

Ejemplo 6.3 Potencias de i.

Determine el valor de la expresión: $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{10}$.

Solución:

Se trata de una progresión geométrica con $a = i$, $r = i$ y $n = 10$.

La suma de sus términos viene dada por: $P_{10} = \dfrac{i\,(i^{10}-1)}{i-1}$

$$P_{10} = \frac{i\,(i^2-1)}{i-1} = i\,(i+1) = i^2 + i = -1 + i$$

Otra manera de resolver este mismo problema sería:

$i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

$i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = 0$

Es decir, los 8 primeros términos se anulan entre sí por la periodicidad anotada de las potencias de i.

Por lo tanto:

$i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{10} = i^9 + i^{10} = i + i^2 = -1 + i$

Ejemplo 6.4 Expresiones algebraicas con números complejos.

Encuentre la forma rectangular del número complejo $z = 1 - \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 - \cfrac{i}{1+i}}}$.

Solución:

$$z = 1 - \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 - \cfrac{i}{1+i}}}$$

$$= 1 - \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{\cfrac{1+i-i}{1+i}}}$$

$$= 1 - \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{\cfrac{1}{1+i}}}$$

$$= 1 - \frac{i}{1 + i\,(1+i)}$$

$$= \frac{1 + i\,(1+i) - i}{1 + i\,(1+i)}$$

$$= \frac{1 + i + i^2 - i}{1 + i + i^2}$$

$$z = 0$$

Debido a que el resultado de la simplificación es el número complejo 0, su forma rectangular sería: $z = 0 + 0i$.

Dos números complejos z_1 y z_2 son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias coinciden, respectivamente.

Ejemplo 6.5 Igualdad entre números complejos.

Sean $z_1 = (1, 2)$ y $z_2 = (a + b, a - b)$; para que $z_1 = z_2$ debe cumplirse que:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

el cual constituye un S.E.L. de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Al resolver el sistema se obtiene que $a = \frac{3}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$; con estos valores el número complejo z_2 es igual a z_1.

Ejemplo 6.6 Igualdad entre números complejos.

Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$2\alpha - 3 + \alpha i = \alpha + \beta - 2\beta i - i - 1$$

Solución:

$$(2\alpha - 3) + \alpha i = (\alpha + \beta - 1) - (2\beta + 1)i$$

Con lo cual se puede construir el S.E.L.:

$$\begin{cases} 2\alpha - 3 = \alpha + \beta - 1 \\ \alpha = -2\beta - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{cases}$$

Al resolver el S.E.L., se obtiene que $\alpha = 1$ y $\beta = -1$ y se puede comprobar que con estos valores se cumple la igualdad planteada.

6.2 Operaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dados dos o más números complejos, realizar y verificar propiedades de las operaciones de suma, producto y división entre ellos.
* Demostrar propiedades de las operaciones entre números complejos.
* Aplicar las propiedades de la suma y producto para realizar operaciones con números complejos.

- **Suma entre números complejos**

La suma entre dos números complejos z_1 y z_2 es otro número complejo, cuya parte real es la suma de las partes reales de ambos; y, cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de los referidos números.

Esta operación se puede representar así:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

La suma de números complejos z_1, z_2, z_3 cumple con las siguientes propiedades:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ [z_1 + z_2 = z_2 + z_1]$	Conmutativa
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\ [z_1 + (z_2 + z_3)] = [(z_1 + z_2) + z_3]$	Asociativa
$\exists (0,0) \in \mathbb{C}\ \forall (x,y) \in \mathbb{C}\ [(x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y)]$	Elemento neutro
$\forall (x, y) \in \mathbb{C}\ \exists (x^*, y^*) \in \mathbb{C}\ [(x, y) + (x^*, y^*) = (0, 0)]$	Elemento inverso aditivo

Cuadro 6.1: Propiedades de la Suma entre Números Complejos.

La resta de números complejos se realiza como la suma algebraica del minuendo más el inverso aditivo del sustraendo.

Ejemplo 6.7 Demostración de propiedades de Números Complejos.

Demuestre que: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Solución:

$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]$ Definición de números complejos.

$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$ Suma de complejos z_2 y z_3.

$= [x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)]$ Suma de complejos z_1 y $(z_2 + z_3)$.

$= [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3]$ Ley asociativa de números reales.

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$ Suma de complejos $(z_1 + z_2)$ y z_3.

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

- **Multiplicación de un número complejo por un valor real**

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, esta operación se define como:

$$\alpha z = \alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces se cumple que:

1.	$\alpha z = z \alpha$
2.	$\alpha (\beta z) = (\alpha \beta) z$
3.	$0 (z) = (0, 0)$

4.	$(\alpha + \beta) z = \alpha z + \beta z$
5.	$\alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2$

Cuadro 6.2: Propiedades de la Multiplicación de un Número Complejo por un Escalar.

Ejemplo 6.8 Demostración de propiedades de Números Complejos.

Demuestre que: $\alpha(\beta z) = (\alpha\beta)z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución:

$z =$	(x, y)	Definición de un número complejo.
$\beta z =$	$(\beta x, \beta y)$	Producto de un número complejo por un valor real β.
$\alpha(\beta z) =$	$(\alpha\beta x, \alpha\beta y)$	Producto de un complejo (βz) por un valor real α.
$=$	$(\alpha\beta)(x, y)$	Producto de un complejo z por un valor real $(\alpha\beta)$.
$\alpha(\beta z) =$	$(\alpha\beta)z$	

- **Multiplicación entre números complejos**

Sean $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$. El producto entre z_1 y z_2 está dado por:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Esta operación para los números complejos z_1, z_2, z_3 cumple con las siguientes propiedades:

$z_1 z_2 = z_2 z_1$	Conmutativa
$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$	Asociativa
$\exists(1, 0) \in \mathbb{C}\ \forall (x, y) \in \mathbb{C}\ [(x, y)(1, 0) = (1, 0)(x, y) = (x, y)]$	Elemento neutro multiplicativo
$\forall (x, y) \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}\ \exists (x^*, y^*) \in \mathbb{C}\ [(x, y)(x^*, y^*) = (1, 0)]$	Elemento inverso multiplicativo

Cuadro 6.3: Propiedades de la Multiplicación entre Números Complejos.

En la última propiedad, el elemento inverso multiplicativo es:

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Ejemplo 6.9 Demostración de propiedades de Números Complejos.

Demuestre que: $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Solución:

$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2)$	Definición de números complejos.
$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$	Definición de producto entre números complejos.
$= (x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + y_1x_2)$	Propiedad conmutativa del producto de números reales.
$= (x_2, y_2)(x_1, y_1)$	Definición de producto entre números complejos.
$z_1 z_2 = z_2 z_1$	

Resulta de mucha utilidad saber cómo se comportan estas operaciones sobre los números complejos y sus respectivos conjugados. Así, si $z = x + yi$, se tienen las siguientes propiedades:

1.	$z + \overline{z} = 2x$
2.	$z - \overline{z} = 2yi$
3.	$z\,\overline{z} = x^2 + y^2$
4.	$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2}$
5.	$\overline{(\overline{z})} = z$
6.	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7.	$\overline{z_1\ z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

Cuadro 6.4: Propiedades del Conjugado de Números Complejos.

La propiedad 4 se emplea para el elemento inverso multiplicativo de z.

Ejemplo 6.10 Demostración de propiedades de Números Complejos.

Demuestre que: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Solución:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}$	Definición de números complejos.
$= \overline{(x_1 + x_2\ , y_1 + y_2)}$	Definición de suma de números complejos.
$= (x_1 + x_2\, , -(y_1 + y_2))$	Definición del conjugado de un número complejo.
$= (x_1 + x_2\, , -y_1 - y_2)$	Destrucción del signo de agrupación.
$= (x_1\, , -y_1) + (x_2\, , -y_2)$	Definición de suma de números complejos.
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	Definición del conjugado de un número complejo.

- **División entre números complejos**

Para hallar el cociente entre dos números complejos, con denominador no nulo, se debe multiplicar y dividir por el correspondiente complejo conjugado del denominador de la fracción, a fin de expresar como un número real el denominador de dicha fracción.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\,\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}\ ;\ z_2 \neq (0, 0)$$

Ejemplo 6.11 Operaciones entre números complejos.

Sean $z_1 = (1, -1)$ y $z_2 = (-3, 4)$, realice:

a) $2z_1 + 3z_2$

b) $\overline{z_2} - z_1$

c) $z_1 z_2$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $2z_1 + 3z_2 = 2(1, -1) + 3(-3, 4) = (2, -2) + (-9, 12) = (-7, 10)$

b) $\overline{z_2} - z_1 = \overline{(-3, 4)} - (1, -1) = (-3, -4) - (1, -1) = (-4, -3)$

c) $z_1 z_2 = (1, -1)(-3, 4) = (-3 + 4, 4 + 3) = (1, 7)$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{-3 + 4i} = \left(\frac{1 - i}{-3 + 4i}\right)\left(\frac{-3 - 4i}{-3 - 4i}\right) = \frac{(-3 - 4) + (-4 + 3)i}{(-3)^2 - (4i)^2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7 - i}{9 + 16} = -\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$

Ejemplo 6.12 Expresiones algebraicas.

Determine el valor de la expresión: $\frac{3 - 2i}{3 + 2i} + \frac{3 + 2i}{3 - 2i}$.

Solución:

Se podría definir el número $z = (3, -2)$.

Su conjugado sería $\overline{z} = (3, 2)$.

La expresión original se convierte en: $\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{z\,\overline{z}}$.

Pero:

$z^2 = ((3)(3) - (-2)(-2), (3)(-2) + (-2)(3)) = (9 - 4, -6 -6) = (5, -12)$

$\overline{z}^2 = (5, 12)$

$z\,\overline{z} = 3^2 + 2^2 = 13$

$\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = \frac{(5, -12) + (5, 12)}{13} = \frac{10}{13}$

6.3 Representación geométrica

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

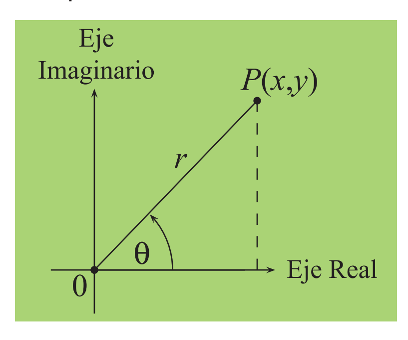
* Dado un número complejo, expresarlo en notación polar.
* Dado un número complejo, representarlo gráficamente en el plano complejo, identificando su módulo y su argumento.
* Demostrar propiedades del módulo y el argumento respecto a las operaciones entre números complejos.
* Aplicar las propiedades del módulo y el argumento para realizar operaciones con números complejos.

Todo número complejo puede ser considerado como un par ordenado (x, y); $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; así mismo, todo punto en el plano se puede representar mediante pares ordenados, de aquí podemos representar los números complejos mediante puntos en el plano.

Por convención, el eje horizontal del plano se emplea para representar la componente real del número complejo, y el eje vertical se emplea para representar la componente imaginaria.

Al unir el punto que representa al número complejo con el origen de coordenadas, se forma un segmento cuya longitud se denomina r. Este segmento forma con el eje horizontal positivo un ángulo θ, denominado argumento.

El plano usado para esta representación se conoce como plano complejo.



Puesto que los pares ordenados de la forma $(x, 0)$ siempre se encuentran en el eje horizontal, éste se denomina eje real. De manera análoga, los que tienen la forma $(0, y)$ se encuentran sobre el eje vertical, al cual se denomina eje imaginario. Por geometría de triángulos rectángulos, se puede observar además que:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,sen(\theta)$$

- **Módulo y argumento de un número complejo**

El módulo o valor absoluto de un número complejo $x + yi$ es la longitud r del segmento dirigido desde el origen de coordenadas hasta el punto $P(x, y)$ en el plano complejo.

$$r = |z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$$

La medida del ángulo θ se denomina argumento de z y se denota por $\theta = arg(z)$. Además:

$tan(\theta_0) = \dfrac{y}{x}$, $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$, $x \neq 0$, donde los signos de x, y determinan el cuadrante de θ_0; y,

$\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde θ_0 es el argumento fundamental.

El módulo de los números complejos z, z_1, z_2 cumple con las siguientes propiedades:

1.	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$
2.	$\lvert\overline{z_1 + z_2}\rvert \leq \lvert\bar{z}_1\rvert + \lvert\bar{z}_2\rvert$
3.	$\lvert\overline{z_1\, z_2}\rvert = \lvert\bar{z}_1\, \bar{z}_2\rvert$
4.	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
5.	$\lvert z_1\rvert\, \lvert z_2\rvert = \lvert z_1\, z_2\rvert$
6.	$\lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert \geq \lvert z_1 + z_2\rvert$

Cuadro 6.5: Propiedades del Módulo de Números Complejos.

El argumento de los números complejos z_1, z_2 cumplen con las siguientes propiedades:

1.	$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$
2.	$arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)\ ;\ z_2 \neq (0, 0)$

Cuadro 6.6: Propiedades del Argumento de los Números Complejos.

6.4 Notación de Euler

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un número complejo, expresarlo en notación de Euler.
* Dados dos o más números complejos, realizar operaciones de multiplicación, división y potenciación empleando la identidad de Euler.
* Dado un número complejo, hallar sus n raíces y explicar la relación geométrica entre ellas.

Números Complejos

De acuerdo a lo que se estudió en la sección anterior, el número complejo $z = x + yi$, expresado en forma rectangular, también puede ser expresado como sigue:

$$z = r\,cos\,(\theta) + i\,r\,sen\,(\theta)$$

$$z = r\,(cos\,(\theta) + i\,sen\,(\theta))$$

Para simplificar la notación de esta representación se usa la fórmula o identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = cos\,(\theta) + i\,sen\,(\theta)$$

la cual puede interpretarse geométricamente como una circunferencia de radio unitario en el plano complejo, dibujada por la función $e^{i\theta}$ al variar θ sobre los números reales. Así, θ es la medida del ángulo en posición estándar de una recta que conecta el origen del plano y un punto sobre la circunferencia de radio unitario. La fórmula sólo es válida si el seno y el coseno tienen sus argumentos en radianes.

Con lo cual, el número complejo z en **forma polar** puede ser expresado como:

$$z = re^{i\theta} = |z|\,e^{i\theta}$$

De hecho, Euler, en un manuscrito fechado en 1777, el cual no se publicó hasta 1794, le aseguró un puesto definitivo en la historia de las notaciones matemáticas a los tres símbolos e, i y π, de los que Euler fue en gran medida responsable, y, que se relacionan con los dos enteros más importantes 0 y 1, por medio de la famosa igualdad:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que figuran los cinco números más importantes con las más relevantes operaciones y la más trascendente relación de toda la matemática. Lo equivalente a esta igualdad, en forma generalizada, aparece en el más famoso de todos los textos de Euler, *"Introductio in analysin infinitorum"*, publicado en 1748.



Leonard Euler, matemático suizo (1707-1783)

Pero el nombre de Euler no aparece hoy asociado a ninguno de los símbolos que intervienen en esta relación, sino a la llamada "constante de Euler", la que recibe este honor y se la considera una sexta constante matemática importante.

Es decir, el número complejo z puede definirse en función de su módulo, su argumento y del número irracional e, lo cual permite obtener reglas para calcular productos, cocientes, potencias y raíces de números complejos.

- **Multiplicación entre números complejos**

  Sean los números complejos z_1 y z_2, su producto puede ser encontrado de la siguiente manera:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \wedge z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$
$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})$$
$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

- **División entre números complejos**

  Sean los números complejos z_1 y z_2, su cociente puede ser encontrado de la siguiente manera:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \wedge z_2 = r_2 e^{i\theta_2}\,;\, r_2 \neq 0$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$
$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) [cos(\theta_1 - \theta_2) + i\, sen(\theta_1 - \theta_2)]$$

- **Potenciación de números complejos**

  Si n es un entero positivo, aplicando multiplicaciones sucesivas se tiene: $z^n = zz...z$ (n factores).

  Aunque también se puede utilizar la identidad de Euler:

$$z^n = (re^{i\theta})^n$$
$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Ejemplo 6.13 Demostración de propiedades de argumentos de Números Complejos.

Demuestre que: $arg\,(z_1 z_2) = arg\,(z_1) + arg\,(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Solución:

Expresamos z_1 y z_2 en forma polar:

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \Rightarrow |z_1| = r_1 \wedge arg\,(z_1) = \theta_1$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow |z_2| = r_2 \wedge arg\,(z_2) = \theta_2$

Realizando el producto $z_1 z_2$, tenemos:

$z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Luego:

$arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

Ejemplo 6.14 Módulo de Números Complejos.

Sean los números complejos $z_1 = 1 - 3i$ y $z_2 = 2 + i$, determine el módulo del número $e^{i\frac{z_1}{z_2}}$.

Solución:

Realizamos la división $\frac{z_1}{z_2}$, así:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-3i)}{(2+i)} \frac{(2-i)}{(2-i)}$$
$$= \frac{2 + 3i^2 - i - 6i}{4 - i^2}$$
$$= \frac{-1 - 7i}{5}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}\,i$$

Luego reemplazamos este cociente en el número dado:

$$e^{i\frac{z_1}{z_2}} = e^{i\left(-\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i\right)}$$
$$= e^{-\frac{1}{5}i}\, e^{-\frac{7}{5}i^2}$$
$$e^{i\frac{z_1}{z_2}} = e^{\frac{7}{5}}\, e^{-\frac{1}{5}i}$$

Dado que todo complejo z se puede representar en forma polar como $z = r\ e^{i\theta}$, podemos concluir que: $r = e^{\frac{7}{5}}$, donde r es el módulo del número complejo dado.

Ejemplo 6.15 Multiplicación y división de complejos.

Dados los números $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$, realice las siguientes operaciones:

a) $z_1 z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 z_2$

$z_1 = 0 + i,\ z_2 = 1 + i$

$r_1 = \sqrt{0+1} = 1,\ r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ — Obteniendo los módulos de cada número complejo.

$\left(tan(\theta_1) = \frac{1}{0} \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}\right) \wedge \left(tan(\theta_2) = \frac{1}{1} \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}\right)$ — Obteniendo los argumentos de cada número complejo.

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ — Definición del producto entre números complejos.

$= (1)\left(\sqrt{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

$= \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ — Producto en forma polar.

$= \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ — Expresando el producto en forma rectangular.

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z_1 z_2 = -1 + i$ — Simplificando el producto.

b) $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

Aplicando la definición de la división.

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Cociente en forma polar.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Expresando el cociente en forma rectangular.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Simplificando el cociente.

Ejemplo 6.16 Potenciación de números complejos.

Dado el número complejo $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, calcule z^6.

Solución:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Encontrando la representación polar del número complejo.

$$r = 1$$

Módulo de z.

$$tan(\theta) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}$$

Argumento de z.

$$z = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$z^6 = \left(e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}\right)^6$$

Potenciación del número complejo.

$$z^6 = e^{i7\pi}$$

$$z^6 = cos(7\pi) + i\ sen(7\pi)$$

$$z^6 = -1 + 0i$$

Encontrando la representación rectangular de z^6.

Ejemplo 6.17 Potenciación de números complejos.

Dado el número complejo $z = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)$, calcule z^{10}.

Solución:

Utilizando la notación de Euler, el número complejo dado puede escribirse como: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Donde:

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$r_1 = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$ $\qquad tan\,(\theta_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$r_1 = \sqrt{1 + 3} = 2$ $\qquad \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

$r_2 = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$ $\qquad tan\,(\theta_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{-1}$

$r_2 = \sqrt{1 + 3} = 2$ $\qquad \theta_2 = \dfrac{5\pi}{3}$

$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

Luego:

$z^{10} = \left(e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^{10}$

$z^{10} = e^{i\left(-\frac{40\pi}{3}\right)}$

Ya que la medida del ángulo $-\dfrac{40\pi}{3}$ coincide con la de $-\dfrac{4\pi}{3}$; y, por ángulos coterminales coincide con $\dfrac{2\pi}{3}$, tenemos:

$$z^{10} = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z^{10} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ejemplo 6.18 Potenciación de números complejos.

Calcule el valor de la siguiente expresión: $(1+i)^{100}i$.

Solución:

Obtenemos el módulo del número complejo $z = 1 + i$.

$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$tan\ (\theta) = \frac{1}{1}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

Expresando z en forma polar:

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Realizando la potenciación:

$$\begin{aligned} z^{100} &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{100} \\ &= \left(2^{\frac{1}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{100} \\ &= 2^{50}\,e^{i25\pi} \\ &= 2^{50}\,e^{i\pi} \\ &= 2^{50}\,[cos(\pi) + i\ sen(\pi)] \\ z^{100} &= -2^{50} \end{aligned}$$

Realizando el producto por i, tenemos:

$(1+i)^{100}\,i = -2^{50}i$.

Partiendo de la representación polar, y si hacemos $r = 1$, obtenemos el teorema propuesto por Abraham De Moivre:

$$[cos(\theta) + i\ sen(\theta)]^n = cos(n\theta) + i\ sen(n\theta) \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Esta expresión es importante porque relaciona a los números complejos con la trigonometría. La expresión " $cos(\theta) + i\ sen(\theta)$" puede abreviarse como $cis(\theta)$.

Desarrollando el segundo miembro mediante el teorema del binomio, reduciéndolo a la forma $x + yi$ e igualando partes reales y partes imaginarias, se deducen ciertas expresiones para $cos(n\theta)$ y $sen(n\theta)$ como polinomios de grado n en $cos(\theta)$ y $sen(\theta)$.

Ejemplo 6.19 Identidades Trigonométricas con De Moivre.

Empleando el teorema de De Moivre, deduzca una expresión para $cos(2\theta)$ y otra para $sen(2\theta)$.

Solución:

Si $n = 2$ en la expresión del teorema de De Moivre, se obtiene:

$[cos(\theta) + i\ sen(\theta)]^2 = cos(2\theta) + i\ sen(2\theta)$

Desarrollando el primer miembro de esta igualdad:

$$[cos(\theta) + i\ sen(\theta)]^2 = cos^2(\theta) + 2i\ cos(\theta)\ sen(\theta) + i^2\ sen^2(\theta)$$
$$= cos^2(\theta) + i^2\ sen^2(\theta) + 2\ [cos(\theta)\ sen(\theta)]i$$
$$= [cos^2(\theta) - sen^2(\theta)] + 2\ [sen(\theta)\ cos(\theta)]i$$

En base a la expresión encontrada e igualando cada término con el segundo miembro de la igualdad original, la parte real y la parte imaginaria nos indican respectivamente que:

$$cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$$

$$sen(2\theta) = 2\ sen(\theta)\ cos(\theta)$$

- **Radicación de números complejos**

Si $z = r\ e^{i\theta}$ es un número complejo diferente de cero y n un entero positivo, existen precisamente n diferentes números complejos w_0, w_1, ..., w_{n-1} que son las raíces n-ésimas de z. Sea $w = \delta e^{i\beta}$ una raíz n-ésima, debe cumplirse que $w^n = z$.

Esto es: $\delta^n\ e^{in\beta} = r\ e^{i\theta}$, con lo cual $\delta = \sqrt[n]{r}$.

El cis de los ángulos $n\beta$ y θ deben tener la misma medida, por lo cual sus periodicidades han de diferir en un múltiplo entero de 2π. Es decir:

$$n\beta = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, todas las raíces n-ésimas de $z = r\ e^{i\theta}$ vienen dadas por la expresión:

$$w_k = \sqrt[n]{r\ e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)};\ k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Estas raíces pertenecen a una circunferencia centrada en el origen de radio igual a la n-ésima raíz real positiva de r. El argumento de una de ellas es $\beta = \frac{\theta}{n}$ y las demás están uniformemente distribuidas a lo largo de tal circunferencia, separadas un ángulo cuya medida es $\frac{2\pi}{n}$.

Ejemplo 6.20 Radicación de números complejos.

Dado el predicado $p(x): x^4 + 1 = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

El problema se reduce a extraer las raíces cuartas de -1.

$z = -1 + 0i$

Expresando en forma rectangular el número complejo.

$r = \sqrt{1 + 0} = 1$

$tan\,(\theta) = \frac{0}{-1} \rightarrow \theta = \pi$

$\boxed{z = e^{i\pi}}$

Expresándolo en forma polar.

$z^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}\right)};\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$k = 0$

Calculando su primera raíz.

$w_0 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$w_0 = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$

Forma rectangular de la primera raíz.

$k = 1$

Calculando su segunda raíz.

$w_1 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)}$

$w_1 = cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\boxed{w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$

Forma rectangular de la segunda raíz.

$k = 2$

Calculando su tercera raíz.

$w_2 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)}$

$w_2 = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

$w_2 = cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$\boxed{w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$

Forma rectangular de la tercera raíz.

$k = 3$

Calculando su cuarta raíz.

$w_3 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)}$

$w_3 = e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

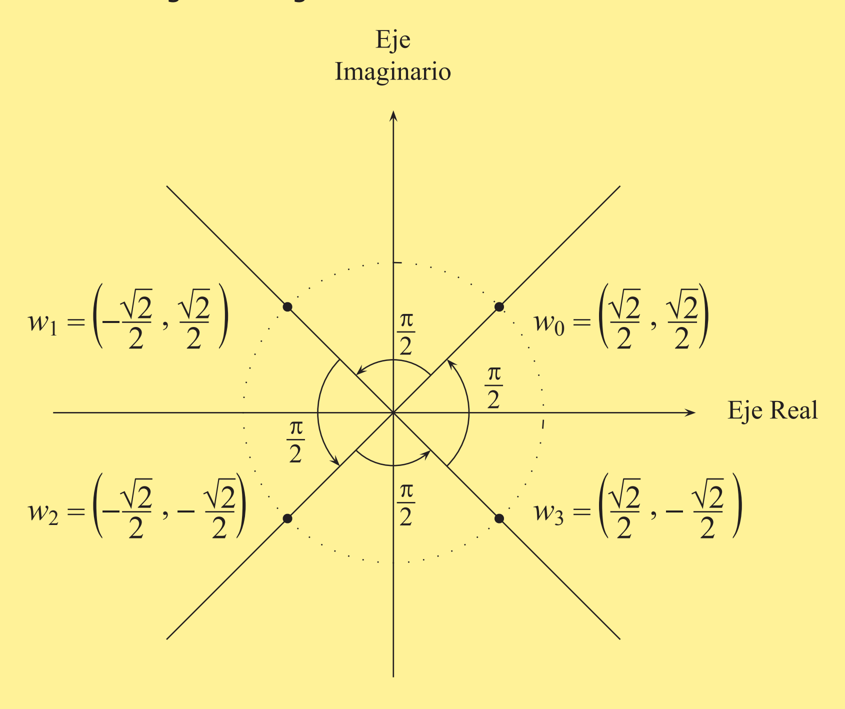
$w_3 = cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$\boxed{w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$

Forma rectangular de la cuarta raíz.

Comprobación:

Si graficamos las cuatro raíces obtenidas en el plano complejo, se comprueba que las mismas están localizadas sobre una circunferencia de radio $r = 1$, centrada en el origen, y están separadas $\frac{\pi}{2}$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo 6.21 Radicación de números complejos.

Determine el número complejo z, tal que $2(\sqrt{3}-i)$ es una de sus raíces cúbicas y calcule sus otras 2 raíces.

Solución:

Puesto que $2(\sqrt{3} - i)$ es un raíz cúbica de z, se cumple que:

$$z = [2(\sqrt{3} - i)]^3$$

Luego:

$$z = (2\sqrt{3})^3 - 3(2\sqrt{3})^2(2i) + 3(2\sqrt{3})(2i)^2 - (2i)^3$$

$$= (8)(3)\sqrt{3} - (3)(4)(3)(2i) + (3)(2)(\sqrt{3})(4)i^2 - 8i^3$$

$$= 24\sqrt{3} - 72i - 24\sqrt{3} + 8i$$

$$z = 0 - 64i$$

$$\begin{cases} r = 64 \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = w_k = \sqrt[3]{64}e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)};\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

$$k = 0$$

$$w_0 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_0 = 4\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$w_0 = 4i$$

$$k = 1$$

$$w_1 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$w_1 = 4\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

$$w_1 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$k = 2$$

$$w_2 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$w_2 = 4\left[cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$

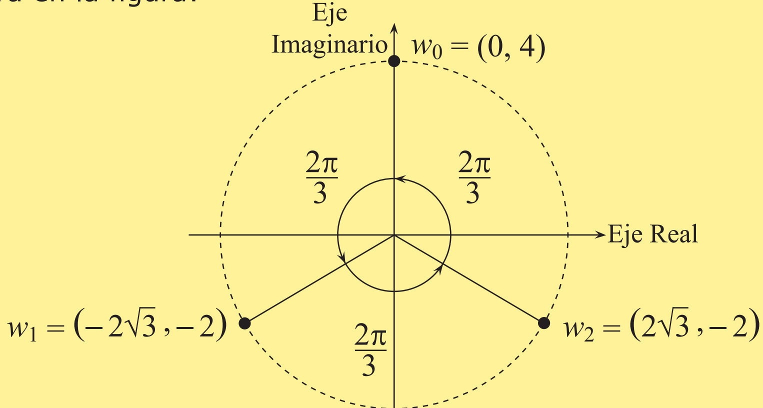
$$w_2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_2 = 2\sqrt{3} - 2i$$

Observe que w_2 es una de las raíces especificada en el problema.

Comprobación:

Si graficamos las tres raíces obtenidas en el plano complejo, se verifica que las mismas están localizadas sobre una circunferencia de radio $r = 4$, centrada en el origen, y están separadas $\frac{2\pi}{3}$, tal como se muestra en la figura:



6.5 Aplicaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Definir y analizar gráficamente las funciones hiperbólicas.
* Deducir identidades hiperbólicas empleando propiedades de los números complejos.
* Resolver ecuaciones polinomiales con raíces complejas, empleando el teorema fundamental del Álgebra.
* Resolver logaritmos de números complejos.
* Resolver ángulos de medida compleja.

■ Funciones Hiperbólicas

En el campo real, las funciones hiperbólicas son funciones dependientes de la función trascendente e^x.

$$senh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$cosh\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

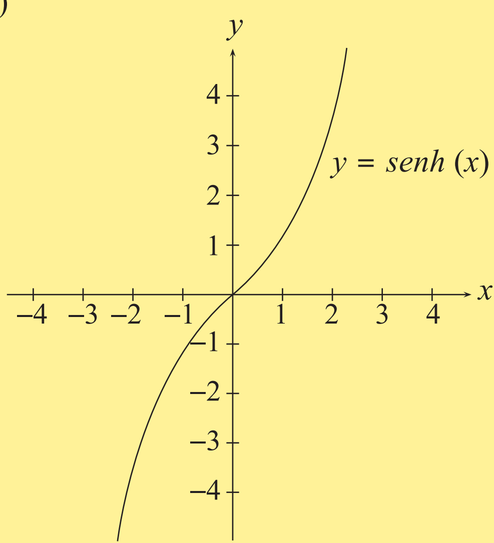
$$tanh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ejemplo 6.22 Aplicación de números complejos.

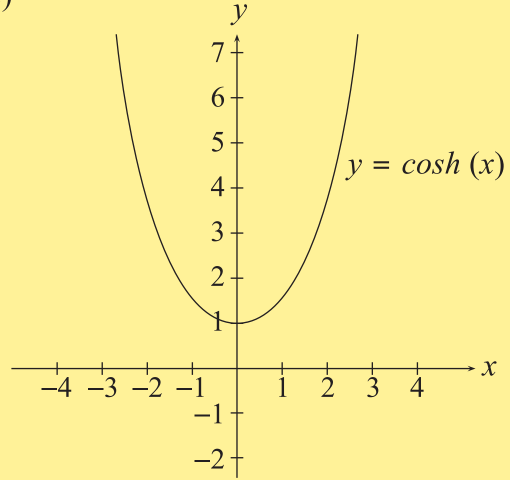
Bosqueje las gráficas de las funciones hiperbólicas:

Solución:

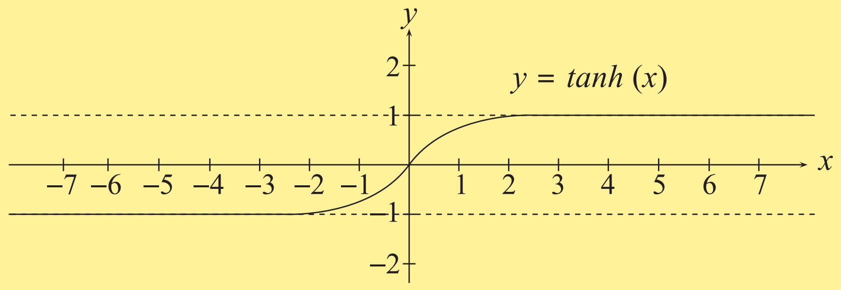
a) $f(x) = senh\ (x)$



b) $g(x) = cosh\ (x)$



c) $h(x) = tanh\ (x)$



Las funciones hiperbólicas se relacionan con las funciones trigonométricas mediante las siguientes identidades:

$cosh\,(ix) = cos\,(x)$
$senh\,(ix) = i\,sen\,(x)$

Para las funciones hiperbólicas, se cumple la identidad:

$$cosh^2\,(x) - senh^2\,(x) = 1$$

- **Funciones Polinomiales**

  Cuando analizamos los ceros o raíces de las funciones cuadráticas y en general de las funciones polinomiales en el capítulo 3, habíamos observado que para ciertas situaciones dichos valores no son reales.

  Con la definición de los números complejos, es posible encontrar las referidas raíces.

Teorema 6.1 (Teorema fundamental del Álgebra)

La ecuación polinómica:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0;\ a_i \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad a_n \neq 0$$

tiene n raíces o ceros complejos, contando la multiplicidad algebraica.

Ejemplo 6.23 Aplicación de números complejos.

Encuentre las raíces de la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 33x - 34$$

Solución:

La función dada tiene cuanto mucho 3 raíces o ceros.

$(2)^3 - 10(2)^2 + 33(2) - 34 = 0$ $\quad\therefore$ 2 es un cero de f.

1	−10	33	−34	2
	2	−16	34	
1	−8	17	0	

$x^2 - 8x + 17 = 0$

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(17)}}{2}$ $\quad$ Resolviendo la ecuación cuadrática.

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x_1 = 4 + i \ \wedge\ x_2 = 4 - i$ $\quad$ Obteniendo las raíces complejas.

Por lo tanto, los ceros de f son:

$$2,\ 4+i,\ 4-i$$

Note que si z es una raíz de la ecuación polinómica $f(x)=0$, su conjugado $\bar{z}$ también lo es.

Comprobación:

Se puede construir $f(x)$ expresándola como el producto de los siguientes factores:

$$f(x)=(x-2)[x-(4+i)][x-(4-i)]$$

Al multiplicar se obtiene:

$$f(x)=(x-2)(x^2-8x+17)$$

$$f(x)=x^3-10x^2+33x-34$$

que corresponde a la función polinomial dada.

■ Otras Aplicaciones

Anteriormente habíamos indicado que no podíamos encontrar logaritmos de números negativos, ni medidas de ángulos cuyos senos o cosenos excedan la unidad. Sin embargo, con los números complejos podemos encontrar tales valores.

La proposición $-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$ es verdadera $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Si $z=cos(\theta)$, entonces $\theta=arcos(z)$.

Por la identidad hiperbólica, $cos(x)=cosh(ix)$:

$$z=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2z=0$$

$$e^{2i\theta}-2ze^{i\theta}+1=0$$

La medida del ángulo puede ser encontrada resolviendo la última ecuación cuadrática.

$$e^{i\theta}=\frac{2z\pm\sqrt{(-2z)^2-4(1)(1)}}{2}$$

$$e^{i\theta}=z\pm\sqrt{z^2-1}$$

Con lo cual:

$$\theta=arccos(z)=\frac{1}{i}\left[ln\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)\right]+2k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$$

En general, se toma el valor para $k=0$, el cual se conoce como valor principal de la función.

Realizando un procedimiento similar, podemos encontrar que:

Si $z=sen(\theta)$, entonces $\theta=arcsen(z)$.

Con la identidad hiperbólica $sen(x) = \frac{senh(ix)}{i}$:

$$z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} - 2zi = 0$$

$$e^{2i\theta} - 2zie^{i\theta} - 1 = 0$$

La medida del ángulo θ puede ser determinada resolviendo la última ecuación cuadrática.

$$e^{i\theta} = \frac{2zi \pm \sqrt{(-2zi)^2 - 4\,(1)(-1)}}{2}$$

$$e^{i\theta} = zi \pm \sqrt{1 - z^2}$$

Con lo cual:

$$\theta = arcsen\,(z) = \frac{1}{i}\,ln\left[zi \pm \sqrt{1 - z^2}\,\right] + 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 6.24 Aplicación de números complejos.

Encuentre los siguientes valores:

a) $ln\,(-1)$

b) $ln\,(1 - i)$

c) $arccos\,(2)$

d) $arcsen\,(3)$

Solución:

a) $ln\,(-1) = ln\,(e^{i\pi + i2k\pi})$

$ln\,(-1) = \pi i + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}$

b) $ln\,(1 - i) = ln\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi + i2k\pi}\right)$

$ln\,(1 - i) = \frac{7}{4}\pi i + 2k\pi i + ln\sqrt{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$

c) $arccos\,(z) = \frac{1}{i}\,ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) + 2k\pi i$

$arccos\,(2) = \frac{1}{i}\,ln\,(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}$

d) $arcsen\,(z) = \frac{1}{i}\,ln\left(zi \pm \sqrt{1 - z^2}\right) + 2k\pi i$

$arcsen\,(3) = \frac{1}{i}\,ln\left[(3 \pm 2\sqrt{2})i\right] + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 6.25 Aplicación de números complejos.

Si $z = ln\,(1 + i)$, determine $Re(z)$ e $Im(z)$.

Solución:

Representando el número complejo $z^* = 1 + i$ en forma polar:

$z^* = r\,e^{i\theta}$, donde:

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \qquad tan\,(\theta) = 1$$
$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$z^* = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Reemplazando z^* en z, tenemos:

$$z = ln\,(z^*)$$
$$z = ln\,(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + i2k\pi});\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Aplicando la propiedad del logaritmo del producto.

$$z = ln\sqrt{2} + ln(e^{i\frac{\pi}{4} + i2k\pi})$$
$$z = ln\,\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$$

Luego:

$$Re(z) = ln\sqrt{2}$$
$$Im(z) = \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right);\ \ k \in \mathbb{Z}$$

6.1 Números complejos

1. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

a) Verdadero b) Falso

2. $\left(\sqrt{1-\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

a) Verdadero b) Falso

3. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, $f(i) = 0$ y $f(1+i) = 0$, al sumar los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4, se obtiene:

a) 2 b) 1 c) – 2 d) 4 e) – 4

4. Sean $\text{Re} = \mathbb{C}$ y $p(x): \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8x & 2 \\ -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$. La suma de los elementos de $\text{A}p(x)$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{3}{8}$

6.2 Operaciones

5. Determine los valores de x e y que satisfagan la igualdad: $\frac{2i}{x} + yi - 2 = 3i - \frac{3}{x} + y$.

6. Determine los números reales x e y que satisfagan las siguientes ecuaciones.

(i) $3 + 2i + 3iy = 8i + x - 2y$.

(ii) $(1-i)x + (2+i)y = 4 + 2i$.

(iii) $\frac{8i}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y$.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1-i & 1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $det(A - \overline{A})$.

8. Calcule los números m y n que verifiquen la igualdad: $\frac{-4+mi}{2-3i} = n - 2i$.

9. Si $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, el número $2\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$ es:

a) $1+\sqrt{3}i$ b) $1-\sqrt{3}i$ c) $-1+\sqrt{3}i$ d) $-1-\sqrt{3}i$ e) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. Determine el valor real de k para que $z = \dfrac{4+ki}{2+i}$ sea o real puro o imaginario puro.

11. Determine las raíces de la ecuación: $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$.

12. Demuestre algebraicamente que si $\sqrt{a+bi} = u + vi$, entonces

$u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$ y $v = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$

13. Exprese en forma rectangular los siguientes números complejos:

a) $(1-4i)(3+11i) - (1+i)^{-1}$

b) $(1-i)^3(1+i)$

c) $\left[\dfrac{2i}{1+i}\right]^4$

d) $\dfrac{i}{1+i} + \dfrac{1+i}{i}$

e) $\left[1+\sqrt{3}i + \left(1-\sqrt{3}i\right)\right]^3$

14. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} (2+3i)x - (1+i)y = 3+4i \\ (1-3i)x - (1-2i)y = -2-6i \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1+7i \\ (1-i) + yi = 0 \end{cases}$

15. Calcule la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1+i & 2+i & 4+i \\ 0 & 1 & 2 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$.

16. Halle el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1+i & 2+i & 4+i \\ 0 & 1 & 2 \\ -i & 0 & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1-i & 0 & i \\ 2-i & 1 & 0 \\ 4-i & 2 & -i \end{vmatrix}$

17. Exprese los siguientes números complejos en la forma rectangular:

a) $\dfrac{(3+5i)(2-i)^3}{-1+4i}$

b) $(2+3i)(3-4i)^2$

c) $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$

d) $\dfrac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$

e) $(2+5i)^3$

18. Demuestre que: $Re\left(\dfrac{z_1}{z_1+z_2}\right)+Re\left(\dfrac{z_2}{z_1+z_2}\right)=1$.

19. Si z satisface la ecuación $\sqrt{z}=\dfrac{2}{1-i}+1-4i$, exprese z en forma rectangular.

20. ¿Cuál debe ser la relación entre x e y para que el producto $(x+yi)(2+3i)$ sea un número real?

6.3 Representación geométrica

21. Exprese en forma polar los siguientes números complejos:

a) $-\sqrt{3}+i$

b) $3-3i$

c) $1+i\sqrt{3}$

22. Calcule el módulo, la parte real e imaginaria de: $\dfrac{1+cos(\beta)+i\,sen(\beta)}{1+cos(\beta)-i\,sen(\beta)}$.

23. Demuestre que para todo entero positivo "n"

$$\left[\frac{sen(\alpha)+i\,cos(\alpha)}{sen(\alpha)-i\,cos(\alpha)}\right]^n=cos\left[2n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]+i\,sen\left[2n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

24. Identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) $i^{25}=i$

b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

c) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}$, $[(x,y)\,(0,1)=(x,y)]$

d) $\forall z\in\mathbb{C}$, $z\,z=z^2$

6.4 Notación de Euler

25. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$?

a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

26. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$, determine el desarrollo de $(z + z^{-1})^5$ según el teorema del binomio. A partir de ello, demuestre que: $cos^5(\theta) = \frac{1}{16}(ncos(5\theta) + mcos(3\theta) + \lambda cos(\theta))$ donde m, n, λ son enteros positivos.

27. Exprese en forma polar:

a) $\left[\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^4$ b) $\left[3\left(cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right]^{-3}$

28. Sea $z = 2 + 2i$, halle e interprete geométricamente el producto zi.

29. Si $z - \frac{1}{z}$ es real, demuestre que z es real.

30. Realice las operaciones y reduzca a una forma más simple:

(i) $\left[1+\sqrt{3}i+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right]^3$

(ii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

(iii) $\left[sen(\alpha) - sen(\beta) + i\left(cos(\alpha) - cos(\beta)\right)\right]^n$

31. Determine el módulo, la parte real e imaginaria de:

a) $e^{-i\pi}$ b) $e^{1-i\frac{\pi}{6}}$ c) e^{1+i}

32. Si $z_1 = 7 - i$ y $z_2 = 3 + i$, entonces el módulo del número complejo $e^{\frac{z_1}{z_2}}$ es:

a) e b) e^{-1} c) $2e$ d) 10 e) e^2

33. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \cdots$, encuentre el valor que más se aproxima a z^2.

34. Exprese los siguientes números complejos en forma rectangular:

a) $e^{i\pi}$ b) $-2e^{-i\pi}$ c) $i + e^{i\frac{3\pi}{2}}$ d) $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

35. Exprese en forma polar los siguientes números complejos:

a) $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ b) e^{2+i} c) $2e^{1-i\frac{\pi}{4}}$ d) 2^{3i} e) $3^{-\frac{1}{2}}$ f) 5^{1+i} g) 10^{1-i}

36. Verifique que:

a) $\left(\cos(30^\circ) + i\,\mathrm{sen}(30^\circ)\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = i$

37. Encuentre las cuartas potencias de:

(i) $2\,cis\,\frac{\pi}{4}$ (ii) $\sqrt{3}\,cis\,225^\circ$ (iii) $\frac{1}{2}e^{i15^\circ}$

38. Halle las raíces indicadas y grafíquelas en el plano complejo.

(i) Raíces cúbicas de $27\,cis\,\frac{3\pi}{2}$.

(ii) Raíces cuartas de -1.

(iii) Raíces cuartas de i.

(iv) Raíces cúbicas de $64\cos\pi$.

6.5 Aplicaciones

39. Un vértice de un hexágono regular centrado en el origen es $(0,2)$, determine el resto de sus vértices.

40. Calcule $\sqrt[4]{8+8\sqrt{3}i}$.

41. Determine el número complejo z, igual al cuadrado de su conjugado.

42. Determine las raíces de las siguientes ecuaciones. Considere $\mathrm{Re} = \mathbb{C}$.

    a) $x^2 - 6x + 13 = 0$

    b) $2x^2 + 5x + 6 = 0$

    c) $x^2 - 2(1+i)x + (2i-1) = 0$

    d) $x^3 - 2x + 4 = 0$

    e) $x^2 - 3x + (3-i) = 0$

    f) $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$

43. Demuestre que si z y $\bar{z}$ es un par de números complejos conjugados, entonces z^3 y $(\bar{z})^3$ son también conjugados.

44. Explique cómo están distribuidos en el plano los puntos complejos, que satisfacen la desigualdad:

$$log_{\frac{1}{2}} |z| + log_{\frac{1}{2}} (|z|+1) < log_{\frac{1}{2}} (|z|+5)$$

45. Resuelva la desigualdad: $-2 < 2log_{\frac{1}{3}} \left| x + 1 - \sqrt{5}i \right| < -log_3 2 - 1$.

46. Descomponga en un par de factores lineales complejos el trinomio $a^2 + ab + b^2$.



Capítulo 7

Geometría Plana

Introducción

La geometría es la rama de las matemáticas que estudia idealizaciones en dos y tres dimensiones: los puntos, las rectas, los planos y otros elementos conceptuales derivados de ellos, como polígonos o poliedros. En este capítulo vamos a tratar solamente lo relacionado al plano, lo cual implica trabajar en dos dimensiones.

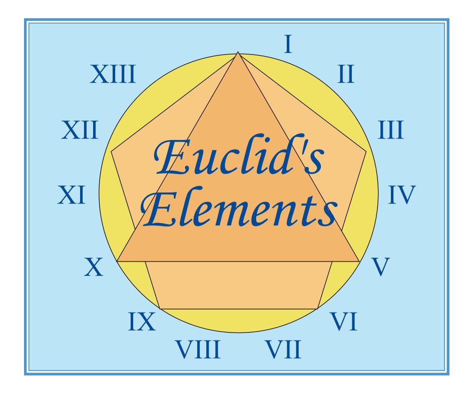


Es razonable pensar que los orígenes de la geometría se remontan a los mismos orígenes de la humanidad, pues seguramente el hombre primitivo clasificaba -aún de manera inconsciente- los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento -informal e intuitivo- a la geometría.

Thales de Mileto fue capaz de medir la altura de la pirámide de Keops y de predecir un eclipse solar aplicando conceptos geométricos.

Uno de los famosos problemas de la geometría griega que heredarían los matemáticos posteriores, denominado la **cuadratura del círculo**, trata de obtener, dado un círculo, un cuadrado cuya área mida exactamente lo mismo que el área del círculo. Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, dibujando en las paredes de su celda cuando fue hecho prisionero por cuestiones políticas. Tampoco pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible. Como curiosidad, el filósofo inglés Hume llegó a escribir un libro con supuestos métodos para resolver el problema. Hume no tenía conocimientos matemáticos serios y nunca aceptó que todos sus métodos fallaban.

Es importante observar que este tipo de problemas eran resueltos utilizando únicamente la regla y el compás, únicos instrumentos (además del papel y el lápiz, por supuesto) válidos en la geometría euclidiana.



El libro de *"Los Elementos"* de Euclides (300 a.C.), expone los conocimientos geométricos de la Grecia clásica, deduciéndolos a partir de postulados considerados como los más evidentes y sencillos.

La geometría de Euclides, además de ser un poderoso instrumento de razonamiento deductivo, ha sido extremadamente útil en muchos campos del conocimiento como la física, la astronomía, la química y diversas ingenierías.

7.1 Figuras Geométricas

Objetivos

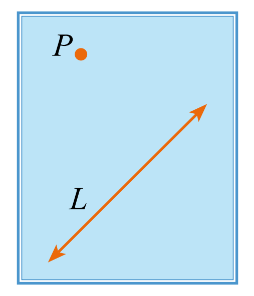
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una región del plano, indicar si es una figura convexa o no convexa, justificando adecuadamente su respuesta.

* Dados varios puntos del plano, reconocer si son o no colineales, justificando adecuadamente su respuesta.

* Distinguir entre figuras autocongruentes y no autocongruentes, simétricas y asimétricas.

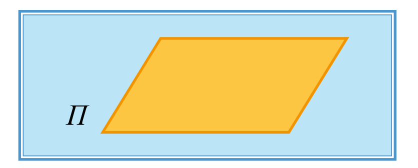
El desarrollo de la geometría depende del avance en las definiciones, sin embargo, las propiedades de las figuras geométricas son posibles de enunciar sin hacer referencia a éstas.



El punto, la recta y el plano son considerados conceptos primitivos, o sea que no es posible definirlos en base a otros elementos ya conocidos. El **punto** es uno de los conceptos geométricos fundamentales, suele representarse sin relación a otra figura, como un círculo pequeño y puede denotarse con una letra mayúscula de imprenta, por ejemplo: P. La **recta** es el lugar geométrico de puntos continuamente sucesivos del plano en una misma dirección y suele denotarse con la letra L.

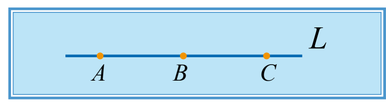
Capítulo 7

Geometría Plana

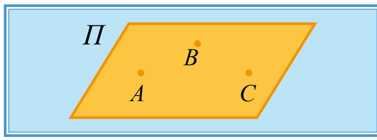


Se acostumbra representar el **plano** como una figura delimitada por bordes rectos, y suele denotarse con una letra del alfabeto griego, por ejemplo: Π. Si se tiene más de un punto, recta o plano, se sugiere el uso de subíndices para identificarlos.

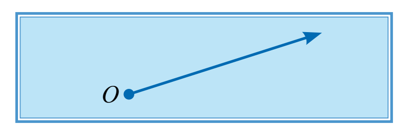
A continuación se definen algunos elementos importantes en el uso de la geometría.



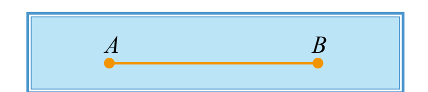
Puntos colineales son aquellos que pertenecen a la misma recta L.



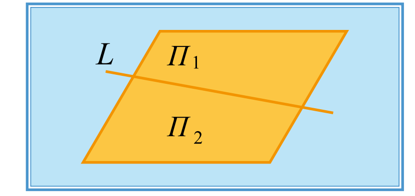
Puntos coplanares son los que pertenecen a un mismo plano Π.



Semirrecta o rayo es el conjunto de todos los puntos de una recta que están a un mismo lado de un punto de ésta.



Segmento de recta es un subconjunto de la recta que está limitado por dos puntos que pertenecen a ella. Para fines prácticos, se sobreentenderá que $\overline{AB}$ también representa la longitud de este segmento.



Semiplano, es el conjunto de puntos del plano que están a un mismo lado de una recta L, como Π_1 o Π_2.

Definición 7.1 (Convexidad)

Una figura F se denomina convexa, si y sólo si, para cada par de puntos que pertenecen a la figura, el segmento de recta definido por ambos puntos está incluido en la figura, es decir:

$$F \text{ es convexa} \equiv \forall\, P_1, P_2 \in F\left(\overline{P_1P_2} \subseteq F\right).$$

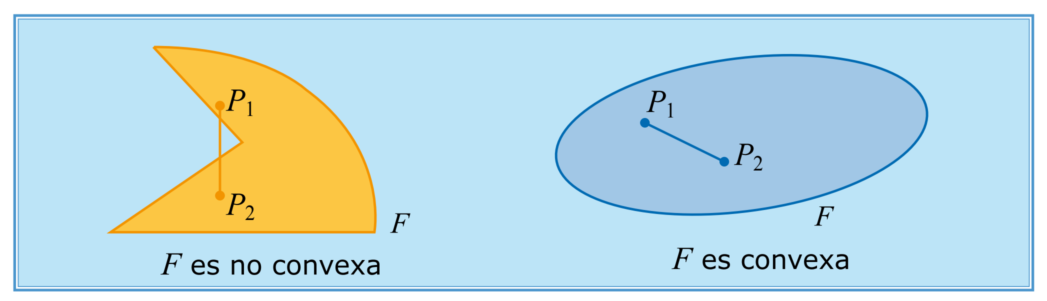


Figura 7.1: Convexidad de figuras.

Ejemplo 7.1 Figuras geométricas.

El hombre ha empleado sencillas figuras geométricas planas que han sido de mucha utilidad para su desarrollo, desde un punto de vista decorativo hasta tecnológico.



La congruencia es la relación entre segmentos, ángulos y figuras geométricas con igual medida, tal que, al trasladarse, rotarse y/o reflejarse para superponerse una a otra, se tiene que estas figuras coinciden. Observe a continuación:

La autocongruencia de una figura se encuentra estrechamente vinculada con la **simetría**, la cual se produce cuando al trazar una recta, la figura queda dividida en dos partes, tal que una es la reflexión de la otra, a esta recta se la denomina **eje de simetría**.

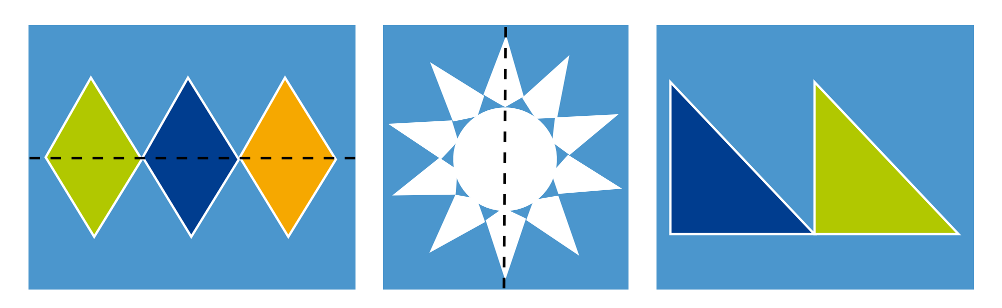


Figura 7.2: Autocongruencia de Figuras.




Figura 7.3: No autocongruencia de figuras.

En los dos últimos ejemplos las figuras no son autocongruentes, ya que al dividirlas por cualquier recta, las partes que se obtienen no se pueden superponer perfectamente.

En caso de no ser el reflejo exacto, a la figura se la considerará asimétrica.

Observe:

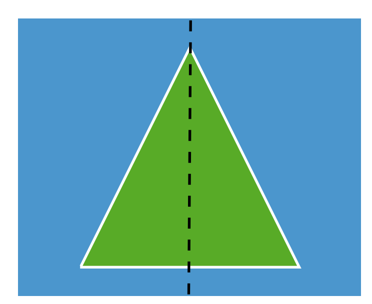



Figura 7.4: Simetría o asimetría de figuras.

En conclusión, podemos decir que cuando una figura es simétrica es autocongruente, ya que sus segmentos, ángulos y lados, al ser divididos por un eje de simetría o superpuestos, coinciden de manera exacta.

7.2 Rectas en el plano

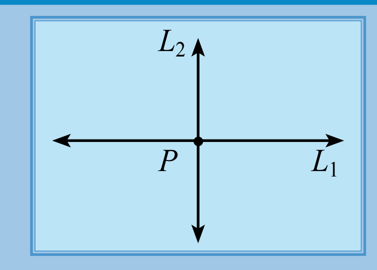
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Aplicar conceptos sobre rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas.

Dos rectas en el plano pueden ser **perpendiculares**, **paralelas** u **oblicuas**. En el caso de las rectas perpendiculares u oblicuas que tienen un punto en común P, se las denomina rectas **secantes**.

Definición 7.2 (Perpendicularidad)



Una recta es perpendicular a otra cuando al intersecarse en un punto P, determinan en el plano que las contiene, cuatro ángulos congruentes cuya medida es de 90°. La notación para la perpendicularidad es:

$L_1 \perp L_2$ y se lee "L_1 es perpendicular a L_2".

En el plano, un punto perteneciente o exterior a una recta está contenido en una y sólo una recta perpendicular a dicha recta.

Las propiedades de la perpendicularidad entre rectas son:

- Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera. (*Simétrica*).

$$(L_1 \perp L_2) \Rightarrow (L_2 \perp L_1)$$

- Si dos rectas al intersecarse forman ángulos adyacentes congruentes, son perpendiculares.

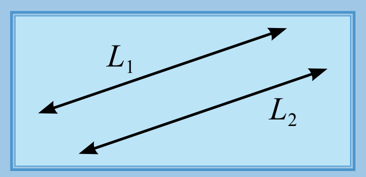
- Los lados de un ángulo recto y sus semirrectas opuestas, determinan rectas perpendiculares.

Ejemplo 7.2 Rectas perpendiculares.

El símbolo de la Cruz Roja, las esquinas de un libro o la intersección de las calles de una ciudad, representan ejemplos de rectas perpendiculares.



Definición 7.3 (Paralelismo)



Una recta es paralela a otra cuando no se intersecan o son coincidentes. La notación para el paralelismo es:

$L_1 \parallel L_2$ y se lee "L_1 es paralela a L_2".

En el plano, un punto exterior a una recta está contenido en una y sólo una recta paralela a dicha recta.

Las propiedades del paralelismo entre rectas son:

- Toda recta es paralela a sí misma. (*Reflexiva*).

$$L \parallel L$$

- Si una recta es paralela a otra, aquella es paralela a la primera. (*Simétrica*).

$$(L_1 \parallel L_2) \Rightarrow (L_2 \parallel L_1)$$

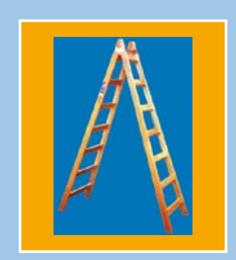
- Si una recta es paralela a otra, y ésta a su vez paralela a una tercera, la primera es paralela a la tercera. (*Transitiva*).

$$[(L_1 \parallel L_2) \wedge (L_2 \parallel L_3)] \Rightarrow (L_1 \parallel L_3)$$

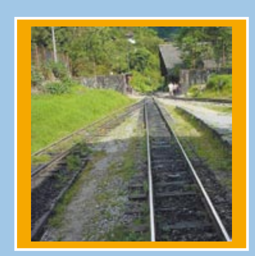
- Todas las rectas paralelas tienen la misma dirección.

Ejemplo 7.3 Rectas paralelas.

Las escaleras, las franjas de algunas banderas y los rieles sobre los cuales se traslada un tren, representan ejemplos de rectas paralelas.







Relacionando perpendicularidad, paralelismo e intersección entre rectas, se obtienen las siguientes propiedades:

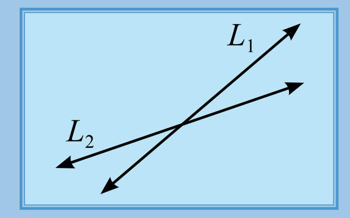
- En el plano, dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

$$[(L_1 \perp L_3) \wedge (L_2 \perp L_3)] \Rightarrow (L_1 \parallel L_2)$$

- Si una recta interseca a una de dos paralelas, interseca también a la otra.

$$[(L_1 \cap L_2 \neq \emptyset) \wedge (L_2 \parallel L_3)] \Rightarrow (L_1 \cap L_3 \neq \emptyset)$$

Definición 7.4 (Rectas oblicuas)



Dos rectas oblicuas son aquellas que no son perpendiculares ni paralelas.

L_1 y L_2 son oblicuas $\equiv \neg(L_1 \parallel L_2) \wedge \neg(L_1 \perp L_2)$.

7.3 Ángulos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas tres rectas, tal que una de ellas es secante a las otras dos, identificar los ángulos internos, externos, opuestos por el vértice, alternos internos, alternos externos, correspondientes y conjugados que se forman.

El concepto de ángulo ya fue tratado oportunamente en el capítulo IV, sección 1, de este texto. Sin embargo, para el análisis geométrico que nos proponemos desarrollar, es necesario definir diferentes tipos de ángulos.

Al intersecar dos rectas en el plano se forman cuatro ángulos. De ellos, son **ángulos opuestos por el vértice** aquellos que poseen sólo el vértice en común y no son consecutivos.

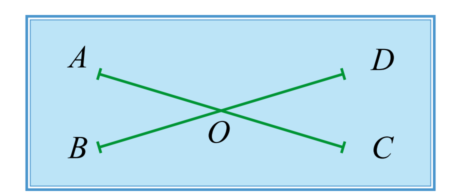


Figura 7.5: $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle COD$ son ángulos opuestos por el vértice.

Geometría Plana

Si intersecamos dos rectas oblicuas L_1 y L_2 con una recta secante L_3 (recta que interseca a una figura en puntos diferentes), se forman de manera natural ocho ángulos, cuatro en cada punto de intersección.

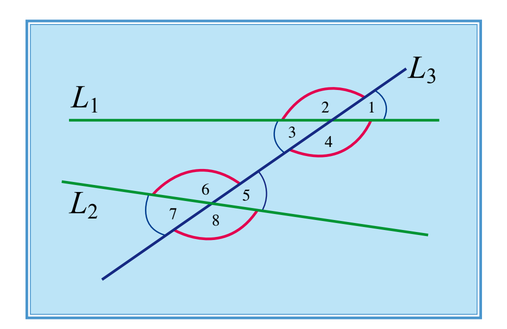


Figura 7.6: Ángulos en rectas secantes.

Se denominan **ángulos externos** a los ángulos que están en la región externa a las rectas L_1 y L_2. De esta manera, son externos los ángulos 1, 2, 7 y 8.

Se denominan **ángulos internos** a los ángulos que están en la región interna a las rectas L_1 y L_2. De esta manera, son internos los ángulos 3, 4, 5 y 6.

Se denominan **ángulos correspondientes** a los ángulos no consecutivos que están en el mismo semiplano determinado por la recta secante L_3. Uno de los ángulos es interno y el otro externo. De esta manera, son correspondientes los pares de ángulos $1–5$, $2–6$, $3–7$, $4–8$.

Se denominan **ángulos alternos externos** a los ángulos que están ubicados externamente con respecto a las rectas L_1 y L_2, y en distintos semiplanos determinados por la recta secante L_3. De esta manera, son alternos externos los pares de ángulos $1–7$ y $2–8$.

Se denominan **ángulos alternos internos** a los ángulos que están ubicados internamente con respecto a las rectas L_1 y L_2, y en distintos semiplanos determinados por la recta secante L_3. De esta manera, son alternos internos los pares de ángulos $3–5$ y $4–6$.

Se denominan **ángulos conjugados (o contrarios) externos** a los ángulos externos que están ubicados en el mismo semiplano respecto a la recta secante. De esta manera, son conjugados externos los pares de ángulos $1–8$ y $2–7$.

Se denominan **ángulos conjugados (o contrarios) internos** a los ángulos internos que están ubicados en el mismo semiplano respecto a la recta secante. De esta manera, son conjugados internos los pares de ángulos $3–6$ y $4–5$.

En el caso de que dos rectas paralelas L_1 y L_2 sean intersecadas por una secante L_3, se verifica que los ángulos correspondientes son de igual medida, así como los ángulos alternos internos y alternos externos. En resumen, para el caso de rectas paralelas intersecadas por una secante, los ángulos 1–3–5–7 son de igual medida entre sí, del mismo modo que los ángulos 2–4–6–8.

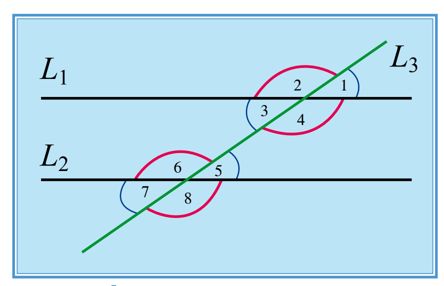


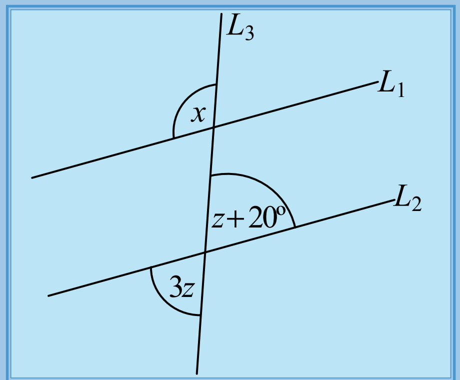
Figura 7.7: Ángulos en rectas secantes.

Propiedades

- Las medidas de los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos también lo son.
- Los ángulos internos a un mismo lado de la recta secante a dos rectas paralelas, son suplementarios.
- Los ángulos externos a un mismo lado de la recta secante a dos rectas paralelas, son suplementarios.
- Toda recta secante a dos rectas paralelas forma ángulos alternos externos congruentes.
- Toda recta secante a dos rectas paralelas forma ángulos alternos internos congruentes.

Ejemplo 7.4 Ángulos.

Si las rectas L_1 y L_2 mostradas en la figura adjunta son paralelas, x y z son las medidas de los ángulos en grados sexagesimales, determine el valor de $x - z$.



Solución:

Como los ángulos de medida $3z$ y $z+20^{o}$ son opuestos por el vértice, tenemos:

$$3z = z + 20^{o}$$
$$2z = 20^{o}$$
$$z = 10^{o}$$

Como los ángulos de medida x y $3z$ son conjugados externos:

$$x + 3z = 180^{o}$$
$$x = 180^{o} - 3z$$
$$x = 180^{o} - 3(10^{o})$$
$$x = 150^{o}$$

El valor solicitado es:

$$x - z = 150^{o} - 10^{o} = 140^{o}$$

7.4 Poligonales y polígonos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dados varios puntos no colineales del plano, identificar la poligonal y el polígono que forman.

* Dado un polígono simple, identificar su tipo según el número de lados.

* Dado un polígono regular, explicar sus principales características.

Una **poligonal** es una línea continua que se obtiene por la unión de segmentos de rectas que tienen distinta dirección.

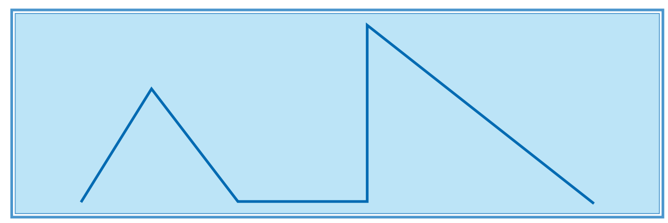


Figura 7.8: Poligonal.

El conjunto $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \overline{P_3P_4} \cup ... \cup \overline{P_nP_1}$, de segmentos consecutivos no colineales se denomina **línea poligonal cerrada** de n lados, $(n \geq 3)$. Los puntos P_1, P_2, ..., P_n se denominan **vértices** de la poligonal y los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_nP_1}$, **lados** de la poligonal.

Si los segmentos de la línea poligonal cerrada sólo se intersecan al ser consecutivos (en los vértices), entonces la poligonal divide al plano en dos partes: la una interior abarcada por la poligonal, y la otra exterior a la poligonal.

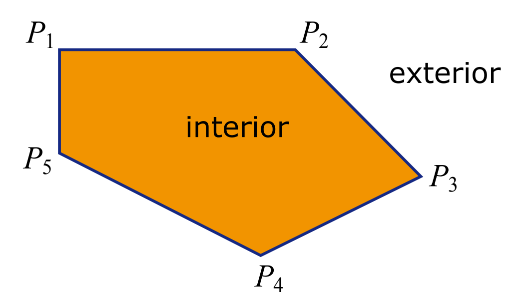


Figura 7.9: Línea poligonal cerrada.

Definición 7.5 (Polígono Simple)

La unión de toda poligonal con su interior se denomina polígono simple.

Un polígono simple puede ser convexo o no convexo.

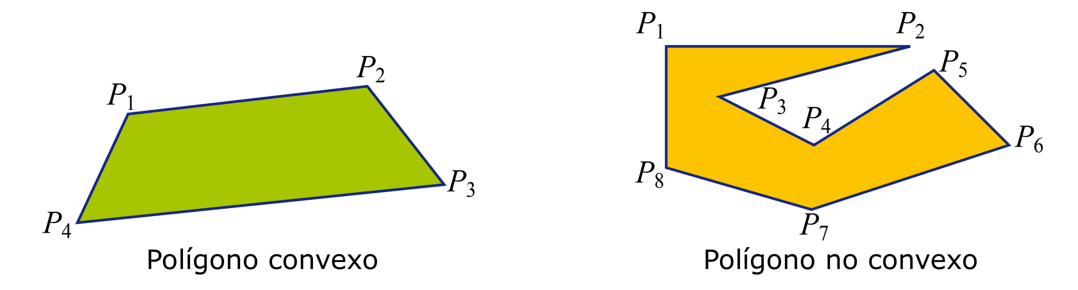


Figura 7.10: Convexidad de polígonos.

En el presente texto nos interesa el estudio de los **polígonos simples convexos.** Por ello, cada vez que en lo posterior se utilice el término polígono, se sobreentenderán ambas características. Los elementos fundamentales de los polígonos son: vértices, lados, diagonales, ángulos interiores y exteriores.

Una **diagonal** es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono. En un polígono, las diagonales están en su interior.

De acuerdo con el número de lados, los polígonos reciben diferentes nombres.

Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Enéagono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Isodecágono

Cuadro 7.1: Nombres de polígonos según número de lados.

Ejemplo 7.5 Polígonos.

Las formas de las señales de tránsito, que son un conjunto de símbolos estandarizados a nivel mundial, constituyen un claro ejemplo del uso de polígonos en la vida diaria.







Propiedades

- La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $(n - 2)(180°)$.

- La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono cualquiera es constante e igual a $360°$.

- El número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice de un polígono de n lados es $(n - 3)$.

- El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ejemplo 7.6 Polígonos.

En un polígono se han trazado un total de 35 diagonales. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos interiores de ese polígono.

Solución:

Primero debemos calcular el número n de lados del polígono, utilizando la fórmula que lo relaciona con el número D de diagonales: $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

En este caso $D = 35$ y por lo tanto, nos queda:

$\frac{n(n-3)}{2} = 35$

$n^2 - 3n = 70$

$n^2 - 3n - 70 = 0$

$(n - 10)\,(n + 7) = 0$

Entonces:

$(n - 10 = 0) \vee (n + 7 = 0)$

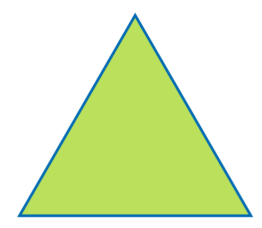
De donde $n = 10$, lo cual quiere decir que se trata de un decágono. No se considera el valor de $n = -7$, porque no es solución geométrica.

Luego, la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono en cuestión es $(10 - 2)(180º) = (8)(180º) = 1440º$.

Definición 7.6 (Polígono Regular)

Un polígono de n lados se dice que es regular, si y sólo si todos sus lados tienen igual longitud y sus ángulos tienen igual medida.

Ejemplos de **polígonos regulares** son el triángulo equilátero y el cuadrado.



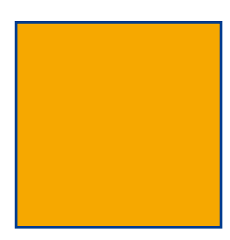


Figura 7.11: Polígonos regulares.

Es de observarse que todo polígono regular es convexo.

Ejemplo 7.7 Polígonos.

Encuentre la razón entre las medidas del ángulo exterior e interior en un dodecágono regular.

Solución:

El ángulo exterior de un dodecágono regular $(12$ lados$)$ mide: $\dfrac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}$

y el ángulo interior, que es el suplemento del ángulo exterior, mide 150°.

Luego, la razón requerida es: $\dfrac{30^{\circ}}{150^{\circ}} = \dfrac{1}{5}$.

7.5 Triángulos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un triángulo, clasificarlo de acuerdo a la longitud de sus lados y a la medida de sus ángulos.

* Dado un triángulo, identificar sus rectas y puntos notables.

Definición 7.7 (Triángulos)

Un triángulo es un polígono de tres lados. Dados tres puntos no colineales A, B y C, éstos determinan el triángulo ABC.

Las velas de los barcos presentan diferentes formas de triángulos, los mismos que pueden clasificarse según la longitud de sus lados o la medida de sus ángulos.



Figura 7.12: Velas triangulares de los barcos.

Clasificación de triángulos por la longitud de sus lados

- **Escaleno:** Es un triángulo que no tiene lados congruentes.
- **Isósceles:** Es un triángulo que tiene dos lados congruentes.
- **Equilátero:** Es un triángulo que tiene sus tres lados congruentes.

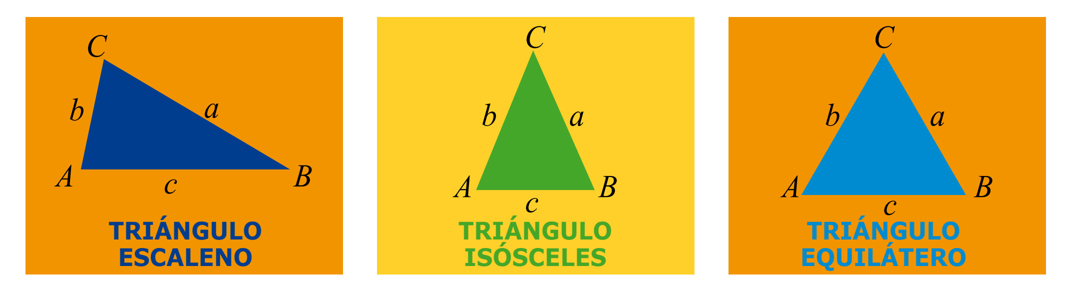


Figura 7.13: Tipos de triángulos según las longitudes de sus lados.

Clasificación de triángulos por la medida de sus ángulos

- **Equiángulo:** Es un triángulo que tiene sus tres ángulos congruentes.
- **Rectángulo:** Es un triángulo que tiene un ángulo recto.
- **Acutángulo:** Es un triángulo que tiene tres ángulos agudos.
- **Obtusángulo:** Es un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

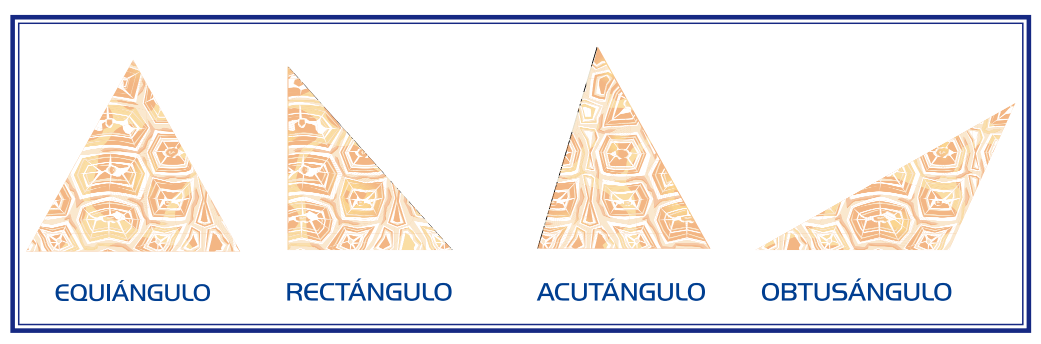


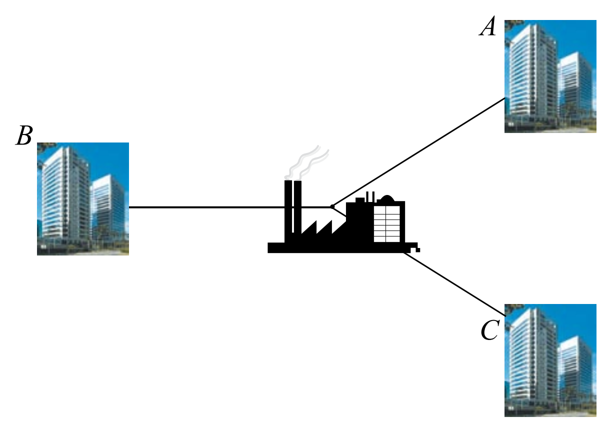
Figura 7.14: Tipos de triángulos según las medidas de sus ángulos.

Propiedades

- La suma de las medidas de los ángulos interiores en todo triángulo es 180°.
- La suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, es igual a 90°.
- Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60°.
- En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es la suma de las medidas de los ángulos interiores no contiguos.
- En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
- La suma de las medidas de los ángulos exteriores de cualquier triángulo es igual a la medida de cuatro ángulos rectos (360°).
- Todo triángulo equiángulo es equilátero, y viceversa, todo triángulo equilátero es equiángulo.

Rectas y puntos notables en el triángulo

Un fabricante manufactura un producto que se vende en tres ciudades A, B y C. Se desea construir una fábrica en un punto que equidiste de las tres ciudades. A continuación se describen las rectas y puntos notables de un triángulo con los cuales se pueden resolver problemas como éste, entre otros.



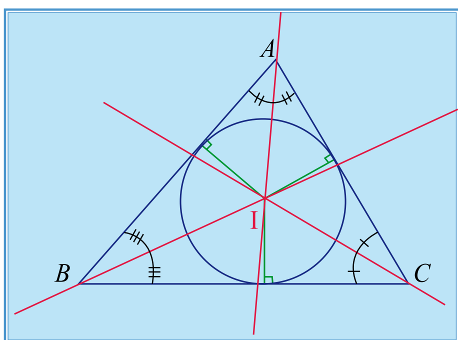


Figura 7.15: Incentro y bisectrices.

La **bisectriz** de un ángulo interior es la recta que lo divide en dos ángulos de igual medida. Las tres bisectrices del triángulo se intersecan en un único punto, el cual equidista de los lados del triángulo. Este punto se denomina **incentro**, denotado por I en la figura, y es el centro de la **circunferencia inscrita** (circunferencia que es tangente a los lados del triángulo) en el triángulo.

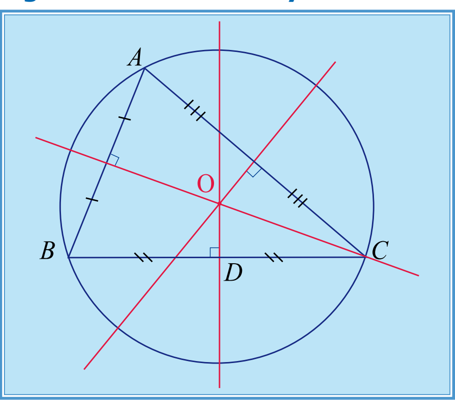


Figura 7.16: Circuncentro y mediatrices.

La **mediatriz** de un segmento $\overline{AB}$ es la recta perpendicular que lo divide en dos segmentos de igual longitud. Las tres mediatrices del triángulo se intersecan en un único punto, el cual equidista de los vértices del triángulo. Este punto se denomina **circuncentro**, denotado por O en la figura, y es el centro de la **circunferencia circunscrita** (circunferencia que contiene los vértices del triángulo) al triángulo.

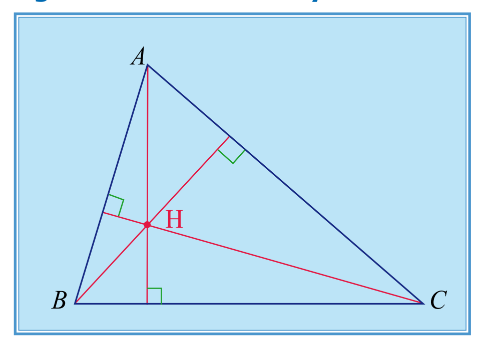


Figura 7.17: Ortocentro y alturas.

La **altura** relativa a un lado base del triángulo es un segmento de recta perpendicular al lado base, trazado desde el vértice opuesto a la base o su prolongación. Las tres alturas del triángulo se intersecan en un único punto. Este punto se denomina **ortocentro**, denotado por H en la figura. El término se deriva de *orto*, *recto*, en referencia al ángulo formado entre las bases y la alturas.

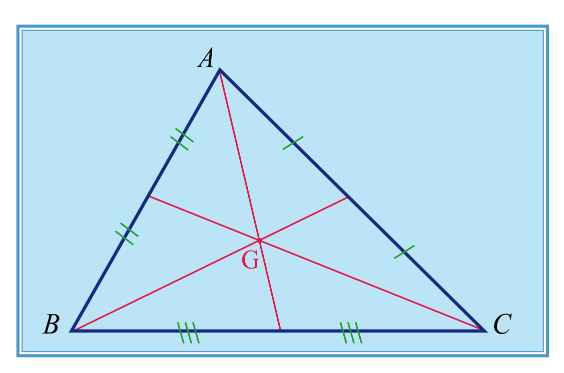


Figura 7.18: Baricentro y medianas.

La **mediana** de un lado del triángulo es el segmento que tiene por extremos el punto medio del lado y el vértice opuesto al mismo. Las tres medianas del triángulo se intersecan en un único punto. Este punto se denomina **baricentro**, denotado por G en la figura. El baricentro coincide con la noción física de **centro de gravedad**, también llamado **centro de masa**.

En un triángulo isósceles, la mediatriz, la altura y la mediana respecto al lado desigual (base del triángulo), coinciden.

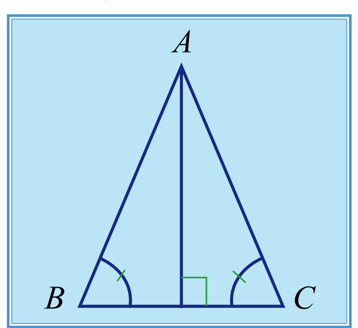


Figura 7.19: Triángulo isósceles.

En un triángulo equilátero, el incentro, el circuncentro, el ortocentro y el baricentro coinciden, y están situados en una de las alturas a una distancia de $\frac{2}{3}$ respecto del vértice. En un triángulo rectángulo, el circuncentro está situado en el punto medio de la hipotenusa.

Dependiendo del tipo de triángulo, los puntos O, H y G pueden localizarse en la región interna o externa del triángulo.

Ejemplo 7.8 Altura de un triángulo equilátero.

Demuestre que la longitud de la altura de un triángulo equilátero es igual al producto de la mitad de la longitud del lado por $\sqrt{3}$.

Solución:

Como el triángulo es equilátero, las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos son iguales. Los ángulos A, B y C miden 60°.

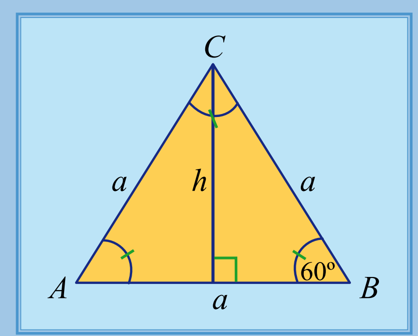
La altura h divide al triángulo en dos triángulos rectángulos, por lo tanto, podemos aplicar funciones trigonométricas.

$$sen\,(B) = \frac{h}{a}$$

$$sen\,(60^o) = \frac{h}{a}$$

$$h = a\,sen\,(60^o)$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



Lo cual demuestra el enunciado.

7.6 Semejanza y Congruencia

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Aplicar el teorema de Thales, para establecer proporcionalidades entre segmentos.
* Dados dos polígonos, reconocer si son semejantes o congruentes.
* Dados dos triángulos, aplicar los criterios de semejanza y congruencia existentes en la resolución de problemas.

Los diseñadores industriales construyen modelos de proyectos que luego se fabricarán en tamaño natural. El modelo del aeroplano tiene la misma forma que el avión real.

Las figuras que guardan cierta proporcionalidad manteniendo la misma forma, se denominan **semejantes**. Este concepto también se aplica en diseños arquitectónicos. El símbolo de semejanza a utilizar en este texto es ~.

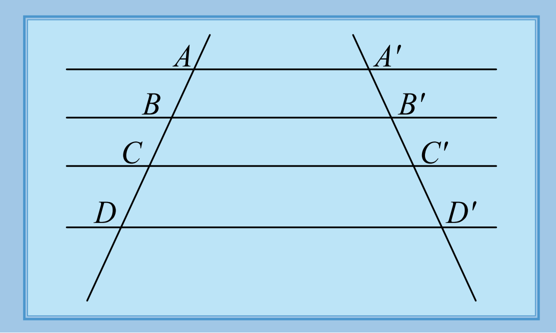
Los automóviles se fabrican utilizando la producción en cadena. Los componentes producidos deben ser de idéntico tamaño y forma, para poderlos emplear en cualquier automóvil de la línea de montaje. Los repuestos también deben ser idénticos.

En geometría, a las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma se les denomina **congruentes**. El símbolo de congruencia a utilizar en este texto es ≅.

Geometría Plana

Teorema 7.1 (Teorema de Thales)

Dado un conjunto de al menos tres rectas paralelas, intersecadas por dos transversales, las rectas paralelas determinan en las rectas secantes segmentos correspondientes proporcionales.

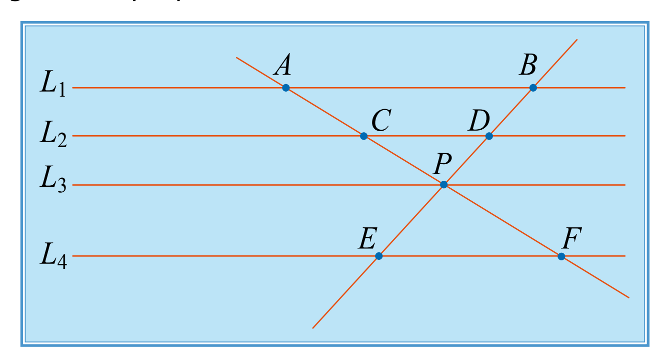


Así, en la figura anterior, las rectas AA', BB', CC' y DD' son paralelas, entonces el teorema de Thales nos dice que las longitudes de los segmentos en uno de los lados son proporcionales a las longitudes de los segmentos correspondientes en el lado opuesto. Matemáticamente, esta relación de proporcionalidad entre las longitudes de los segmentos de recta se expresaría como:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

Corolario del Teorema de Thales

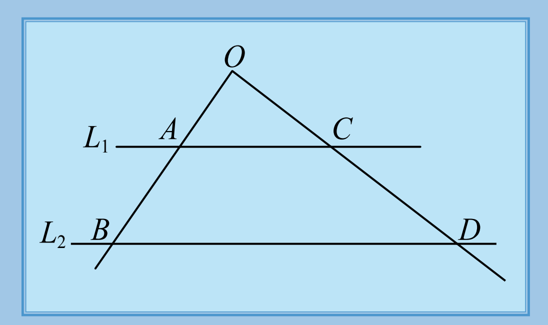
Si los lados de un ángulo o sus prolongaciones se intersecan con un haz de rectas paralelas, los segmentos correspondientes que se determinan en los lados del ángulo son proporcionales.



En la figura, si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$, entonces: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}$ o bien $\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$

Ejemplo 7.9 Aplicación del teorema de Thales.

En el siguiente bosquejo, si $L_1 \parallel L_2$, $\overline{OA} = 2x + 12$, $\overline{AB} = 4x$, $\overline{OC} = 5x + 8$, $\overline{CD} = 4x + 1$, determine el valor de x y las longitudes de dichos segmentos.



Solución:

Si se traza una recta por el punto O paralela a L_1 y L_2 , se puede aplicar el corolario del teorema de Thales y se tiene la proporción:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{2x + 12}{5x + 8} = \frac{4x}{4x + 1}$$

$$(2x + 12)(4x + 1) = 4x\,(5x + 8)$$

$$8x^2 + 50x + 12 = 20x^2 + 32x$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$.

El segundo valor debe descartarse pues conduce a valores negativos para las longitudes de los segmentos.

Luego, nos queda $x = 2$, que sí es válido como medida.

De esta manera las longitudes de los segmentos son: $\overline{OA} = 16u$, $\overline{AB} = 8u$, $\overline{OC} = 18u$ y $\overline{CD} = 9u$, donde u representa unidades.

Semejanza y congruencia de Polígonos

Como ya se mencionó anteriormente, el término semejanza induce a **similitud en forma** de dos objetos y el término congruencia induce a **igualdad** de dos objetos. Para expresar e identificar con propiedad estas características que pueden tener dos polígonos, se emplean las siguientes definiciones.

Definición 7.8 (Polígonos semejantes)

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ los vértices de un polígono de n lados y $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ los vértices de otro polígono, también de n lados. Los dos polígonos se denominan semejantes, si y sólo si existe una función biyectiva definida entre los vértices del primer polígono, con imágenes en los vértices del segundo, construida de tal manera que a P_1 le corresponde Q_1, a P_2, Q_2 y así sucesivamente; y además, se cumple que:

1) $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}} = \dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{Q_2Q_3}} = \cdots = \dfrac{\overline{P_nP_1}}{\overline{Q_nQ_1}} = k,\ k \in \mathbb{R}^+$

2) $[m(\measuredangle P_1) = m(\measuredangle Q_1)] \wedge [m(\measuredangle P_2) = m(\measuredangle Q_2)] \wedge \ldots \wedge [m(\measuredangle P_n) = m(\measuredangle Q_n)]$

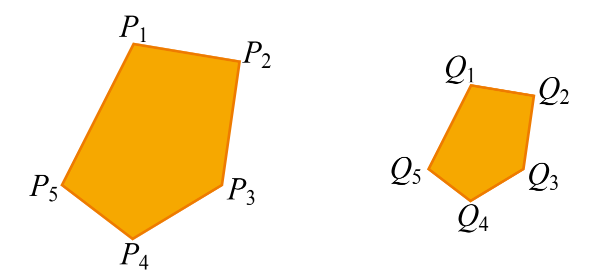


Figura 7.20: Polígonos semejantes.

Definición 7.9 (Polígonos congruentes)

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ los vértices de un polígono de n lados y $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ los vértices de otro polígono, también de n lados. Los dos polígonos se denominan congruentes, si y sólo si existe una función biyectiva definida entre los vértices del primer polígono, con imágenes en los vértices del segundo, construida de tal manera que, a P_1 le corresponde Q_1, a P_2, Q_2 y así sucesivamente, y además la longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{Q_1Q_2}$, etc.; y, las medidas de $\measuredangle P_1, \measuredangle P_2, \ldots, \measuredangle P_n$ son iguales a las medidas de $\measuredangle Q_1, \measuredangle Q_2, \ldots, \measuredangle Q_n$, respectivamente.

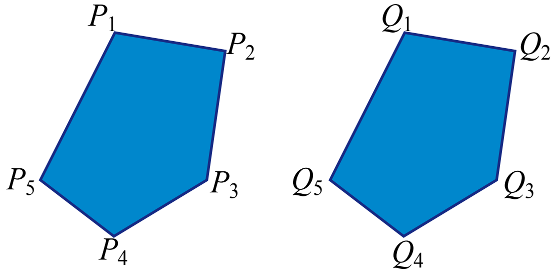


Figura 7.21: Polígonos congruentes.

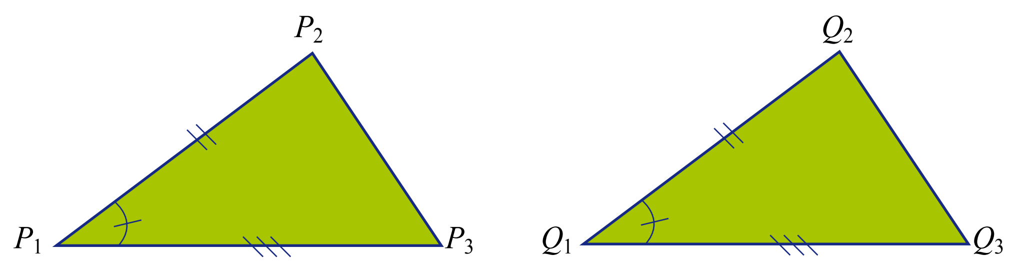
Obsérvese que el concepto de semejanza es más extenso que el de congruencia. Dos polígonos semejantes para los cuales $k = 1$, son congruentes.

Los polígonos más elementales son los triángulos, por lo cual a continuación daremos criterios para determinar la congruencia y semejanza de triángulos.

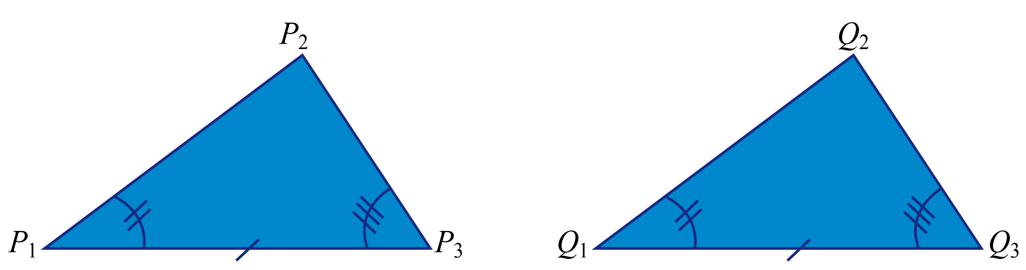
Congruencia y semejanza de Triángulos

En la práctica, es muy útil poder determinar con rapidez la **congruencia** de triángulos. Para ello existen los siguientes criterios:

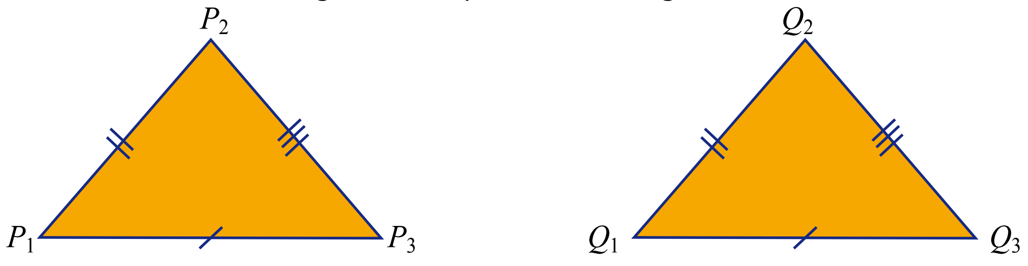
Criterio LAL (LADO-ÁNGULO-LADO): Dos triángulos son congruentes si tienen un ángulo de igual medida, formado por lados de longitudes iguales.



Criterio ALA (ÁNGULO-LADO-ÁNGULO): Dos triángulos son congruentes si tienen un lado de igual longitud y los ángulos adyacentes a ese lado son correspondientemente de igual medida.

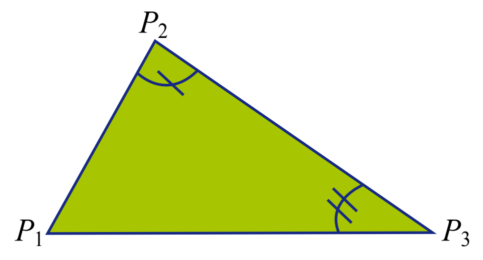


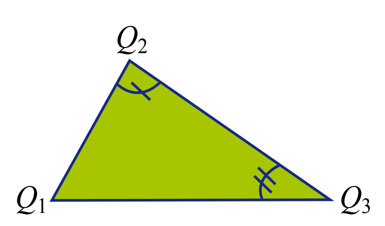
Criterio LLL (LADO-LADO-LADO): Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados de longitudes respectivamente iguales.



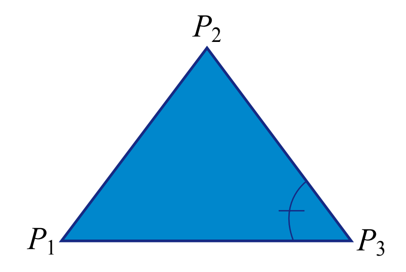
Para determinar la **semejanza** de triángulos, se puede emplear alguno de los siguientes criterios:

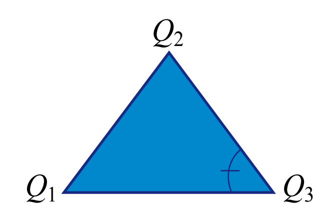
Criterio AA (ÁNGULO-ÁNGULO): Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente de igual medida.



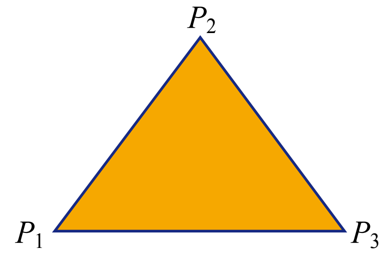


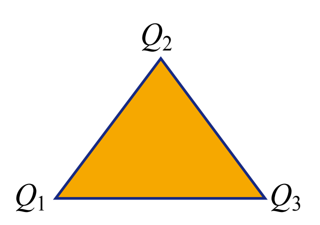
Criterio ALL (ÁNGULO-LADO-LADO): Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo con igual medida y las longitudes de los lados de ese ángulo son proporcionales; esto es, $\dfrac{\overline{P_1 P_3}}{\overline{Q_1 Q_3}} = \dfrac{\overline{P_2 P_3}}{\overline{Q_2 Q_3}} = k$; y, además $m(\measuredangle P_3) = m(\measuredangle Q_3)$.





Criterio LLL (LADO-LADO-LADO): Dos triángulos son semejantes si las longitudes de sus tres lados son proporcionales: $\dfrac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{Q_1 Q_2}} = \dfrac{\overline{P_2 P_3}}{\overline{Q_2 Q_3}} = \dfrac{\overline{P_3 P_1}}{\overline{Q_3 Q_1}} = k$.



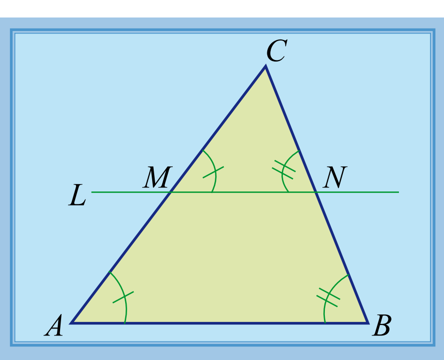


Ejemplo 7.10 Semejanza de triángulos.

Demostrar que una recta paralela a un lado de un triángulo que interseca los otros dos, determina en estos últimos, segmentos proporcionales.

Solución:

Hipótesis: ΔABC cualquiera, $L \parallel \overline{AB}$, M y N puntos de intersección de la recta L con los lados del triángulo.



Tesis: $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Solución:

$\measuredangle NMC \cong \measuredangle BAC$ Ángulos correspondientes en rectas paralelas intersecadas por una transversal.

$\measuredangle CNM \cong \measuredangle CBA$ Ángulos correspondientes en rectas paralelas intersecadas por una transversal.

$\therefore \Delta CBA \sim \Delta CNM$ Criterio AA de semejanza de triángulos.

$\Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CN}}$ Lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

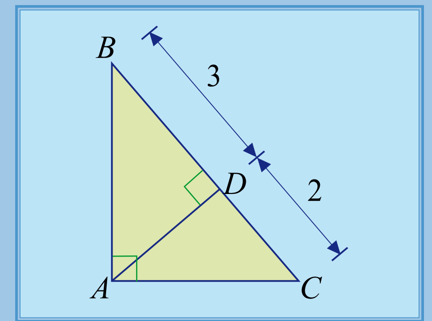
$\Rightarrow \frac{\overline{CA} - \overline{CM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CB} - \overline{CN}}{\overline{CN}}$ Propiedades de las proporciones.

$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{CN}}$ Ver figura.

$\Rightarrow \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ Invirtiendo razones.

Ejemplo 7.11 Semejanza de triángulos.

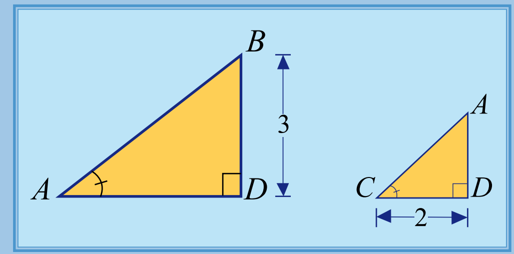
De acuerdo a la figura siguiente, donde $\overline{BD} = 3cm$ y $\overline{CD} = 2cm$, determine la longitud del segmento $\overline{AD}$.



Solución:

De acuerdo al criterio AA, los triángulos ABD y CAD son semejantes ya que se cumple que:

$$m(\measuredangle BDA) = m(\measuredangle ADC) = 90^o$$
$$m(\measuredangle ABD) = m(\measuredangle CAD)$$
$$m(\measuredangle DAB) = m(\measuredangle DCA)$$



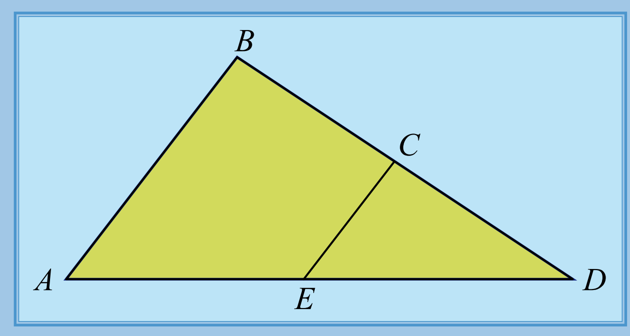
Se puede establecer proporcionalidad entre las longitudes de los lados:

$$\frac{3}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{2}$$

y despejando, tenemos que $\overline{AD}^2 = 6$. Por lo tanto, $\overline{AD} = \sqrt{6}\ cm$.

Ejemplo 7.12 Semejanza de triángulos.

Si en la figura adjunta $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{BC} = 2u$, $\overline{CD} = 3u$ y $\overline{AD} = 6u$, determine el valor de $\overline{AE}$.



Solución:

Los triángulos ABD y ECD son semejantes, por lo tanto se cumple que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}}.$$

Es decir:

$$\frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD} - \overline{AE}}.$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$\frac{2+3}{6} = \frac{3}{6-\overline{AE}}$$

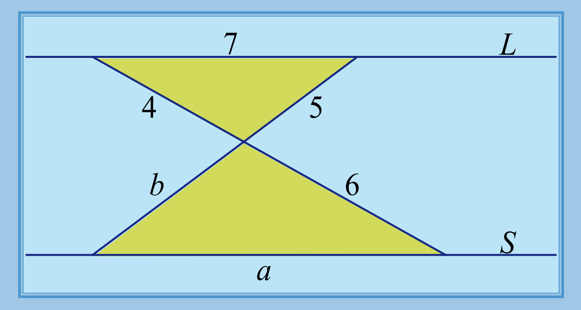
$$30 - 5\,\overline{AE} = 18$$

$$5\,\overline{AE} = 12$$

$$\overline{AE} = \frac{12}{5}\,u$$

Ejemplo 7.13 Semejanza de triángulos.

Si en la figura adjunta las rectas L y S son paralelas, determine las longitudes de los lados a y b mostrados:



Solución:

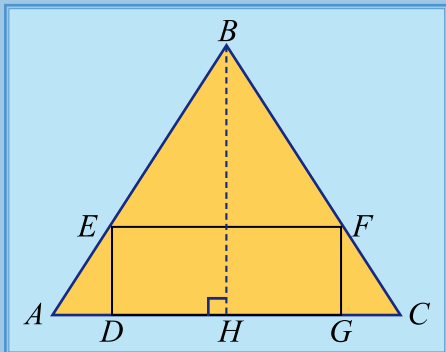
Puesto que los dos triángulos son semejantes, aplicando el teorema de Thales, tenemos:

$$\left(\frac{a}{7} = \frac{6}{4}\right) \Leftrightarrow a = \frac{21}{2}\,u$$

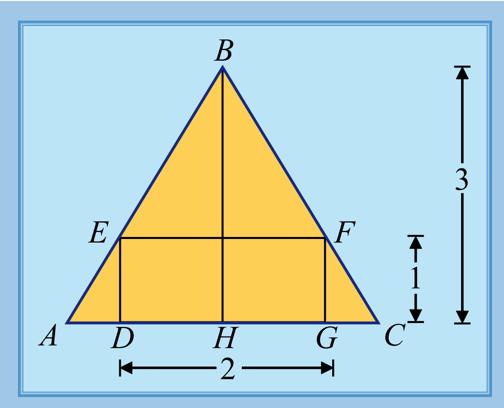
$$\left(\frac{b}{5} = \frac{6}{4}\right) \Leftrightarrow b = \frac{15}{2}\,u$$

Ejemplo 7.14 Semejanza de triángulos.

Dado el rectángulo $DEFG$, inscrito en el triángulo isósceles ABC, con $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{DE} = 1u$, $\overline{GD} = 2u$ y $\overline{BH} = 3u$, determine la longitud del segmento $\overline{AD}$.



Solución:



Se puede notar que $\overline{DH} = 1u$ y los triángulos AHB y ADE son semejantes.

Aplicando proporcionalidad entre las longitudes de sus lados:

$$\frac{\overline{AD} + \overline{DH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{ED}}$$

$$\frac{\overline{AD} + 1}{\overline{AD}} = \frac{3}{1}$$

$$\overline{AD} + 1 = 3\overline{AD}$$

$$2\,\overline{AD} = 1$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}u$$

7.7 Resolución de triángulos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un triángulo rectángulo, determinar la medida de alguno de sus elementos empleando relaciones trigonométricas.
* Dado un triángulo rectángulo, determinar la medida de alguno de sus lados empleando el teorema de Pitágoras.
* Dado un triángulo no rectángulo, resolverlo empleando la Ley de los Senos o la Ley de los Cosenos.
* Dado un problema real asociado a triángulos, plantear y resolver el problema analíticamente, interpretando la solución dentro del contexto del problema.

En esta sección nos proponemos resolver un triángulo, lo cual significa encontrar las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos que faltaren conocer en el triángulo. Para cumplir con este objetivo, es necesario conocer los siguientes teoremas:

Teorema 7.2 (Teorema de Pitágoras)

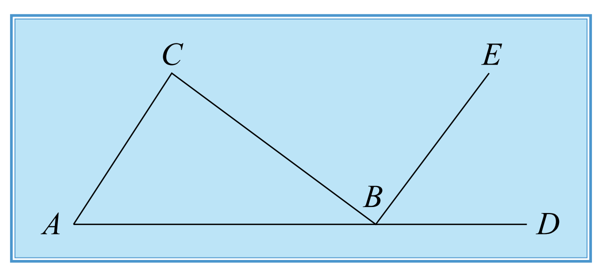
En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Teorema 7.3

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Demostración

Sea el triángulo arbitrario ABC.



Prolonguemos el lado AB y tracemos por B una recta paralela al lado AC. Se cumple que:

$$m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle DBE)$$
$$m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle EBC)$$

Por otra parte:

$$m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle EBC) + m(\measuredangle DBE) = 180^o$$

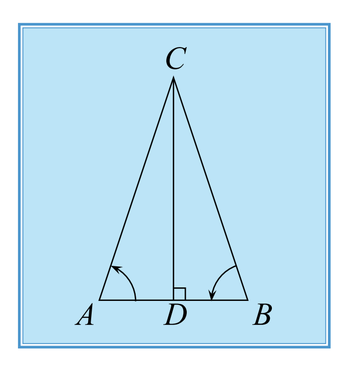
Esto es:

$$m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle BAC) = 180^o$$

Teorema 7.4

En todo triángulo, a lados de longitudes iguales se oponen ángulos de medidas iguales.

Demostración



Construyamos CD, de manera tal que:

$$m(\measuredangle ACD) = m(\measuredangle DCB)$$

Los triángulos ACD y DCB son congruentes porque tienen un ángulo de igual medida formado por lados correspondientemente iguales. Por tanto,

$$\boxed{m(\measuredangle DAC) = m(\measuredangle CBD)}$$

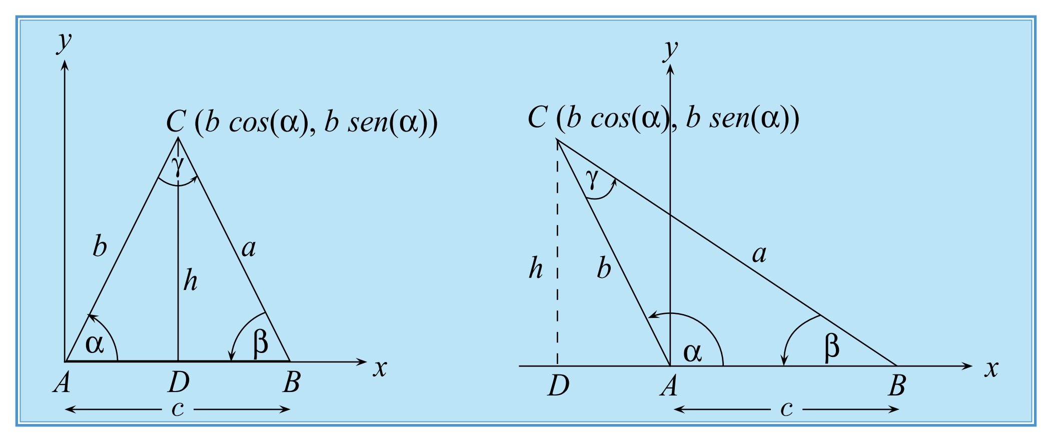
Teorema 7.5 (Ley de los Senos)

Para un triángulo cuyas longitudes de sus lados son: a, b, c y tienen ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente, se cumple que:

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$

Demostración

Trácese un triángulo, de modo que uno de los vértices, por ejemplo A, coincida con el origen del plano cartesiano. En la figura se muestra un caso en que α es un ángulo agudo ($\alpha < 90º$) y otro en el que $\alpha > 90º$.



En cualquiera de las figuras anteriores las coordenadas del punto C son $(b\ cos(\alpha), b\ sen(\alpha))$. La altura h del triángulo es igual a la ordenada del punto C, o sea:

$$h = b\ sen(\alpha)$$

Pero en el triángulo rectángulo BDC:

$$h = a\ sen(\beta)$$

entonces, igualando las dos expresiones anteriores:

$$b\ sen(\alpha) = a\ sen(\beta)$$

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$$

Idénticamente:

$$\frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

Las igualdades anteriores se pueden condensar como:

$$\boxed{\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}} \equiv \boxed{\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}}$$

Teorema 7.6 (Ley de los Cosenos)

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados, menos el doble producto de estas longitudes por el coseno del ángulo que forman.

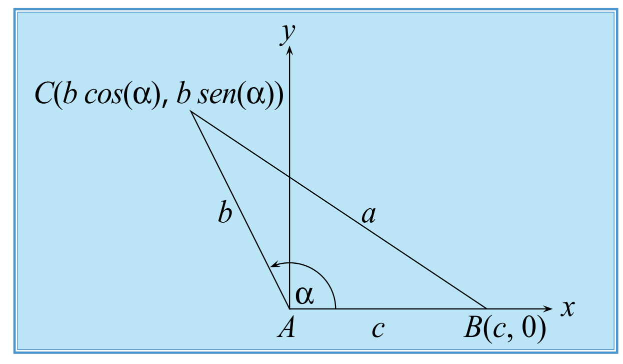
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos(\gamma)$$

Demostración

Sea $\Delta\ ABC$ un triángulo, como la figura siguiente:



Las coordenadas del vértice C son $(b\ cos\ (\alpha), b\ sen\ (\alpha))$.

De la fórmula de la distancia entre dos puntos (véase capítulo 10, sección 10.1):

$$a^2 = (b\ cos\ (\alpha) - c)^2 + (b\ sen\ (\alpha) - 0)^2$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando:

$$a^2 = b^2\ (cos^2\ (\alpha) + sen^2\ (\alpha)) - 2\ bc\ cos\ (\alpha) + c^2$$

Pero:

$$cos^2\ (\alpha) + sen^2\ (\alpha) = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ (\alpha)$$

De la misma forma se pueden deducir las expresiones:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac\ cos\ (\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab\ cos\ (\gamma)$$

las cuales expresan la Ley de los Cosenos.

Las tres relaciones que se acaban de deducir, son útiles para hallar las medidas de los ángulos internos de un triángulo conociendo las longitudes de sus lados.

7.7.1 Triángulos Rectángulos

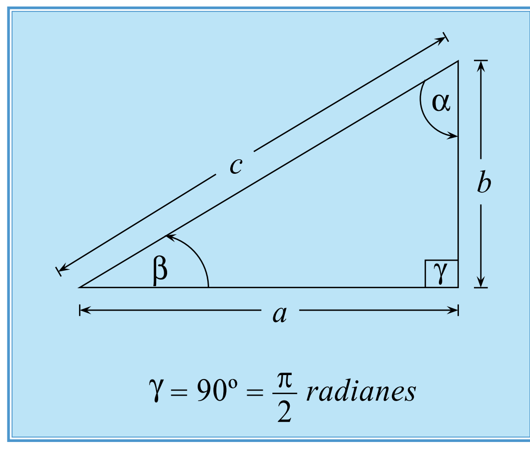


Figura 7.22: Triángulo Rectángulo.

Para resolver triángulos rectángulos es suficiente conocer la medida de un ángulo agudo y la longitud de un cateto, o bien la longitud de un cateto y la longitud de la hipotenusa, o la longitud de sus catetos. Luego aplicamos los teoremas mencionados según corresponda, así como las funciones trigonométricas estudiadas en el capítulo 4.

Dado que uno de los ángulos internos de un triángulo rectángulo mide 90° y de acuerdo al Teorema 7.3, los otros dos ángulos son complementarios.

Así mismo, si α y β son las medidas de los ángulos complementarios de un triángulo rectángulo, se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} sen(\alpha) &= cos(\beta) \\ cos(\alpha) &= sen(\beta) \\ tan(\alpha) &= cot(\beta) \\ cot(\alpha) &= tan(\beta) \\ sec(\alpha) &= csc(\beta) \\ csc(\alpha) &= sec(\beta) \end{aligned}$$

En ciertas aplicaciones, se utilizan los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión, los cuales se definen a continuación.

Definición 7.10 (Ángulo de elevación y ángulo de depresión).

Si una persona está mirando hacia arriba un objeto, el ángulo agudo medido desde la horizontal a la línea de visión del objeto se denomina ángulo de elevación. Por otro lado, si la persona está mirando hacia abajo un objeto, el ángulo agudo medido desde la línea de observación del objeto y la horizontal, se denomina ángulo de depresión.

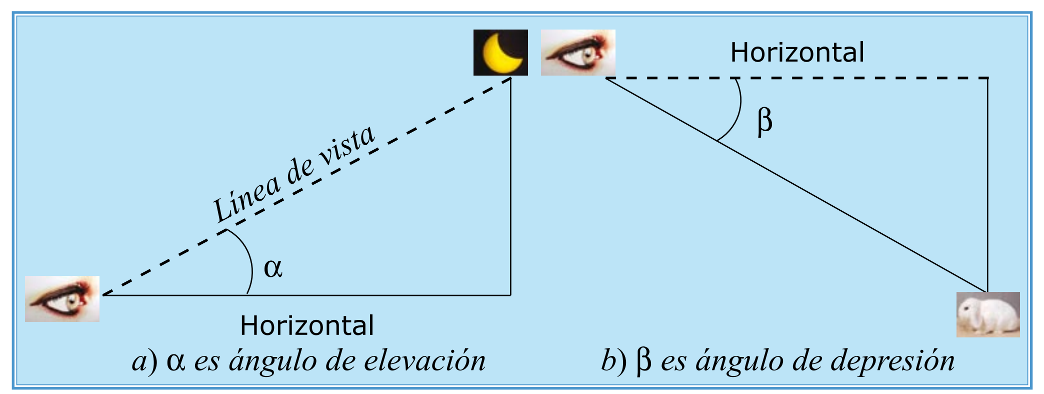


Figura 7.23: Ángulos de elevación y depresión.

Ejemplo 7.15 Resolución de Triángulos Rectángulos.

De la figura 7.22, se conoce que $a = 3cm$ y $m(\beta) = 15^{\circ}$, resuelva el triángulo.

Solución:

Aplicando el teorema 7.3:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180º - \gamma - \beta\\ &= 180º - 90º - 15º\\ \alpha &= 75º\end{aligned}$$

Aplicando funciones trigonométricas:

$$cos\ (\beta) = \frac{a}{c}$$

$$cos(15º) = \frac{3}{c}$$

Para encontrar el valor del $cos\ (15º)$, utilizamos la identidad del coseno de la diferencia de ángulos.

$$\begin{aligned}cos(15º) &= cos(45º - 30º)\\ &= cos(45º)\ cos(30º) + sen(45º)\ sen(30º)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$cos(15º) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

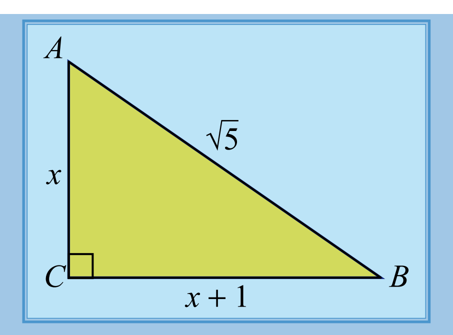
Por lo tanto, $c = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}b &= \sqrt{c^2 - a^2}\\ &= \sqrt{[3(\sqrt{6} - \sqrt{2})]^2 - 3^2}\\ &= \sqrt{9(6 - 4\sqrt{3} + 2) - 9}\\ b &= 3\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\,cm.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.16 Resolución de Triángulos Rectángulos.

En la figura mostrada, el triángulo ABC es rectángulo, el segmento $\overline{AB} = \sqrt{5}$ unidades y los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ miden x y $(x + 1)$ unidades, respectivamente. Determine el valor de x.



Solución:

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (x + 1)^2 = (\sqrt{5})^2$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 5 = 0$

$2x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

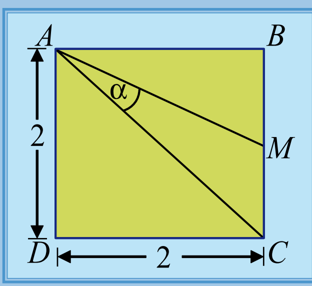
$(x + 2 = 0) \vee (x - 1 = 0)$

$(x = -2) \vee (x = 1)$

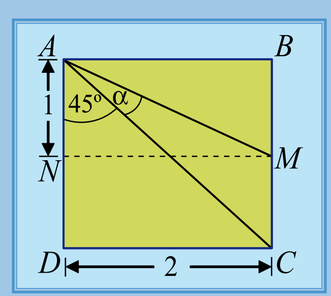
Se descarta el valor de $x = -2$, porque no es una solución geométrica. Luego, el valor de x es de 1 unidad.

Ejemplo 7.17 Resolución de Triángulos Rectángulos.

Si M es el punto medio de $\overline{BC}$ en el cuadrado $ABCD$ mostrado en la figura, determine el valor de $tan(\alpha)$.



Solución:



En la figura, sea N el punto medio de $\overline{AD}$, respecto del triángulo rectángulo MNA, se cumple:

$$tan(45º + \alpha) = \frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{tan(45º) + tan(\alpha)}{1 - tan(45º)\ tan(\alpha)} = 2$$

$$\frac{1 + tan(\alpha)}{1 - tan(\alpha)} = 2$$

$$1 + tan(\alpha) = 2 - 2\ tan(\alpha)$$

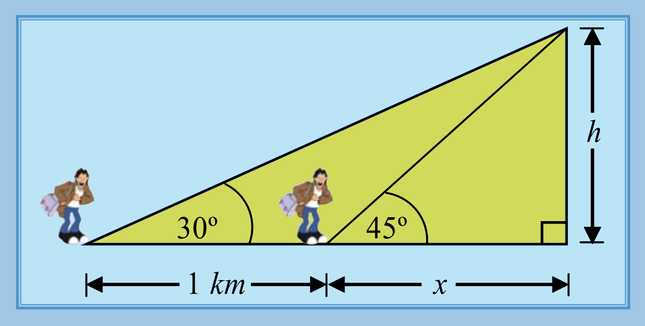
$$3tan(\alpha) = 1$$

$$\therefore\ tan(\alpha) = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 7.18 Resolución de Triángulos Rectángulos.

Un observador se encuentra a una determinada distancia medida desde la base de una colina; en ese instante él determina un ángulo de elevación de $30º$ con respecto a la cima de la colina. Si camina $1\ km$. acercándose a la colina, el observador determina que el ángulo ahora es de $45º$. ¿Cuál es la altura de la colina?

Solución:



Se puede observar que $h = x$.

$$\begin{aligned}
tan(30^o) &= \frac{h}{h+1} \\
\frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{h}{h+1} \\
h+1 &= \sqrt{3}h \\
h-\sqrt{3}h &= -1 \\
h\left(\sqrt{3}-1\right) &= 1 \\
h &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} \\
h &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) \\
h &= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}\,)^2-1^2} \\
h &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}
\end{aligned}$$

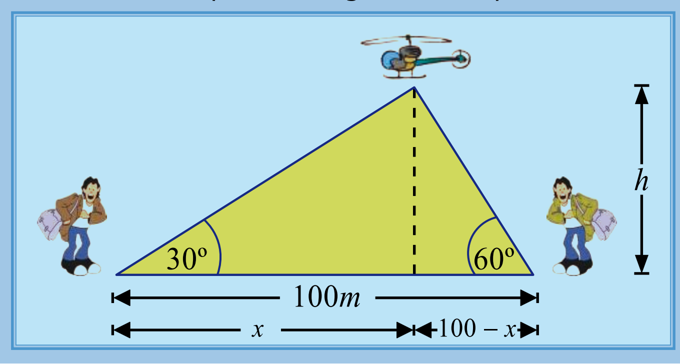
La altura de la colina es $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ km.

Ejemplo 7.19 Resolución de Triángulos Rectángulos.

De manera simultánea, dos observadores miden el ángulo de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide 30° y el otro 60°. Si los observadores están separados una distancia de 100 metros y el helicóptero está sobre la línea que los une, encuentre la altura h a la cual se encuentra el helicóptero.

Solución:

Se puede hacer una interpretación gráfica del problema.



$$tan(30º) = \frac{h}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$$

$$x = \sqrt{3}h \qquad (a)$$

$$tan(60º) = \frac{h}{100 - x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{100 - x}$$

$$x = \frac{100\sqrt{3} - h}{\sqrt{3}} \qquad (b)$$

Igualando las expresiones (a) y (b):

$$\sqrt{3}h = \frac{100\sqrt{3} - h}{\sqrt{3}}$$

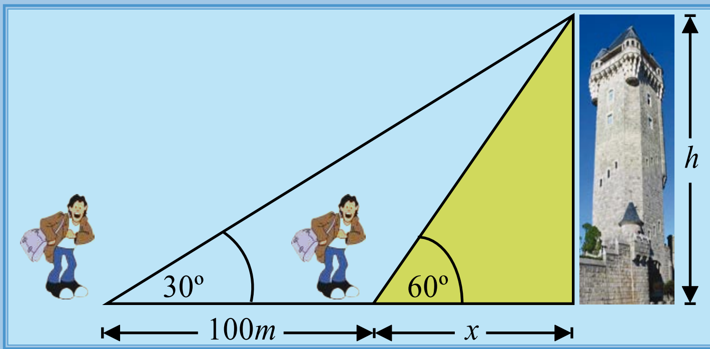
$$h = 25\sqrt{3}m.$$

Ejemplo 7.20 Resolución de Triángulos Rectángulos.

El ángulo de elevación de la parte superior de una torre mide $30º$. Acercándose 100 metros se encuentra que el ángulo de elevación es de $60º$, determine la altura de la torre.

Solución:

Se puede hacer una interpretación gráfica del problema.



$$tan(30^o) = \frac{h}{100 + x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100 + x}$$

$$x = \sqrt{3}h - 100 \qquad (a)$$

$$tan(60^o) = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}h \qquad (b)$$

Igualando las expresiones (a) y (b):

$$\frac{\sqrt{3}}{3}h = \sqrt{3}h - 100$$

$$h = 50\sqrt{3}\ m$$

7.7.2 Triángulos Acutángulos u Obtusángulos

Cuando se requieren resolver este tipo de triángulos es conveniente aplicar la Ley de los Senos o la Ley de los Cosenos.

La Ley de los Senos no es directamente aplicable cuando se conocen únicamente las longitudes de los tres lados de un triángulo, ni tampoco cuando se conocen las longitudes de dos de sus lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos; en estos casos, se debe utilizar la Ley de los Cosenos.

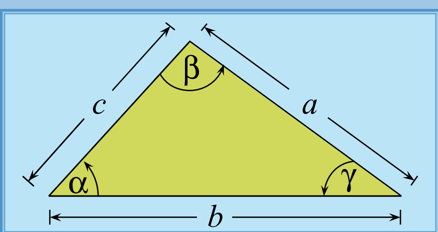
Ejemplo 7.21 Resolución de Triángulos no Rectángulos.

Resolver el triángulo, si se conoce que:

$$\alpha = 45°, \beta = 105°, c = 2.$$

Solución:

Haciendo un gráfico del triángulo, tenemos:



$$\gamma = 180^o - \alpha - \beta$$
$$= 180^o - 45^o - 105^o$$
$$\gamma = 30^o$$

Aplicando la Ley de los Senos:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

$$a = \frac{c\ sen(\alpha)}{sen(\gamma)}$$

$$= \frac{2(sen(45º))}{sen(30º)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$a = 2\sqrt{2}m$$

Aplicando la Ley de los Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos(\beta)$$

$$= (2\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(2\sqrt{2})(2)\ cos(105º)$$

$$= 8 + 4 - 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$$

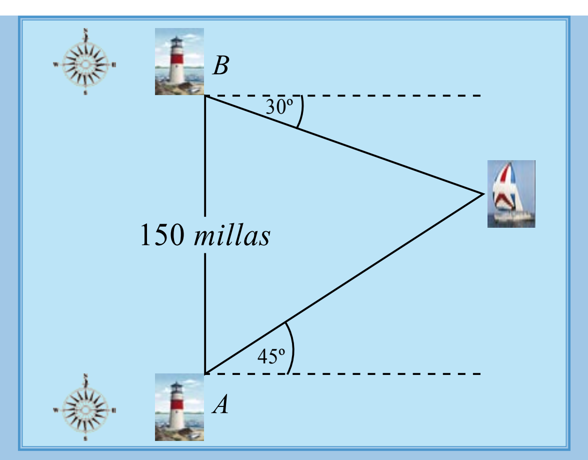
$$= 12 - 2\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

$$= 12 - 4 + 4\sqrt{3}$$

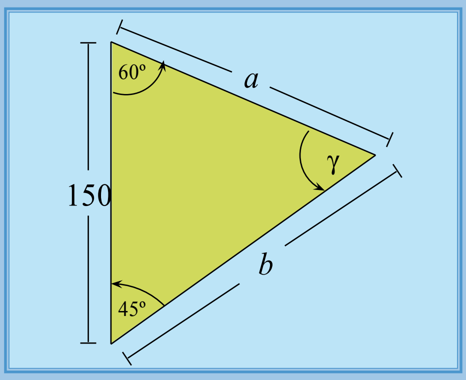
$$b = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}\ m.$$

Ejemplo 7.22 Resolución de Triángulos no Rectángulos.

La estación A de los guardacostas se encuentra directamente a 150 millas al sur de la estación B. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio, la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación A indica que la posición del barco es $45º$ al noreste; la llamada a la estación B indica que la posición del barco es $30º$ al sureste, tal como se muestra en la figura. ¿A qué distancia del barco se encuentra cada estación?



Solución:
Considerando el triángulo que se forma:



Aplicando la Ley de los Senos:

$$\frac{a}{sen(45º)} = \frac{150}{sen(180º - 45º - 60º)}$$

$$a = \frac{150\ sen(45º)}{sen(75º)}$$

$$= \frac{150\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)$$

$$a = 150\ (\sqrt{3} - 1) millas$$

Aplicando nuevamente la Ley de los Senos:

$$\frac{b}{sen(60^o)} = \frac{a}{sen(45^o)}$$

$$b = \frac{a\ sen(60^o)}{sen(45^o)}$$

$$= \frac{150(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$b = 75(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

La estación A se encuentra a $75(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$ millas del barco y la estación B se encuentra a $150(\sqrt{3}-1)$ millas del barco.

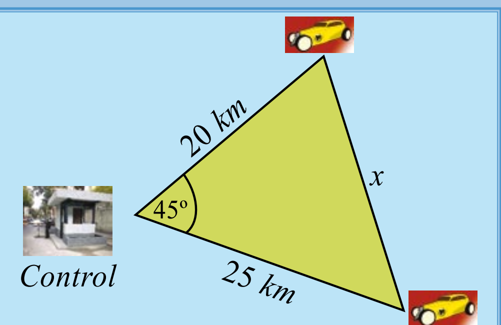
Ejemplo 7.23 Resolución de Triángulos no Rectángulos.

Dos autos parten de un control a dos ciudades diferentes. Las carreteras de estas ciudades son rectas y sus direcciones forman un ángulo de 45°. Al cabo de 15 minutos, los autos han recorrido una distancia de $25\ km$ y $20\ km$ respectivamente. Determine la distancia que los separa, en ese instante de tiempo.

Solución:

En la gráfica adjunta se observa que los trayectos recorridos por los dos autos forman un triángulo no rectángulo.

Con los datos que se dispone se puede emplear la Ley de los Cosenos, así:



$$x^2 = 25^2 + 20^2 - 2(25)(20)\,cos(45°)$$
$$= 625 + 400 - 1000\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$x^2 = 1025 - 500\sqrt{2}$$
$$x = \sqrt{1025 - 500\sqrt{2}}\ km$$

Se toma la respuesta positiva porque este valor representa una distancia en la realidad.

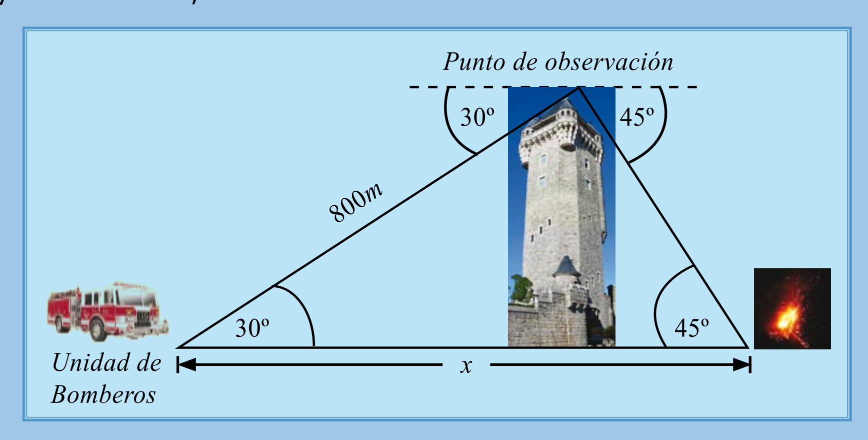
Ejemplo 7.24 Resolución de Triángulos no Rectángulos.

Desde una torre de control se observa un incendio con un ángulo de depresión de 45º. Sobre la horizontal que une la base de la torre con el lugar del incendio se observa la unidad de bomberos a un ángulo de depresión de 30º. Se conoce que la distancia desde el punto de observación de la torre hasta esta unidad es de 800 m. Determine qué distancia deben recorrer los bomberos hasta llegar al sitio del incendio.

Solución:

En la gráfica adjunta se observa que el punto de observación de la torre, el sitio del incendio y la unidad de bomberos forman un triángulo con ángulos de 30º, 45º y el lado opuesto a este ángulo tiene una longitud de 800 m.

Con los datos que se dispone y el Teorema 7.5, se puede emplear la Ley de los Senos, así:



$$\frac{800}{sen(45°)} = \frac{x}{sen(180° - 45° - 30°)}$$

$$x = \frac{800\ sen(105°)}{sen(45°)}$$

De la sección 7.7, se sabe que:

$$\begin{aligned} sen(105º) &= sen(75º) \\ sen(105º) &= sen(30º + 45º) \\ &= sen(30º)\,cos(45º) + cos(30º)\,sen(45º) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ sen(105º) &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene que:

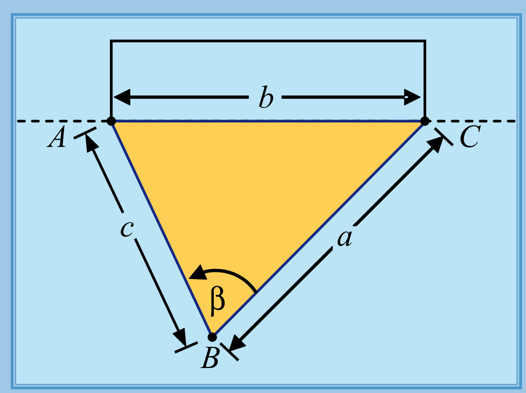
$$x = 800\,\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})\,\sqrt{2} = 400\,(1 + \sqrt{3})\,m.$$

Por lo que los bomberos deberán recorrer una distancia mayor a $1\ km$ para llegar al sitio del incendio.

Ejemplo 7.25 Resolución de Triángulos no Rectángulos.

En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto B situado a $5\ m$ y $8\ m$ de los postes A y C respectivamente, de una portería cuyo ancho tiene longitud $7\ m$. Determine la medida del ángulo con vértice en B, sustentado por los segmentos BA y BC.

Solución:



Aplicando la Ley de los Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(\beta)$$

$$cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$cos(\beta) = \frac{(8)^2 + (5)^2 - (7)^2}{(2)\,(8)\,(5)}$$

$$cos(\beta) = \frac{64 + 25 - 49}{80}$$

$$cos(\beta) = \frac{1}{2}$$

$$\beta = arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo 7.26 Resolución de Triángulos no Rectángulos.

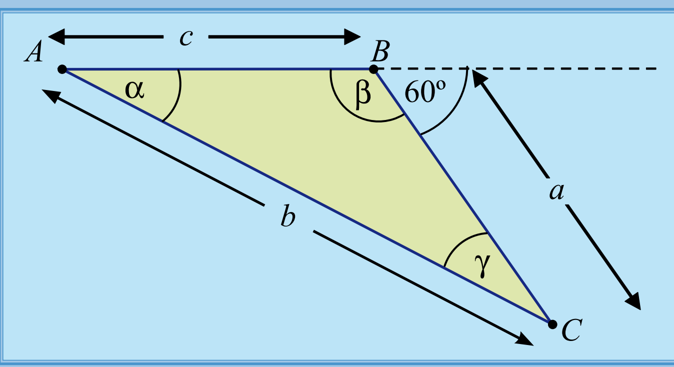
Dos ciudades A y B distan 150 millas entre sí y las ciudades B y C están separadas por una distancia de 100 millas. Un avión vuela de A hasta C de la manera siguiente:

a) Primero vuela a la ciudad B.

b) En B se desvía con un ángulo cuya medida es de 60° hasta llegar a la ciudad C.

Determine la distancia entre las ciudades A y C.

Solución:



$\beta = 120^{o}$, por definición de ángulos suplementarios.

Aplicando la Ley de los Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(120^{o})$$

$$b^2 = (100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 = 10000 + 22500 + 15000$$

$$b^2 = 47500$$

$$b^2 = (25)(19)(100)$$

$$b = 50\sqrt{19}$$

La distancia entre las ciudades A y C es de $50\sqrt{19}$ millas.

7.8 Cuadriláteros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un cuadrilátero, clasificarlo de acuerdo a la longitud, paralelismo y medida de los ángulos.

Definición 7.11 (Cuadrilátero)

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Los cuadriláteros convexos tienen todas las medidas de sus ángulos interiores menores que $180°$.

De acuerdo al paralelismo entre los lados, los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramo

Es un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos de dos en dos.



Sus **propiedades** son:

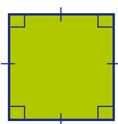
- En todo paralelogramo los lados paralelos tienen la misma longitud.
- En todo paralelogramo los ángulos opuestos tienen la misma medida.
- Cada diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.
- Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.

Los paralelogramos más utilizados son:

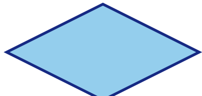
- **Rectángulo:** Paralelogramo en el cual todos los ángulos son rectos.



- **Cuadrado:** Rectángulo en el cual todos los lados son congruentes.



- **Rombo:** Paralelogramo no rectángulo en el cual todos los lados son congruentes.



- **Romboide:** Paralelogramo no rectángulo en el cual los lados paralelos, son congruentes.

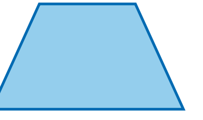


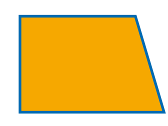
Trapecio

Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no paralelos. Los lados paralelos se denominan bases del trapecio y la distancia perpendicular entre ellos se denomina altura.

Si un trapecio tiene dos lados de igual longitud se denomina trapecio isósceles; mientras que si tiene un ángulo recto, se denomina trapecio rectángulo.

Trapecio Isósceles

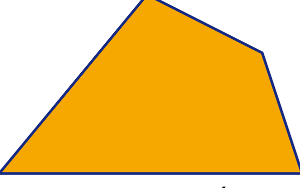




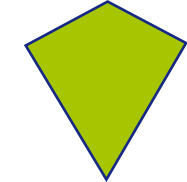
Trapecio Rectángulo

Trapezoide

Es aquel cuadrilátero que no tiene lados paralelos. Puede ser asimétrico o simétrico.



Trapezoide Asimétrico

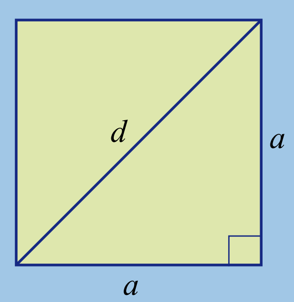


Trapezoide Simétrico
"Deltoide"

Ejemplo 7.27 Cuadriláteros.

Demuestre que la longitud de la diagonal de un cuadrado es igual al producto de la longitud del lado por $\sqrt{2}$.

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + a^2$

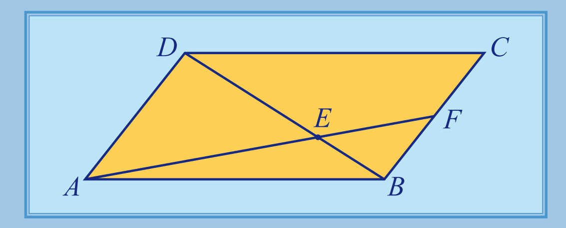
$d^2 = 2a^2$

$d = a\sqrt{2}$

Con lo cual se demuestra el enunciado.

Ejemplo 7.28 Semejanza de cuadriláteros.

En el siguiente bosquejo, si en el romboide se tiene $\overline{AD} = 48\ cm$, $\overline{AE} = 24\ cm$ y $\overline{EF} = 18\ cm$, determine $\overline{FB}$.



Solución:

Sea $x = \overline{FB}$.

Dado que $ABCD$ es un romboide, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $m(\measuredangle ADE) = m(\measuredangle FBE)$ (ángulos alternos internos entre rectas paralelas) y $m(\measuredangle DEA) = m(\measuredangle BEF)$ (ángulos opuestos por el vértice), entonces $\Delta ADE \sim \Delta FBE$. De la semejanza anterior, se deduce la proporción: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{FB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EF}}$.

Reemplazando los datos tendremos: $\dfrac{48}{x} = \dfrac{24}{18}$, de donde $x = \dfrac{(48)\,(18)}{24} = 36$.

Por lo tanto, $\overline{FB} = 36\ cm$.

7.9 Perímetro y área de un polígono

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas las dimensiones de los elementos de un polígono, calcular su perímetro y área.

* Resolver problemas de áreas y perímetros de regiones con polígonos.

* Aplicar los criterios de semejanza para calcular áreas de las superficies de polígonos.

La construcción de casas proporciona varias aplicaciones sobre los conceptos que se tratarán en esta sección. Para colocar el marco de una ventana se necesita conocer el **perímetro** de la misma. Para pintar una pared, se necesita conocer cuán extensa es su superficie, para describir dicha extensión se emplea un número real denominado **área.**

Definición 7.12 (Perímetro de un polígono)

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los polígonos de n lados, la función perímetro denotada por $Per(p)$ tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$Per: \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto Per(p) = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots + \overline{P_nP_1}$$

Siendo los vértices de $\mathbb{P}$ los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y $\overline{P_iP_j}$ la distancia del punto P_i al punto P_j.

Si los polígonos p y q son congruentes, entonces $Per(p) = Per(q)$.

Superficie y área

La **superficie**, en una región limitada, es el conjunto de puntos del plano encerrados por una figura geométrica plana simple. El **área** A es la medida de tal superficie y expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones.

Históricamente un “área” es una unidad de superficie antigua que equivale a 100 metros cuadrados. Se sigue empleando con frecuencia su múltiplo, la hectárea y a veces su submúltiplo, la centiárea, que equivale a un metro cuadrado.

Geometría Plana

La siguiente tabla contiene las expresiones para calcular el perímetro y el área de los polígonos más conocidos, en base a sus dimensiones.

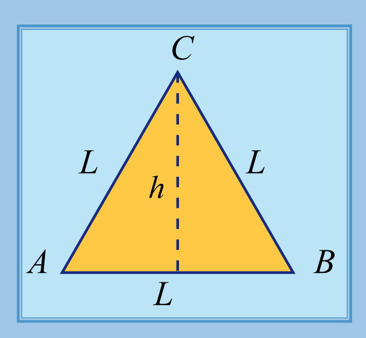
Figura Geométrica	Representación	Perímetro	Área
Cuadrado a: lado d: diagonal	d, a	$Per = 4a$	$A = a^2$ $A = \frac{d^2}{2}$
Rectángulo a, b: lados	b, a	$Per = 2(a + b)$	$A = ab$
Triángulo a, b, c: lados h_c: altura relativa a c	a, h_c, b, c	$Per = a + b + c$	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$
Paralelogramo a, b: lados h: altura	b, h, a	$Per = 2(a + b)$	$A = ah$
Rombo a: lado D, d: diagonales mayor y menor	D, d, a	$Per = 4a$	$A = \frac{dD}{2}$
Trapecio a, c: bases b, d: lados h: altura	c, d, h, b, a	$Per = a + b + c + d$	$A = \left(\frac{a + c}{2}\right) h$

Cuadro 7.2: Perímetro y Área de figuras geométricas.

Ejemplo 7.29 Área de la superficie de un triángulo equilátero.

Demuestre que el área de la superficie de un triángulo equilátero de longitud de lado L, es igual a $\frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$.

Solución:



$$A(\Delta ABC) = \frac{L\,h}{2}$$

Fórmula para calcular el área de la superficie de un triángulo.

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Fórmula para calcular la longitud de la altura de un triángulo equilátero.

$$A(\Delta ABC) = \frac{L(L\sqrt{3}/2)}{2}$$

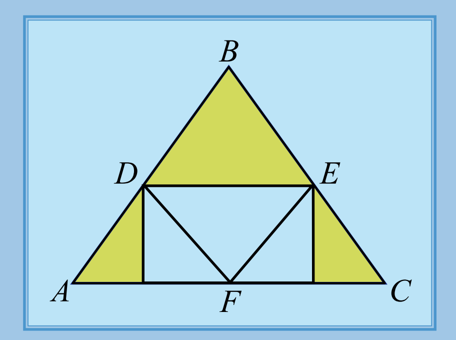
Reemplazando h en la fórmula del área.

$$A(\Delta ABC) = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Área de la superficie de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de sus lados.

Ejemplo 7.30 Área de la superficie de un triángulo.

Sean ABC un triángulo equilátero de longitud de lado igual a 2 unidades; D, E y F son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Determine el área de la superficie sombreada.



Solución:

El área de la superficie del triángulo equilátero ABC es $\sqrt{3}$. Recuerde que en un triángulo equilátero, su área es $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$. Este valor es igual a 4 veces el área de la superficie del triángulo equilátero DBE, puesto que los triángulos DBE, ADF, DFE y FEC son congruentes y la suma de sus

áreas es igual al área de la superficie del triángulo ABC.

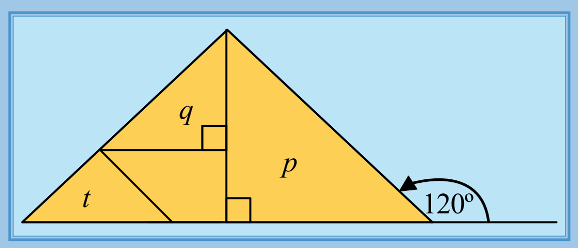
Es decir, que el área de la superficie de uno de los 4 triángulos es $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

El área de la región sombreada es igual al área de la superficie del triángulo ABC, menos 2 veces el área de la superficie de cualesquiera de los 4 triángulos.

Esto es: $A_{\text{sombreada}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,u^2$.

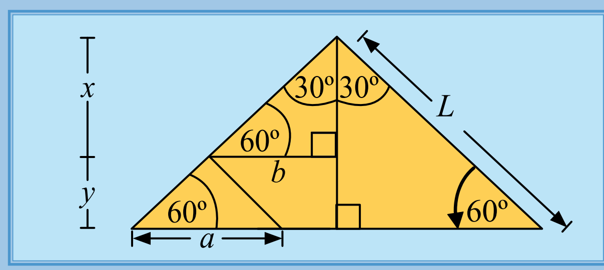
Ejemplo 7.31 Triángulos.

En el siguiente bosquejo, q es un triángulo rectángulo de área igual a $2\sqrt{3}u^2$ y t es un triángulo equilátero de lado de longitud igual a $2u$. Determine la longitud de la hipotenusa del triángulo p.



Solución:

Interpretando la información proporcionada, tenemos:



El área de la superficie del triángulo q es $Aq = \frac{bx}{2} = 2\sqrt{3}$

Se puede notar que $tan\,(30º) = \frac{b}{x}$

$$b = x\,tan\,(30º)$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x$$

Reemplazando:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)x}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 = 12$$
$$x = 2\sqrt{3}\ u$$

La altura del triángulo equilátero es $y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(2)$$
$$y = \sqrt{3}\ u$$

Por lo tanto, $x + y = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

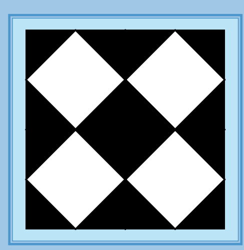
$$x + y = 3\sqrt{3}$$

La longitud $x + y$ es la altura del triángulo equilátero cuyo lado tiene por longitud L:

$$x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}\ L$$
$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}(3\sqrt{3})$$
$$L = 6u.$$

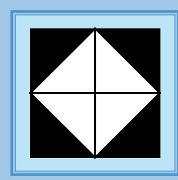
Ejemplo 7.32 Área de la superficie de cuadriláteros.

Se cubre el piso de un cuarto con 4 baldosas idénticas. Cada baldosa es un cuadrado negro en donde se ha pintado un cuadrado blanco cuyos vértices son los puntos medios de cada lado de dicha baldosa. Determine el porcentaje total de piso negro.



Solución:

Divídase cada baldosa en cuatro partes, como se muestra a continuación:

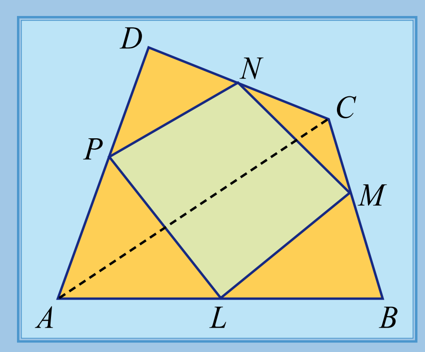


Se observa entonces que el piso negro corresponde al 50% del total.

Ejemplo 7.33 Cuadriláteros

En el bosquejo de la figura se muestra un trapezoide. Si L, M, N y P son los puntos medios de los lados indicados, determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I) El cuadrilátero $LMNP$ es un paralelogramo.
II) $\overline{LN} \perp \overline{MP}$
III) El perímetro del cuadrilátero $LMNP$ es $\overline{AC} + \overline{BD}$.



Solución:

I) Considerando el ΔACD y los puntos medios N y P, resulta que $\overline{PN}$ es la mitad de la medida del lado $\overline{AC}$. Así, $\overline{PN} \parallel \overline{AC}$, y de manera análoga, al considerar el ΔACB, $\overline{LM}$ es la mitad de la medida del lado $\overline{AC}$. Luego, $\overline{LM} \parallel \overline{AC}$. Por lo tanto, $\overline{PN} \parallel \overline{LM}$. Así mismo, de la consideración de los triángulos ABD y BCD resulta que: $\overline{MN} \parallel \overline{LP}$, es decir, el cuadrilátero $LMNP$ es un paralelogramo por tener los lados opuestos paralelos.

Luego, la proposición I es verdadera.

II) Ahora bien, como $LMNP$ es un paralelogramo cualquiera, no podemos asegurar que $\overline{LN} \perp \overline{MP}$.

Luego, la proposición II es falsa.

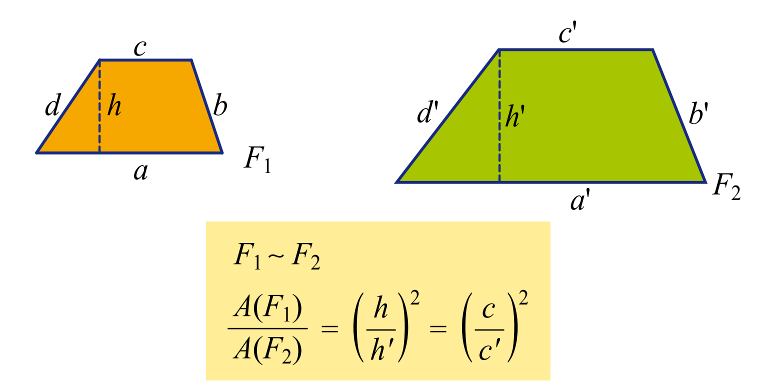
III) Finalmente, el perímetro del cuadrilátero $LMNP$ es $\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{PN} + \overline{LP}$.

Puesto que $\overline{LM} = \overline{PN}$ y $\overline{MN} = \overline{LP}$ representan la mitad de las medidas de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente, se tiene:

$\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ y $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BD}$.

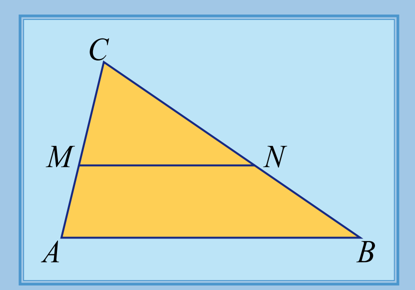
Entonces el perímetro del cuadrilátero $LMNP$ es igual a $\overline{AC} + \overline{BD}$.
Luego, la proposición III es verdadera.

Para figuras semejantes, se tiene que la relación entre las áreas es igual al cuadrado de la relación entre cualquiera de sus elementos lineales.



Ejemplo 7.34 Semejanza de áreas.

En el bosquejo de la siguiente figura $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, siendo $\overline{MN} = 3cm$ y $\overline{AB} = 5cm$. Determine la razón entre el área de la superficie del trapecio $ABNM$ y el área de la superficie del triángulo ABC.



Solución:

Puesto que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, resulta que $\Delta MNC \sim \Delta ABC$.

Luego: $\frac{A(\Delta MNC)}{A(\Delta ABC)} = \left(\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Por lo tanto, $A(\Delta MNC) = \left(\frac{9}{25}\right) A(\Delta ABC)$, y puesto que el área de la superficie del trapecio $ABNM$ es igual al área de la superficie del triángulo ABC, menos el área del triángulo MNC, tenemos que:

$$A(\square ABNM) = A(\Delta ABC) - \left(\frac{9}{25}\right) A(\Delta ABC) = \left(\frac{16}{25}\right) A(\Delta ABC).$$

Luego, la razón pedida es $\frac{16}{25}$.

7.10 Circunferencia y círculo

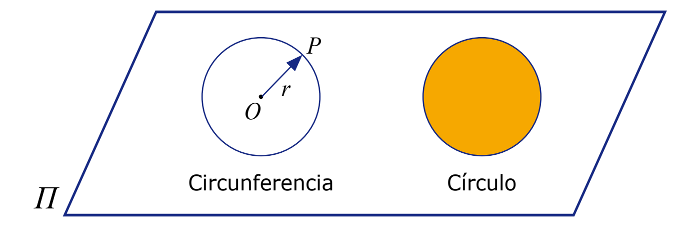
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar la diferencia entre circunferencia y círculo.
* Dada una circunferencia, definir los elementos de la circunferencia y el círculo asociado, justificando gráficamente su respuesta.
* Dada una circunferencia con un ángulo central, calcular la medida del ángulo inscrito.
* Dada una circunferencia con dos pares de cuerdas que sostienen el mismo arco, calcular la medida del ángulo inscrito.
* Definir los elementos de una circunferencia empleando relaciones de ángulos, triángulos y semejanza de polígonos.

Definición 7.13 (Circunferencia y círculo)

Sea r un número positivo y O un punto en el plano Π, el conjunto $C = \{P / \overline{OP} = r, P \in \Pi\}$ es una circunferencia de longitud de radio r, centrada en O. La unión de una circunferencia con su interior se denomina círculo.



Elementos de la circunferencia y el círculo

Respecto a la siguiente figura, se pueden observar los siguientes elementos de una circunferencia y un círculo de centro O y radio r.

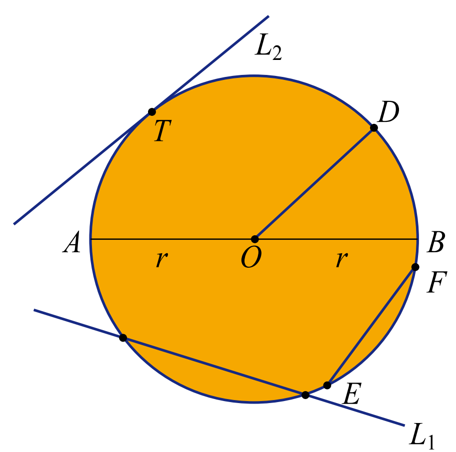


Figura 7.24: Elementos de la circunferencia.

a) Radio (r): Es un segmento que une el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de ella, por ejemplo: $\overline{OD}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$. Luego, $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$.

b) Cuerda: Es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia, por ejemplo $\overline{EF}$.

c) Diámetro (d): Es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia. La longitud del diámetro d es el doble de la longitud del radio, es decir $d = 2r$, por ejemplo: $\overline{AB}$.

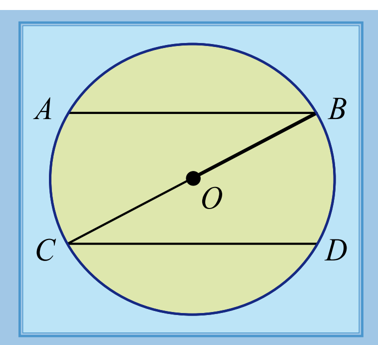
d) Arco: Es una línea curva perteneciente a la circunferencia que une dos puntos de ella. Por ejemplo, si la cuerda une los puntos BD, el arco se denota por $\overset{\frown}{BD}$. Las letras deben ser ordenadas en sentido de giro contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Por lo tanto, la longitud del arco $\overset{\frown}{BD}$ generalmente es diferente a la longitud del arco $\overset{\frown}{DB}$. En este caso $\overset{\frown}{BD}$ es el **arco menor** porque su longitud es menor que la longitud de la mitad de una circunferencia y $\overset{\frown}{DB}$ es el **arco mayor** porque su longitud es mayor que la longitud de la mitad de una circunferencia.

e) Secante: Es una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos diferentes, por ejemplo, L_1.

f) Tangente: Es una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto. Por ejemplo, L_2. El punto de intersección se llama punto de tangencia o de contacto. En la figura, T es el punto de tangencia. Es de observar que el radio en el punto T es perpendicular a la recta L_2.

Ejemplo 7.35 Elementos de la Circunferencia.

En la figura adjunta se tiene una circunferencia con centro en O y radio r, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas. Si la cuerda $\overline{AB} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ unidades, determine la distancia que separa las 2 cuerdas.



Solución:

El triángulo que forman A, B y C es rectángulo y se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^{\,2} + \overline{AB}^{\,2} = \overline{BC}^{\,2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^{\,2} - \overline{AB}^{\,2}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2}$$

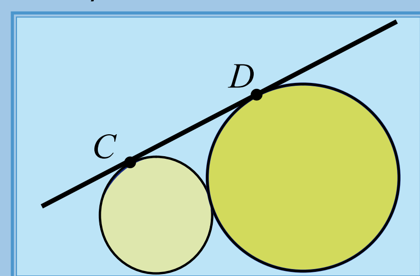
$$\overline{AC} = \sqrt{4r^2 - \frac{1}{2}r^{\,2}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{7}{2}}r$$

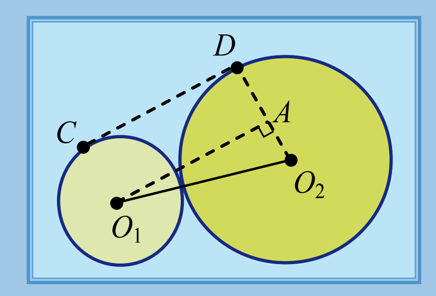
$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{14}}{2}r$$

Ejemplo 7.36 Elementos de la Circunferencia.

Determine la longitud del segmento $\overline{CD}$ tangente a dos circunferencias de radios de longitudes 4 y 9 unidades.



Solución:



Según la figura, si O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias, se cumple que: $\overline{O_1O_2} = 13u$.
Se puede construir el segmento $\overline{O_1A}$ paralelo a $\overline{CD}$ y de igual longitud.
La longitud del segmento $\overline{O_2A}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{O_2D}$ menos la longitud del segmento $\overline{AD}$, pero:

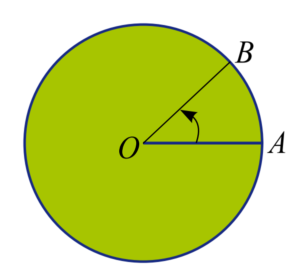
$$\overline{AD} = 4$$
$$\overline{O_2D} = 9$$
$$\overline{O_2A} = 5$$

El triángulo O_1O_2A es rectángulo y se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

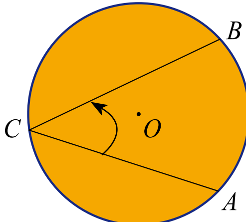
$$\overline{O_1A} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^{\,2} - \overline{O_2A}^{\,2}}$$
$$= \sqrt{(13)^2 - (5)^2}$$
$$= \sqrt{169 - 25}$$
$$\overline{O_1A} = \sqrt{144}$$
$$\overline{CD} = 12u$$

Ángulos en la circunferencia

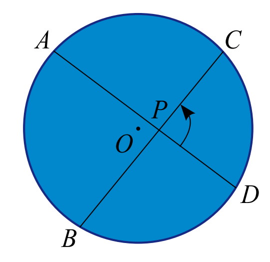
a) Ángulo central: Es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados están sobre los radios, por ejemplo, el ángulo $\measuredangle AOB$ de la figura.



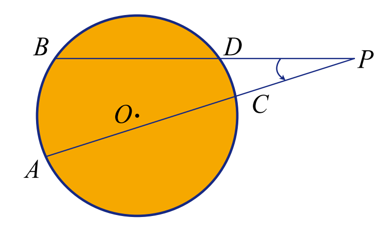
b) Ángulo inscrito: Es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados están sobre las cuerdas (o secantes). Por ejemplo, el ángulo $\measuredangle ACB$ de la figura.



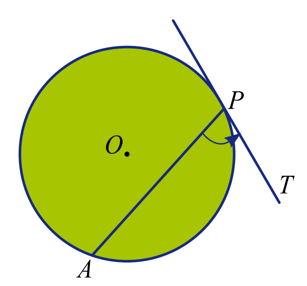
c) Ángulo interior: Es aquel que está formado por la intersección de dos cuerdas cualesquiera, por ejemplo, el ángulo $\measuredangle DPC$ de la figura.



d) Ángulo exterior: Es aquel que está formado por dos secantes (o tangentes, o una secante y una tangente) que parten de un mismo punto exterior a la circunferencia, por ejemplo, el ángulo $\measuredangle BPA$ de la figura.



e) Ángulo semi-inscrito: Es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados son una tangente y una cuerda, respectivamente. Por ejemplo, el ángulo $\measuredangle APT$ de la figura.



Dos **circunferencias** son **congruentes** si tienen radios de igual longitud.

Si P_1 y P_2 son extremos de un mismo diámetro, el segmento de recta $\overline{P_1 P_2}$ divide a la circunferencia y al círculo en dos semicircunferencias y semicírculos, respectivamente.

Una propiedad muy útil que relaciona el ángulo central con el ángulo inscrito es: ***"la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central para ángulos que intersecan la circunferencia en los mismos puntos"***.

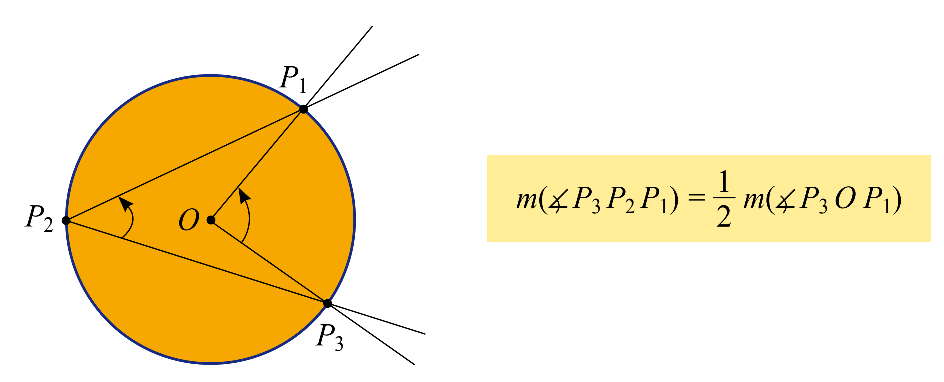
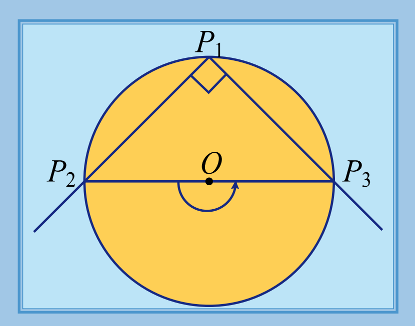


Figura 7.25: Relación entre ángulo central e inscrito.

Ejemplo 7.37 Ángulos en la circunferencia.

Demuestre que si P_1, P_2, P_3 son puntos sobre una circunferencia, tales que P_2 y P_3 son extremos de un mismo diámetro, entonces, $m(\measuredangle P_2 P_1 P_3) = \frac{\pi}{2}$ radianes.

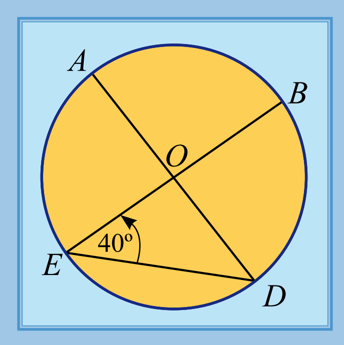


Solución:

Utilizando la propiedad entre ángulo central y ángulo inscrito respecto a la figura, se tiene que $m(\measuredangle P_2 P_1 P_3) = \frac{1}{2} m(\measuredangle P_2 O P_3) = \frac{1}{2}(\pi) = \frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejemplo 7.38 Ángulos en la circunferencia.

En la figura adjunta, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son dos diámetros de la circunferencia con centro en O.



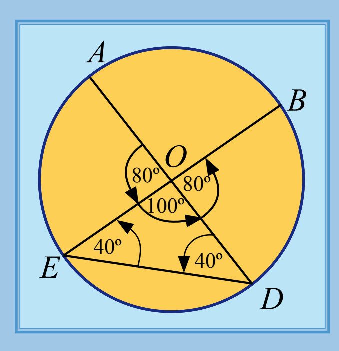
Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $m(\measuredangle DEO) = m(\measuredangle BOA)/2$

b) $m(\measuredangle BOA) > m(\measuredangle AOE)$

c) $m(\measuredangle ODE) < m(\measuredangle DOB)$

Solución:



a) En la figura se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} m(\measuredangle DEO) &= 40º \\ m(\measuredangle DOB) &= 2m(\measuredangle DEB) = 2(40º) = 80º \\ m(\measuredangle BOA) &= 180º - m(\measuredangle DOB) \\ &= 180º - 80º = 100º \end{aligned}$$

b) $m(\measuredangle AOE) = m(\measuredangle DOB)$

$m(\measuredangle AOE) = 80º$

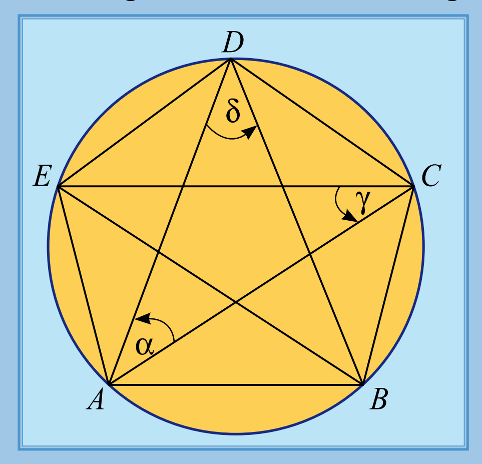
c) $m(\measuredangle ODE) = 180^\circ - m(\measuredangle EOD) - m(\measuredangle DEO) = 180^\circ - 100^\circ - 40^\circ$

$m(\measuredangle ODE) = 40^\circ$

Por lo tanto, la proposición a) es falsa y las proposiciones b) y c) son verdaderas.

Ejemplo 7.39 Ángulos en la circunferencia.

Las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ son todas congruentes. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos mostrados en la figura adjunta?

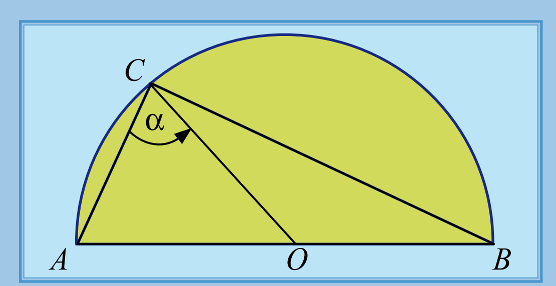


Solución:

Los ángulos centrales correspondientes a las cuerdas dadas, son todos congruentes por tratarse de ángulos inscritos en arcos congruentes. Pero cada uno de estos ángulos mide $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Luego, el ángulo $CAD = \alpha = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Por lo tanto, la suma de las medidas de los tres ángulos es: $(3)(36^\circ) = 108^\circ$.

Ejemplo 7.40 Ángulos en la circunferencia.

En la figura adjunta, O es el centro de la semicircunferencia y $\measuredangle BOC = 3\measuredangle COA$. ¿Cuál es el valor de α?



Solución:

Puesto que $\measuredangle COA$ y $\measuredangle BOC$ son suplementarios, suman 180°, y como $\overset{\frown}{CB} = 3\overset{\frown}{AC}$, por hipótesis, resulta que $\measuredangle COA = 45^o$.

Ahora bien, como el triángulo AOC es isósceles de base $\overline{AC}$, se cumple que $(\overline{OA} = \overline{OC})$ y resulta que:

$m(\measuredangle OAC) = m(\measuredangle ACO) = \alpha$

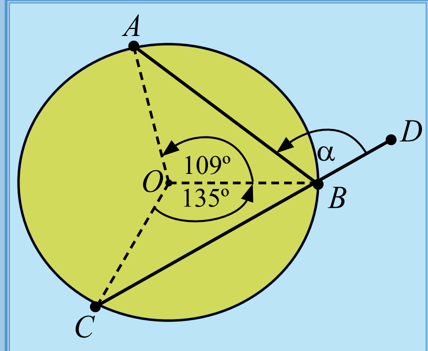
Luego:

$$\alpha + \alpha + 45^o = 180^o$$
$$2\alpha + 45^o = 180^o$$
$$2\alpha = 135^o$$

De donde: $\alpha = \dfrac{135^o}{2} = 67.5^o$

Ejemplo 7.41 Ángulos en la circunferencia.

En base a la figura adjunta, determine la medida de α en grados sexagesimales.



Solución:

$$m(\measuredangle AOC) + m(\measuredangle BOA) + m(\measuredangle COB) = 360^o$$

$$m(\measuredangle AOC) = 360^o - m(\measuredangle BOA) - m(\measuredangle COB) = 360^o - (109^o + 135^o) = 116^o$$

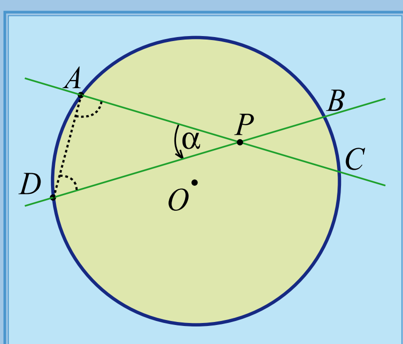
$$m(\measuredangle ABC) = \frac{1}{2}\, m(\measuredangle AOC) = \frac{116^o}{2} = 58^o$$

$$\alpha + m(\measuredangle ABC) = 180^o$$

$$\alpha = 180^o - m(\measuredangle ABC) = 180^o - 58^o = 122^o$$

Ejemplo 7.42 Ángulo en la circunferencia.

A partir de la siguiente figura, demuestre que $m(\measuredangle\,\alpha) = \dfrac{m(\measuredangle\,CPB) + m(\measuredangle\,APD)}{2}$.



Solución:

$\measuredangle\,\alpha = \measuredangle\,APD$

$m(\measuredangle\,APD) + m(\measuredangle\,DAP) + m(\measuredangle\,PDA) = \pi$ Suma de la medidas de los ángulos interiores del $\Delta\,APD$.

$m(\measuredangle\,APD) = \pi - m(\measuredangle\,DAP) - m(\measuredangle\,PDA)$ Despejando $m(\measuredangle\,APD)$.

$m(\measuredangle\,APD) = \pi - \dfrac{m(\measuredangle\,DPC)}{2} - \dfrac{m(\measuredangle\,BPA)}{2}$ Propiedades de ángulos inscritos.

$m(\measuredangle\,APD) = \dfrac{2\pi - [m(\measuredangle\,DPC) + m(\measuredangle\,BPA)]}{2}$ Simplificando la expresión.

$$m(\measuredangle\,APD) = \frac{m(\measuredangle\,CPB) + m(\measuredangle\,APD)}{2}$$

7.11 Polígonos y circunferencias

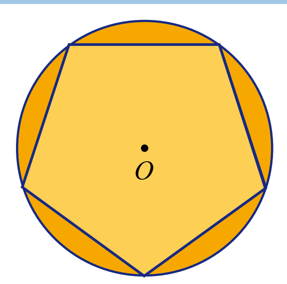
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

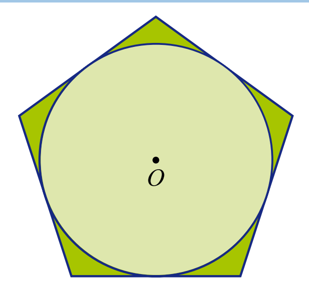
* Determinar las relaciones entre los elementos que conforman circunferencias y polígonos, inscritos o circunscritos.

Definición 7.14 (Polígono inscrito o circunscrito)

Un polígono se dice inscrito en una circunferencia si todos sus vértices son puntos de la circunferencia. Recíprocamente, la circunferencia se dice circunscrita al polígono. Un polígono se dice circunscrito a una circunferencia si sus lados son segmentos tangentes a la circunferencia. Recíprocamente, la circunferencia se dice inscrita en el polígono.

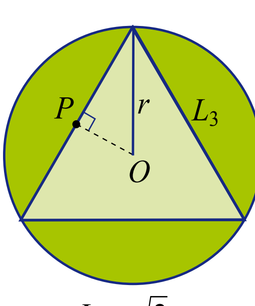


Polígono inscrito

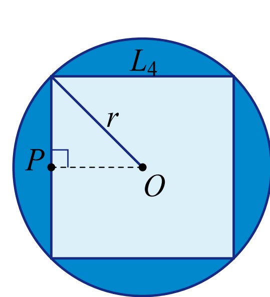


Polígono circunscrito

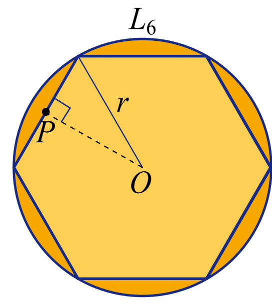
Una propiedad importante de los polígonos regulares es que siempre pueden inscribirse en una circunferencia.



$L_3 = \sqrt{3}\, r$
(a)



$L_4 = \sqrt{2}\, r$
(b)



$L_6 = r$
(c)

Figura 7.26: Polígonos inscritos.

Tal como se puede observar, en la figura 7.26 (a), (b) y (c), L_n y r representan las longitudes de los lados de los polígonos y la longitud del radio de las circunferencias circunscritas, respectivamente.

La **apotema** a_n en un polígono regular de n lados es un segmento cuya longitud es igual a la distancia perpendicular desde el centro del círculo circunscrito hasta un lado del polígono. En las figuras (a), (b) y (c), $a_n = \overline{OP}$; y, es posible demostrar que $a_3 = \frac{r}{2}$, $a_4 = \frac{\sqrt{2}\, r}{2}$ y $a_6 = \frac{\sqrt{3}\, r}{2}$, siendo r, en cada uno de los casos, la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

De manera análoga, los polígonos regulares pueden siempre circunscribirse a una circunferencia.

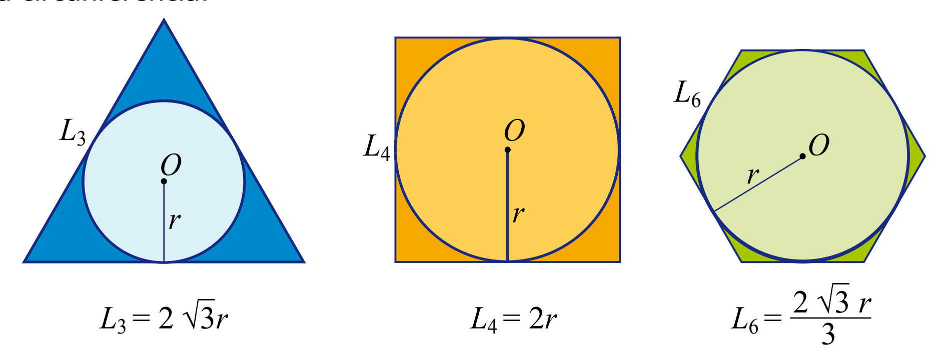


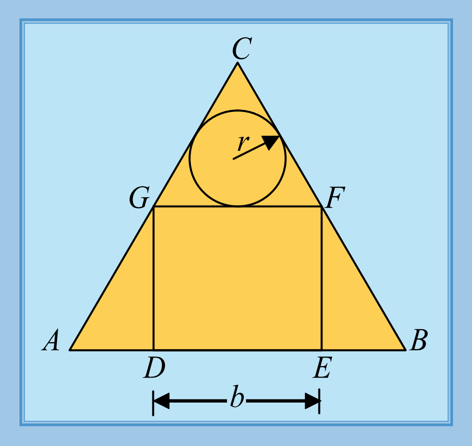
Figura 7.27: Polígonos circunscritos.

Si tomamos una circunferencia y en ella inscribimos un polígono regular P de n lados, para n finito, $C - P_n > 0$, donde C es la longitud de la circunferencia y P_n el perímetro del polígono; a medida que n aumenta $(n \to \infty)$, la diferencia $C - P_n$ se hace ínfima, es decir, $P_n \to C$. Esto será expresado diciendo que C es el límite de P_n cuando n crece indefinidamente, lo cual se denota como:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C$$

Ejemplo 7.43 Polígono circunscrito.

ABC es un triángulo equilátero y $DEFG$ es un rectángulo de base b unidades, como se observa en la figura. Si la circunferencia mostrada está inscrita en el triángulo GFC, determine la longitud de su diámetro.



Solución:

Se puede observar que $\overline{DE} = \overline{GF} = b$.

La circunferencia se ha inscrito en el triángulo GFC, que también debe ser equilátero, y se cumple que:

$\overline{GF} = 2\sqrt{3}r$

$r = \dfrac{\overline{GF}}{2\sqrt{3}}$

La longitud de su diámetro d es $2r$.

$d = \dfrac{\overline{GF}}{\sqrt{3}}$

$d = \dfrac{\overline{DE}}{\sqrt{3}}$

$d = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$

$d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,b$ unidades.

7.12 Figuras circulares

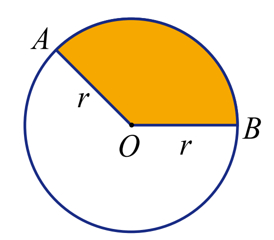
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

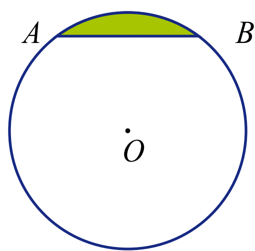
* Dada una circunferencia y un ángulo central, calcular la longitud de arco y el área del sector circular.

* Calcular áreas con figuras circulares que involucren al segmento circular y a la corona circular.

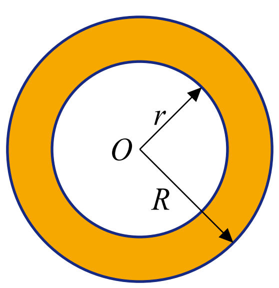
a) Sector circular: Es la región del círculo comprendida entre dos radios y el arco que subtienden.



b) Segmento circular: Es la porción del círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente.

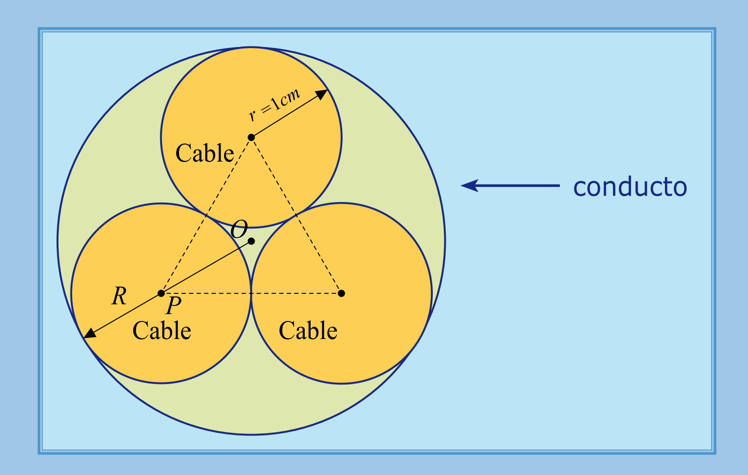


c) Corona o anillo circular: Es la región comprendida entre dos círculos concéntricos (que tienen el mismo centro).



Ejemplo 7.44 Polígono circunscrito.

Los conductos de cables telefónicos están construidos para contener tres cables, cuyas secciones transversales son circulares y tangentes al conducto y entre sí; y cuyos radios r miden $1cm$. Determine la longitud R del radio del conducto.



Solución:

De la figura se puede observar que R (longitud del radio de la circunferencia mayor) puede ser calculado con la expresión:

$R = \overline{OP} + 1$

Debido a que el triángulo que se forma uniendo los centros de los tres círculos menores es equilátero, con longitud de lados $L = 2\ cm$, se puede deducir que:

$\overline{OP} = \frac{2}{3}h$ (O es el ortocentro)

Por otra parte:

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ (h es la altura del triángulo)

Luego $\overline{OP} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3}cm$.

Por lo tanto: $R = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) cm$.

Área del círculo

El área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos en la respectiva circunferencia.

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) = A(círculo)$$

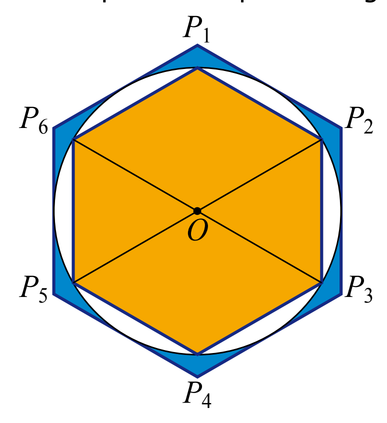
Si consideramos un polígono regular p de n lados, de perímetro Per y apotema a, podemos descomponerlo en n triángulos congruentes con base l y altura a, de tal forma que:

$$A(polígono) = \frac{n(la)}{2} = \frac{(nl)a}{2} = \frac{Per(p)a}{2}$$

$$A(polígono) = \frac{(PERÍMETRO)(APOTEMA)}{2}$$

Consideremos ahora un círculo de radio r y los polígonos regulares inscritos y circunscritos a ese círculo. Si hacemos crecer el número de lados ($n \to \infty$), las apotemas se aproximan al radio del círculo. Diremos entonces que el área de la superficie circular es aproximadamente igual al área de la superficie

de un polígono regular de número ilimitado de lados ($n \to \infty$), esto es el semiproducto de la medida del perímetro por la longitud del radio.



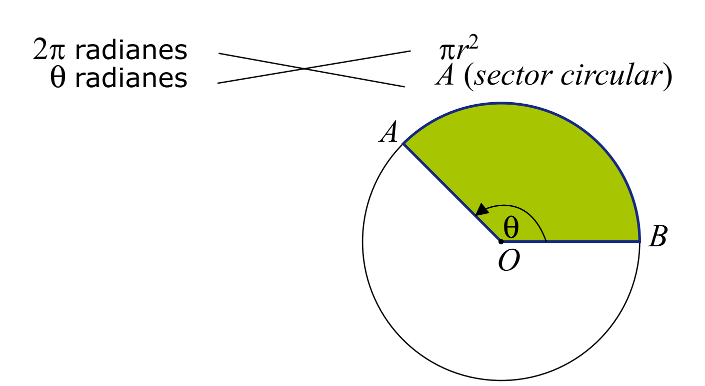
Así se obtendría que $A(círculo) = \dfrac{(PERÍMETRO)(APOTEMA)}{2}$

$$A(círculo) = \frac{(2\pi r)r}{2}$$

$$\boxed{A(círculo) = \pi r^2}$$

Área del sector circular

Si θ es la medida en **radianes** del ángulo central de un sector circular, establecemos una relación de regla de 3 simple, a saber:



Por tanto: $\boxed{A(sector\ circular) = \dfrac{r^2\theta}{2},\ \theta \text{ se mide en radianes}}$

Si θ viene dado en **grados sexagesimales:**

$$\boxed{A(sector\ circular) = \frac{\pi r^2\theta}{360^\circ}}$$

Área del segmento circular

El área del segmento circular se obtiene como la diferencia entre las áreas del sector circular y del triángulo correspondiente. De la figura anterior, podemos deducir que:

$A(segmento\ circular) = A(sector\ circular\ AOB) - A\ (triángulo\ AOB)$

El área del triángulo AOB se puede calcular como $\frac{1}{2}\ r^2 sen(\theta)$, con θ expresado en radianes. Así:

$$A(segmento\ circular) = \frac{1}{2}\ r^2\ \theta - \frac{1}{2}\ r^2\ sen(\theta)$$

$$A(segmento\ circular) = \frac{1}{2}\ r^2\ (\theta - sen(\theta))$$

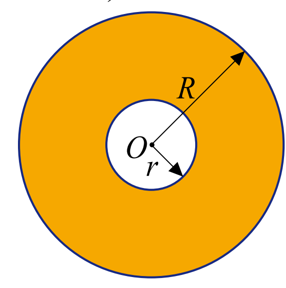
Área de la corona circular

El área de la corona circular se obtiene como la diferencia entre las áreas de los círculos concéntricos.

A(corona circular) = A(círculo de radio R) – A(círculo de radio r)

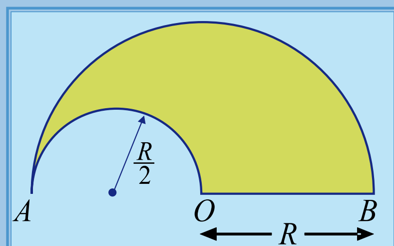
$$A(corona\ circular) = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A(corona\ circular) = \pi(R^2 - r^2)$$



Ejemplo 7.45 Perímetro de figuras circulares.

Si O es el centro del semicírculo de radio de longitud $R = 2cm$, determine el perímetro de la región sombreada.



Solución:

La semicircunferencia AO tiene longitud de radio $r = 1\ cm$. El perímetro sería la longitud de la semicircunferencia pequeña AO, más la longitud del segmento de recta OB, más la longitud de la semicircunferencia grande AB.

$$P = \overset{\frown}{AO} + \overline{OB} + \overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}(2\pi r) + R + \frac{1}{2}(2\pi R)$$

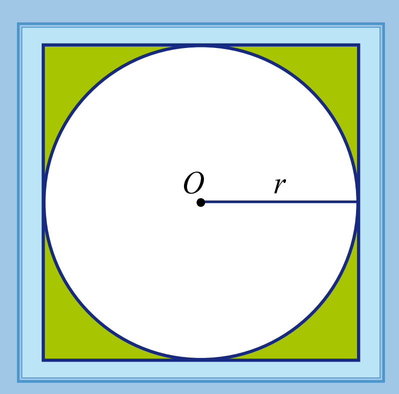
$$P = \frac{1}{2}[2\pi(1)] + 2 + \frac{1}{2}[2\pi(2)]$$

$$P = \pi + 2 + 2\pi$$

$$P = (3\pi + 2)\ cm$$

Ejemplo 7.46 Área relacionada con figuras circulares.

Determine el área de la región sombreada si el cuadrado circunscrito tiene lado de longitud $4u$.



Solución:

Cuadrado $= (región\ sombreada) \cup (círculo)$

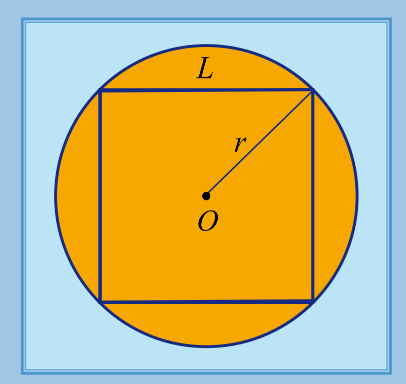
$$A(cuadrado) = A(región\ sombreada) + A(círculo)$$

$$A(región\ sombreada) = A(cuadrado) - A(círculo)$$

$$A(región\ sombreada) = 4^2 - \pi(2)^2 = 16 - 4\pi = 4(4-\pi)\ u^2$$

Ejemplo 7.47 Área de figuras circulares.

Calcule el área de la superficie de un círculo en el que se ha inscrito un cuadrado de 50 metros cuadrados de área.



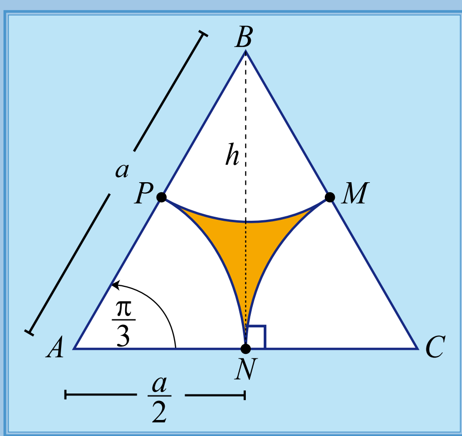
Solución:

Tenemos:
$50 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Pero $L = r\sqrt{2}$ y $r = 5m$, por tanto $A(círculo) = \pi r^2 = 25\pi m^2$.

Ejemplo 7.48 Área de una superficie sombreada.

El triángulo ABC es equilátero, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$ y P, M, N son los puntos medios de los lados. Determine el área de la región sombreada.



Solución:

El área A_s de la superficie sombreada puede ser calculada mediante la diferencia entre el área de la superficie del triángulo equilátero y la de los tres sectores circulares de longitud de radio $\frac{a}{2}$ y medida de ángulo $\frac{\pi}{3}$. Así:

$$A_s = A_\Delta - 3A_{sc}$$

$$A_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{sc} = \frac{r^2\theta}{2}$$

$$A_{sc} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$A_{sc} = \frac{a^2\pi}{24}$$

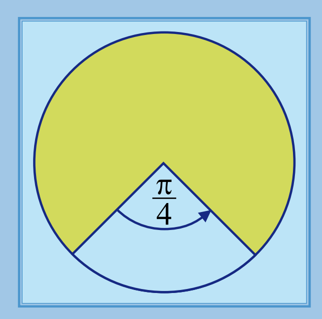
$$A_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3\left(\frac{a^2\pi}{24}\right)$$

$$A_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\pi}{8}$$

$$A_s = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi)\ u^2$$

Ejemplo 7.49 Área de figuras circulares.

Determine el porcentaje del área de la superficie sombreada respecto del área total del círculo.



Solución:

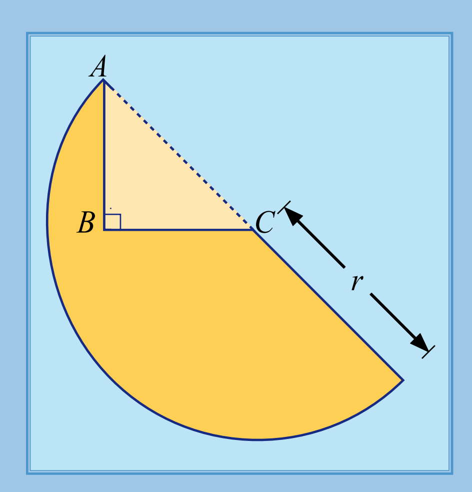
Si la medida del ángulo es $\frac{\pi}{4}$ o 45°, la superficie sombreada corresponde al área de un sector circular con un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ ó 315°.

Por lo tanto, el porcentaje del área de la superficie sombreada respecto del total, sería:

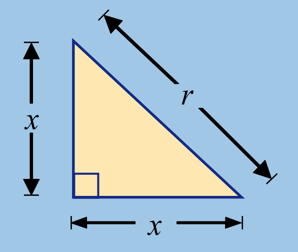
$$\frac{315^o}{360^o} \text{ x } 100 = \frac{7}{8} \text{ x } 100 = 87.5\%$$

Ejemplo 7.50 Área de figuras en el plano.

Si la figura adjunta corresponde a un semicírculo de longitud de radio $r = 2a$, determine el área de la superficie sombreada, considerando que el triángulo ABC es rectángulo isósceles.



Solución:



Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = r^2$$
$$2x^2 = r^2$$
$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2}a$$

$$A = A_{SEMICÍRCULO} - A_{TRIÁNGULO}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{(x)(x)}{2}$$

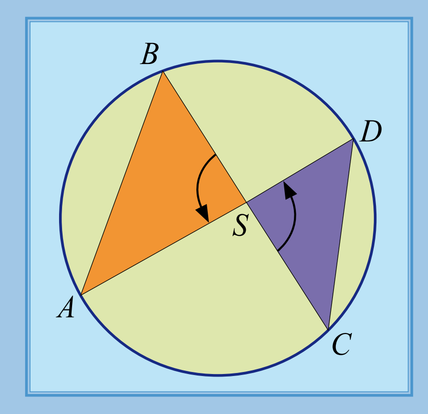
$$A = \frac{1}{2}\pi(2a)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}a)(\sqrt{2}a)$$

$$A = 2\pi a^2 - a^2$$

$$A = (2\pi - 1)a^2 u^2$$

Ejemplo 7.51 Semejanza de áreas.

En la figura adjunta, el área de la superficie del triángulo SDC es $15\ m^2$ y se conoce que $\overline{BS} = 2\ \overline{DS}$. Encuentre el área de la superficie del triángulo ABS en m^2.



Solución:

Los ángulos BSA y CSD son opuestos por el vértice y además:
$[m(\measuredangle BAS) = m(\measuredangle SCD)] \Rightarrow ABS$ y DSC son triángulos semejantes.

$$\frac{A_{\Delta ABS}}{A_{\Delta CDS}} = \left(\frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}\right)^2$$

$$A_{\Delta ABS} = \left(\frac{2\,\overline{DS}}{\overline{DS}}\right)^2 A_{\Delta CDS}$$

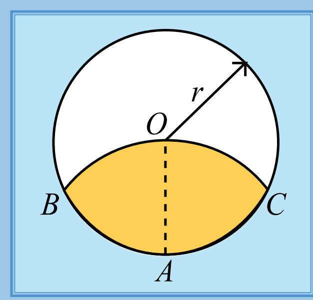
$$A_{\Delta ABS} = 4\ A_{\Delta CDS}$$

$$A_{\Delta ABS} = (4)(15)$$

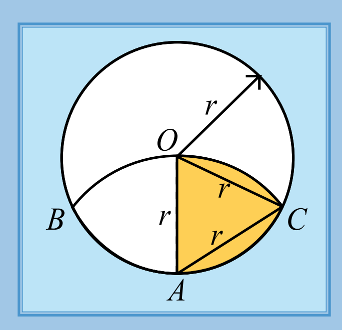
$$A_{\Delta ABS} = 60\ m^2$$

Ejemplo 7.52 Área de figuras circulares.

Si en la figura adjunta el arco $\widehat{BC}$ tiene centro en el punto A, determine el área de la superficie sombreada.



Solución:



Sea G el área del sector circular AOC.
Sea H el área del segmento circular OAC.
Sea I el área del triángulo equilátero OAC.

El área de la superficie sombreada en la segunda figura es $G + H$.
Pero $H = G - I$.
Se cumple que: $G + H = 2G - I$.
El área de la superficie sombreada original es $2(2G - I) = 4G - 2I$.

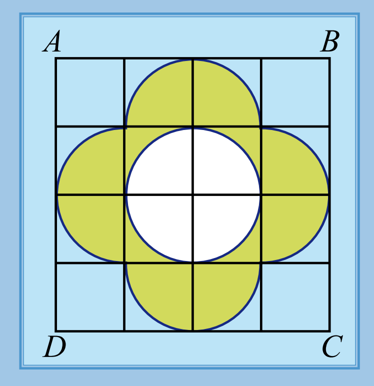
El sector circular AOC tiene un ángulo central cuya medida es 60°, por lo tanto $G = \frac{\pi r^2}{6}$.

Además, el área de la superficie del triángulo equilátero OAC es $I = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}$.

Por lo tanto, el área de la superficie pedida es: $4G - 2I = \frac{2\pi r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}r^2}{2}$

Ejemplo 7.53 Área de figuras circulares.

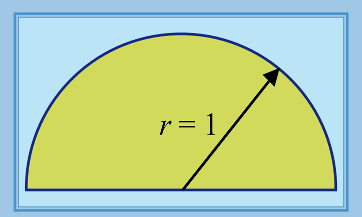
Si el área de la superficie del cuadrado $ABCD$ es $16u^2$ y se divide en 16 cuadrados iguales, calcule el área de la superficie sombreada.



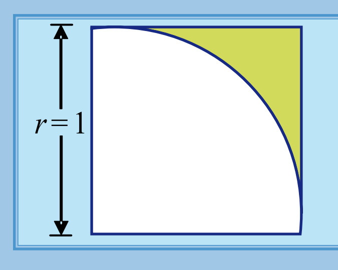
Solución:

Si $ABCD$ es un cuadrado de $16u^2$, cada cuadrado tiene un área de $1u^2$, esto es, longitud de lado igual a 1 unidad.

Sean A: Área de la superficie sombreada.
V: Área del semicírculo de longitud $r = 1$.
W: Área de la superficie del cuadrado – Área del cuarto de círculo.



$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}u^2$$



$$W = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = (1)^2 - \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)u^2$$

$$A = 4V + 4W$$

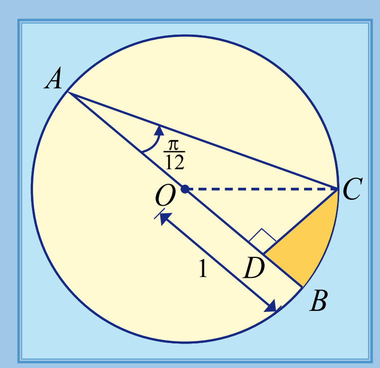
$$A = 4\left(\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = 4\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$$

$$A = (\pi + 4)u^2$$

Ejemplo 7.54 Área de figuras circulares.

En la figura adjunta, el radio de la circunferencia mide $1u$ y la medida del ángulo BAC es $\frac{\pi}{12}$ radianes. Encuentre el área de la superficie sombreada.



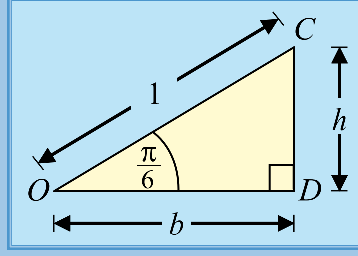
Solución:

$A = A_{\widehat{OCB}} - A_{\Delta OCD}$

$A = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{bh}{2}$

Sea $\theta = m(\measuredangle BOC)$, por el teorema del ángulo central se cumple que: $\theta = 2m(\measuredangle BAC) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}rad.$

El triángulo OCD es rectángulo y podemos aplicar funciones trigonométricas:



$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{1}$ $\quad cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{b}{1}$

$h = \frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

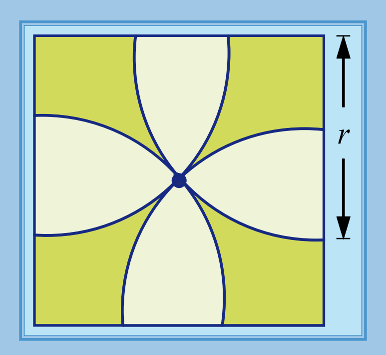
$$A = \frac{1}{2}(1)^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

El área de la región sombreada es $\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)u^2$.

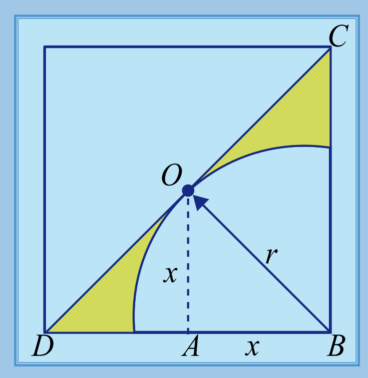
Ejemplo 7.55 Área de figuras circulares.

Determine el área de la superficie sombreada en la figura en términos de r.

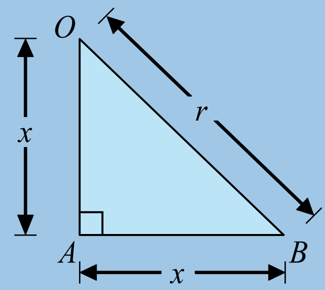


Solución:

Sea U el área de la región mostrada:



Construimos un triángulo rectángulo isósceles:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = r^2$$

$$2x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

U representa el área de la superficie del triángulo BCD menos el área de un cuarto de círculo.

$$U = \frac{bh}{2} - \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$U = \frac{(2x)(2x)}{2} - \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$U = 2x^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$U = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$$

El área de la superficie sombreada es igual a $4U$:

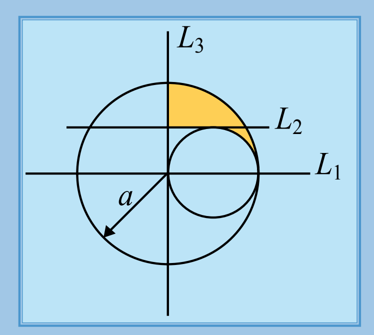
$$A_T = 4U$$

$$A_T = 4\left(\frac{4r^2 - \pi r^2}{4}\right)$$

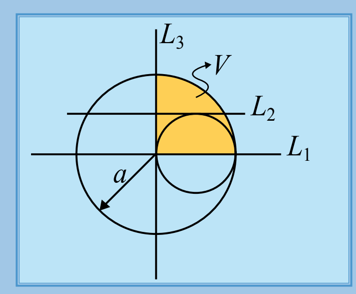
$$A_T = r^2(4 - \pi)u^2$$

Ejemplo 7.56 Área de figuras circulares.

En la figura adjunta $L_3 \perp L_1$ y $L_3 \perp L_2$. La circunferencia pequeña es tangente a la circunferencia grande y a las rectas L_3 y L_2. Se pide calcular el área U de la superficie sombreada.

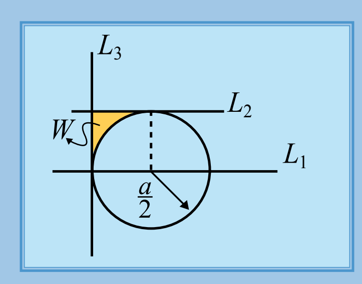


Solución:



Sea V el área del cuarto del círculo de longitud de radio $r = a$.

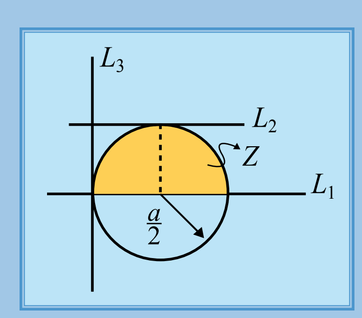
$$V = \frac{1}{4}\left[\pi(a)^2\right] = \frac{\pi a^2}{4}$$



Sea W el valor de la superficie del cuadrado de longitud de lado $L = \frac{a}{2}$ menos el área del cuarto de círculo de longitud de radio $r = \frac{a}{2}$.

$$W = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$W = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{16}$$



Sea Z el área del semicírculo de longitud de radio $r = \frac{a}{2}$.

$$Z = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi a^2}{8}$$

El área de la superficie sombreada se puede calcular así: $U = V - W - Z$.

Es decir: $U = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{16} - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{3\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{3\pi}{4} - 1\right) u^2$.

7.5 Triángulos

1. Construya de ser posible los siguientes triángulos ABC. En caso de que existan, determine sus cuatro puntos característicos empleando regla y compás.

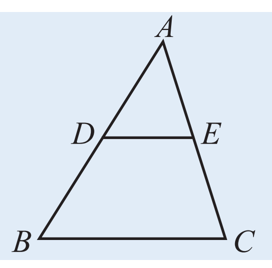
a)	$a = 10cm$	;	$b = 5cm$	;	$c = 7cm$
b)	$a = 6cm$	;	$b = 2cm$	;	$c = 9cm$
c)	$a = 6cm$	;	$m(\measuredangle B) = 40^o$	;	$m(\measuredangle C) = 75^o$
d)	$c = 8cm$	;	$m(\measuredangle A) = 120^o$	;	$m(\measuredangle C) = 60^o$
e)	$a = 12cm$	;	$b = 4cm$	;	$m(\measuredangle C) = 80^o$
f)	$b = 12cm$	;	$c = 4cm$	;	$m(\measuredangle A) = 180^o$

7.6 Semejanza y congruencia

2. Respecto a la figura mostrada:

$\overline{AB} = 10u$
$\overline{BC} = 8u$
$\overline{AD} = 4u$
$\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

Determine $\overline{DE}$.

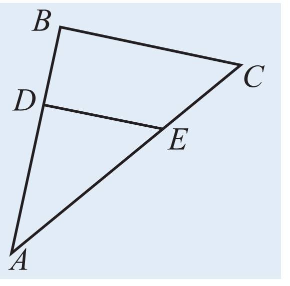


3. Considere el triángulo ABC mostrado en la figura.

Si $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y las longitudes de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$ son 15, 40 y 16 pies, respectivamente, entonces la longitud del segmento $\overline{DE}$, expresado en pies, es:



a) 9 b) 6 c) 5 d) 10 e) 7



7.7 Resolución de triángulos

4. Resolver un triángulo rectángulo e isósceles en el que la hipotenusa tiene 9 pies de longitud.

5. Hallar la longitud de la sombra de un árbol de $10m$ de altura cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 30°.

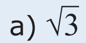
6. Determine la medida del ángulo que una escalera de $8m$ de longitud forma con el suelo, si está apoyada en una pared a una altura de $6m$ del suelo.

7. Resolver un triángulo isósceles en el cual la base mide $18cm$ y la altura $12cm$.

8. Resuelva un triángulo isósceles cuya base mide $6cm$ de longitud y su ángulo opuesto es de 80°.

9. Una torre que sirve de soporte para una antena de radio está sujeta al suelo mediante dos cables que forman con dicha torre ángulos cuyas medidas son 36° y 48°, respectivamente. Si los puntos de sujeción de los cables al suelo y el pie de la torre se encuentran alineados y a una distancia total de $98m$, calcule la altura de la torre.

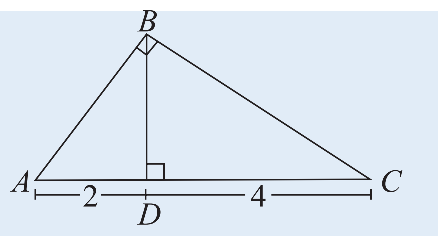
10. Si se tiene el triángulo de la figura adjunta, entonces la longitud del segmento $\overline{BD}$ es:

a)  $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}/2$



11. Calcule la longitud $\overline{AB}$ de un canal, sabiendo que $\overline{AC} = 2m$, $\overline{DC} = 40cm$ y $\overline{DE} = 60cm$.

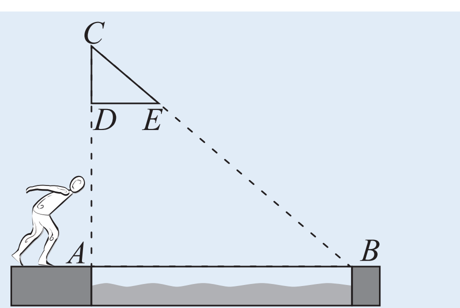
a) $6.5m$

b) $5.4m$

c) $2.4m$

d) $2m$

e) $3m$



12. Si M es un punto ubicado a un tercio del lado $\overline{BC}$ respecto a C, del cuadrado $ABCD$ mostrado en la figura, entonces el valor de $tan(\alpha)$ es:

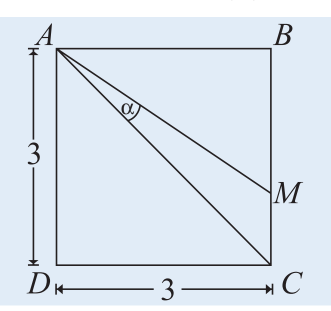
a) $-1/3$

b) $1/3$

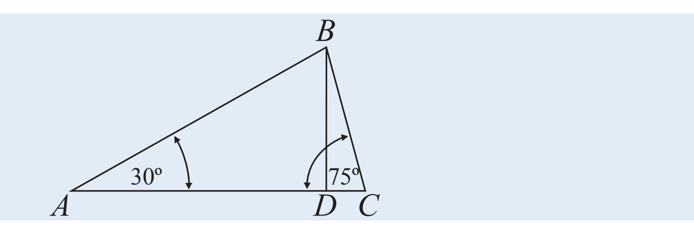
c) $1/2$

d) $1/5$

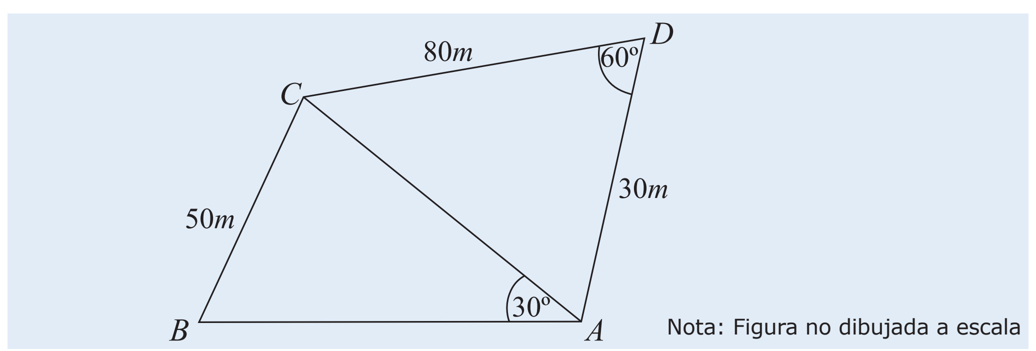
e) $-1/5$



13. Si en el gráfico adjunto se conoce que $\overline{AC} = 30u$ y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, encuentre la longitud del segmento $\overline{BD}$.



14. En la figura aparecen dos triángulos adyacentes ABC y ACD, en los cuales $\overline{AD} = 30m$, $\overline{CD} = 80m$, $\overline{BC} = 50m$, $m(\measuredangle D) = 60^{\circ}$ y $m(\measuredangle BAC) = 30^{\circ}$.



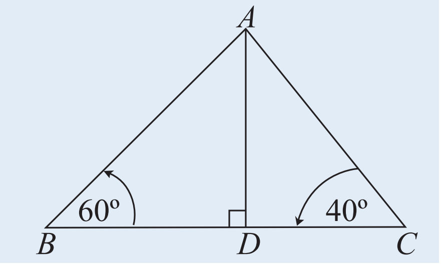
a) Usando el triángulo ACD, calcule la longitud $\overline{AC}$.

b) Calcule la medida del ángulo ABC.

15. La siguiente figura muestra un triángulo ABC, donde: $\overline{BC} = 5cm$, $m(\measuredangle B) = 60^{\circ}$ y $m(\measuredangle C) = 40^{\circ}$.

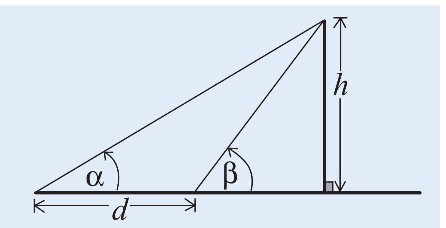
a) Demuestre que $\overline{AB} = \dfrac{5}{2\ cos(40^{\circ})}$.

b) Halle la longitud $\overline{AD}$.



16. Para el diagrama adjunto, demuestre que:

$$h = d\left[\frac{sen(\alpha)\ sen(\beta)}{sen(\beta - \alpha)}\right]$$



17. Si en el triángulo isósceles ABC de la figura la longitud de la mediana dibujada mide $10cm$, entonces la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo es:

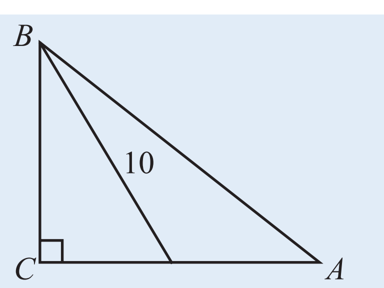
a) $4\sqrt{5}\ cm$

b) $4\sqrt{10}\ cm$

c) $4\sqrt{2}\ cm$

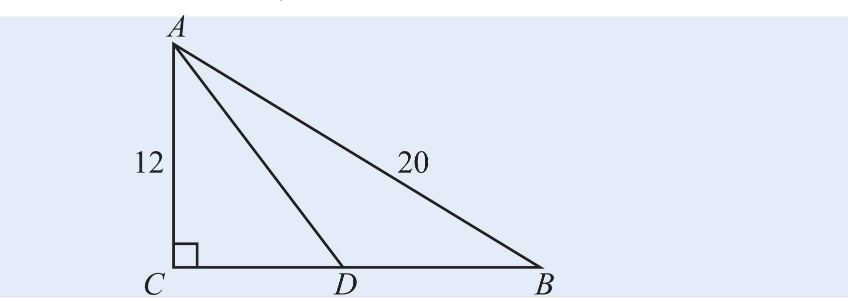
d) $8\sqrt{2}\ cm$

e) $2\sqrt{5}\ cm$

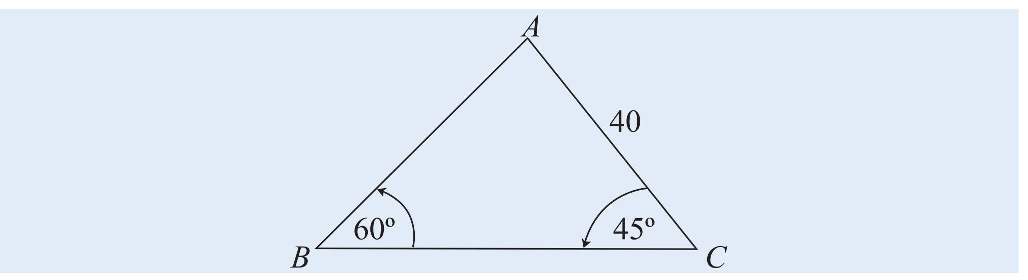


18. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $75cm$, y uno de sus catetos $45cm$. Encuentre la longitud de la altura trazada desde el ángulo recto a la hipotenusa.

19. El triángulo ABC es recto en C, si $\overline{AD} = \overline{DB} + 8$. ¿Cuál es el valor de $\overline{CD}$?



20. En el triángulo descrito, halle la longitud del segmento $\overline{BC}$.



21. Un rectángulo tiene dimensiones de 100 x $60cm$. Determinar la medida de los ángulos que una de sus diagonales forma con los lados.

22. Calcular la longitud del lado de un rombo cuyas diagonales miden 6 y $8cm$. Construya el rombo.

23. Un trapecio isósceles tiene bases que miden 12 y $20pulg$. Determinar la medida del ángulo en su base mayor para que el lado no paralelo mida $6pulg$.

24. Calcular la longitud de la base menor de un trapecio rectángulo cuya base mayor mide $4m$ y sus lados no paralelos miden 2 y $4m$. Construya el trapecio.

7.9 Perímetro y área de un polígono

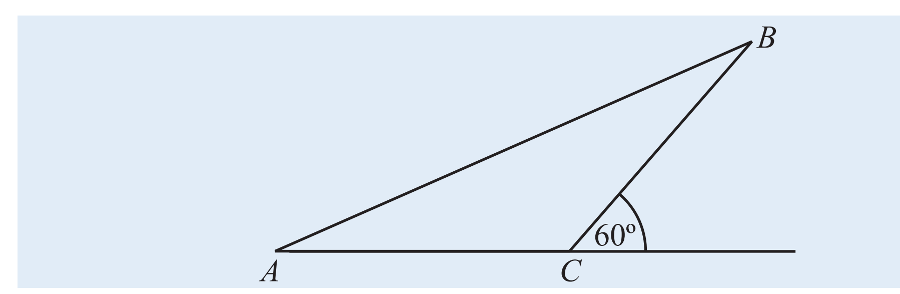
25. Encuentre el área de la superficie de un triángulo equilátero con lado $5cm$.

26. Encuentre las dimensiones de un paralelogramo que tiene un área de $90\sqrt{3}\ cm^2$, sus lados forman un ángulo que mide 60° y están a razón de 3 a 1. Construya dicho paralelogramo.

27. Calcule las dimensiones de un rectángulo de $100m^2$ de área, si están a razón de 1 a 4. Construya dicho rectángulo.

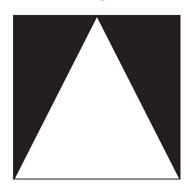
28. La diagonal de un rectángulo tiene $10u$ de longitud y uno de sus lados mide $6u$. Entonces el área de la superficie del rectángulo expresada en u^2 es:
a) 8 b) 60 c) 6 d) 48 e) 16

29. Determine el área de la superficie del triángulo ABC mostrado en la figura adjunta, si la longitud del segmento $\overline{AC}$ es $4u$ y la del segmento $\overline{BC}$ es $2u$.

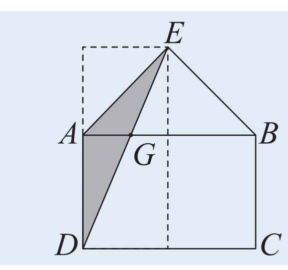


30. En la figura adjunta se muestra un cuadrado cuyo lado mide $10u$ y el triángulo inscrito es isósceles. El área de la región sombreada, expresada en u^2, es:

a) 25
b) 50
c) 100
d) 20
e) 10



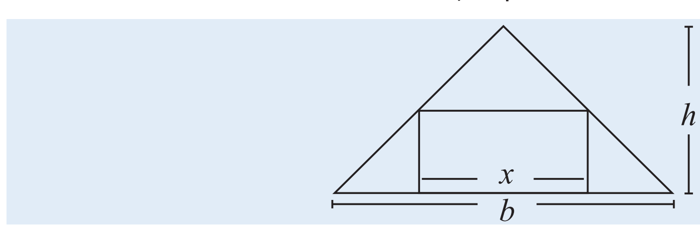
31. En la figura adjunta, considere lo siguiente:



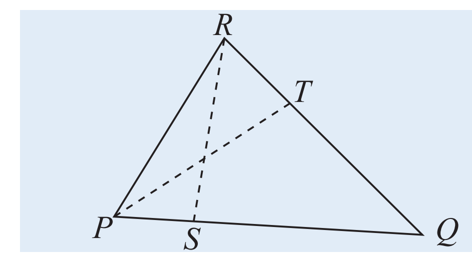
$ABCD$ es cuadrado.
AEB es triángulo equilátero.
$\overline{AD} = 1u$

Determine el área de la región sombreada y la longitud del segmento $\overline{AG}$.

32. En la figura mostrada, el rectángulo está inscrito en un triángulo isósceles y su altura es la mitad de su base, exprese el valor de x en términos de b y h.

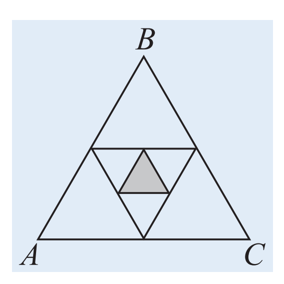


33. En la figura adjunta, encuentre la longitud de $\overline{QR}$ si:

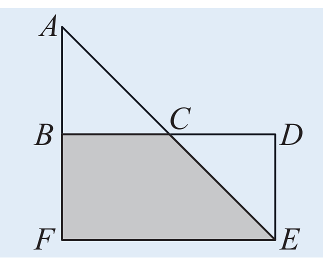


$\overline{RS}$ es altura de $\overline{PQ}$.
$\overline{PT}$ es altura de $\overline{RQ}$.
$\overline{PQ} = 8$
$\overline{RS} = 9$
$\overline{PT} = 6$

34. Todos los triángulos mostrados en la figura son equiláteros.
¿Qué parte de la superficie sombreada corresponde a la del triángulo ABC?



35. Encuentre el área de la región sombreada, si se conoce que:



$BDEF$ es cuadrado.

$\overline{AB} = 5$

$\overline{BC} = 2$

36. Si se tienen dos triángulos equiláteros con una razón de semejanza igual a 2, y la superficie del triángulo de mayor área mide $8u^2$, entonces el otro triángulo tiene una superficie que mide $4u^2$.
a) Verdadero b) Falso

37. Un rombo tiene diagonales que miden 6 y $8cm$, respectivamente. Entonces el área de su superficie es $25cm^2$.
a) Verdadero b) Falso

38. Si la superficie de un cuadrado mide el doble que la de un triángulo equilátero, las longitudes de sus lados están en razón de 1 a 4, respectivamente.
a) Verdadero b) Falso

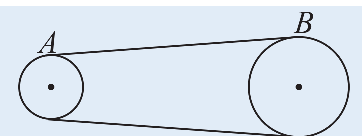
7.12 Figuras circulares

39. Calcular la longitud de la cuerda que corresponde a un ángulo central de medida igual a 60° en una circunferencia de $4cm$ de radio.

40. Determine la medida del ángulo central que define una cuerda de $8cm$ trazada en una circunferencia de $12cm$ de radio.

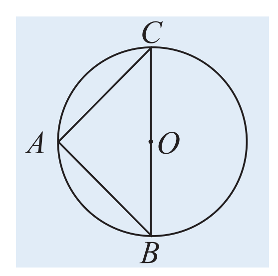
41. Un ángulo central α sostiene un arco de longitud $8cm$ trazado en una circunferencia de $12cm$ de radio. Entonces, la medida de α es $\pi/3$.
a) Verdadero b) Falso

42. Se tienen dos poleas con diámetros de 2 y $4cm$ de longitud, respectivamente, tal como lo muestra la figura adjunta. Los centros de las poleas se encuentran a $5cm$ de distancia. Una correa plana une exteriormente las dos poleas pasando por los puntos A y B. Determine la longitud del segmento $\overline{AB}$ expresado en cm.

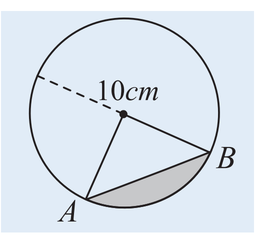


43. Determine la longitud total de una correa plana que une exteriormente dos poleas de radios 12 y $24cm$, respectivamente, y cuyos centros se encuentran a $54cm$ de distancia.

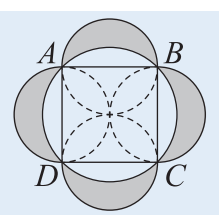
44. En la figura adjunta se tiene una circunferencia con cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, un diámetro $\overline{CB}$ de longitud $10cm$. Si el ángulo B mide $\pi/3$, calcule el área de la superficie del triángulo ABC.



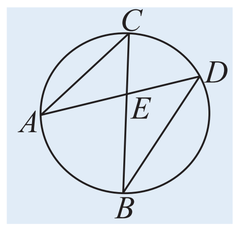
45. En la figura adjunta $\overline{AB} = 5\sqrt{3}$. Calcule el área de la región sombreada.



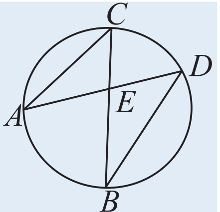
46. Encuentre el área de la región sombreada, si se conoce que $ABCD$ es un cuadrado de lado con $4cm$ de longitud.



47. En la figura adjunta se tiene una circunferencia con cuerdas $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. Si la longitud de la cuerda $\overline{AC}$ es igual a $2cm$, la longitud del segmento $\overline{CE}$ es $1cm$, y de $\overline{ED}$ es $2cm$, determine la longitud de la cuerda $\overline{BD}$.



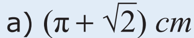
Para las siguientes dos preguntas, considere la circunferencia mostrada en la gráfica adjunta.



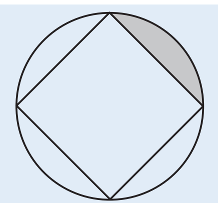
48. El triángulo ACE es semejante al triángulo BDE.
    a) Verdadero b) Falso

49. Si la longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a $2\pi cm$, y la longitud del radio de la circunferencia es $3cm$, entonces el ángulo inscrito AOB mide $2\pi/3$.
    a) Verdadero b) Falso

50. Se inscribe un cuadrado en un círculo cuyo radio mide $2cm$, tal como lo muestra la figura. El perímetro de la región sombreada es:

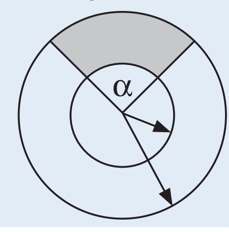


a) $(\pi + \sqrt{2})\ cm$
b) $(\pi + 2\sqrt{2})\ cm$
c) $(\pi - \sqrt{2})\ cm$
d) $(2\pi + \sqrt{2})\ cm$
e) $2(\pi + \sqrt{2})\ cm$



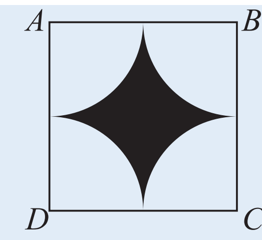
51. Tal como se muestra en la figura adjunta, se colocan dos circunferencias concéntricas con radios de $1m$ y $2m$ de longitud, respectivamente. La medida del ángulo α es $\pi/3$. El área de la región sombreada es:

a) $\frac{\pi}{2}\ m^2$ b) $\frac{5\pi}{3}\ m^2$ c) $\frac{5\pi}{6}\ m^2$ d) $\frac{5\pi}{2}\ m^2$ e) $\frac{\pi}{6}\ m^2$



52. En la siguiente figura se muestra un cuadrado $ABCD$ cuyo lado tiene $12cm$ de longitud. Si de cada vértice del cuadrado se ha trazado un arco de circunferencia, el área de la región sombreada, expresada en cm^2, es:

a) $(1 + 2\pi)$
b) $36(4 + \pi)$
c) $36(4 - \pi)$
d) 144π
e) $36\pi - 12$



53. Un sector circular tiene un ángulo central de medida $\pi/6$ radianes. El área de este sector mide $4\pi/3\ cm^2$. Determine el perímetro de este sector.

Para los siguientes dos problemas considere una circunferencia de $8cm$ de radio. Determine:

54. El área de la superficie de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia.

55. La longitud que debe tener el lado de un hexágono para que su área sea dos veces el área del triángulo del ejercicio anterior.

56. Determine la longitud de la apotema, el perímetro, el área, la longitud del radio de la circunferencia inscrita y circunscrita de los siguientes polígonos regulares. Constrúyalos en papel, empleando lápiz, regla y compás.

a. Pentágono con lado de $7cm$.
b. Hexágono con lado de $5cm$.
c. Octágono con lado de $6cm$.
d. Nonágono con lado de $4cm$.

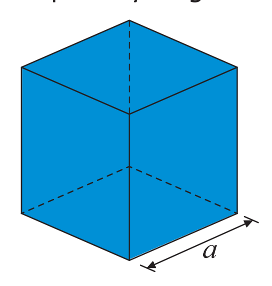


Capítulo 8

Geometría del Espacio

Introducción

Esta rama de la geometría, también denominada Estereometría, se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el espacio tridimensional. Estas figuras se denominan sólidos y entre ellas se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio y la geometría descriptiva, entre otras.



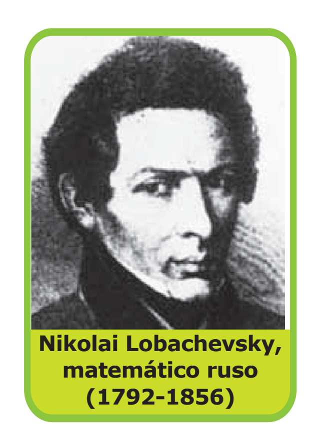
El estudio de la geometría tridimensional data de la antigua Grecia, cuando se planteó el famoso problema de **la duplicación del cubo**. Cuenta la leyenda que la peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Un embajador de la ciudad fue al oráculo de Delfos, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al oráculo, la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delfos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Los atenienses construyeron un altar cúbico en el que las medidas de los lados eran el doble de las medidas del altar de Delfos, pero la peste no cesó. Consultado de nuevo, el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino 8 veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su arista $((2a)^3 = 8a^3)$. Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos (no así la enfermedad).



János Bolyai, matemático húngaro (1802-1860)

Gauss fue el primero que creyó construir una geometría (un modelo del espacio) en la que no se cumple el V postulado de Euclides, pero no publicó su descubrimiento. Son Bolyai y Lobachevsky quienes, de manera independiente y simultánea, publicaron cada uno una geometría distinta en la que no se verifica tampoco

el V postulado. ¿Qué quiere decir esto? Tanto Bolyai como Lobachevsky parten de un objeto geométrico y establecen sobre él, unos postulados que son idénticos a los de Euclides en "*Los Elementos*", excepto el quinto. Pretenden originalmente razonar por reducción al absurdo: si el V postulado depende de los otros cuatro, cuando lo sustituya por aquél que dice exactamente lo contrario, se ha de llegar a alguna contradicción lógica.



Nikolai Lobachevsky, matemático ruso (1792-1856)

Lo sorprendente es que no se llega a contradicción alguna, lo cual indica dos cosas:

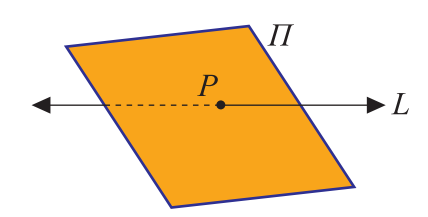
1. El V postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado.
2. Existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, un punto que no esté contenido en una cierta recta no necesariamente forma parte de una única recta paralela a la dada. Esto no es intuitivo, pues no podemos concebir tal cosa, no podemos imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin reinterpretar los conceptos de recta, plano, etc. Pero desde el punto de vista lógico, es perfectamente válido.

Como es de imaginar, esto supuso una fuerte crisis en las matemáticas del siglo XIX, que vino a sumarse a otras controversias.

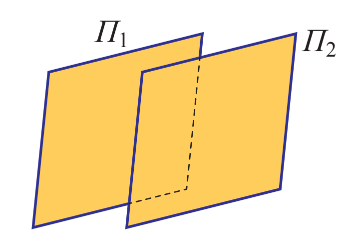
8.1 Figuras en el espacio

En esta sección se identifican los elementos que participan en la geometría espacial, los cuales son fundamentales para la creación de objetos en tres dimensiones.

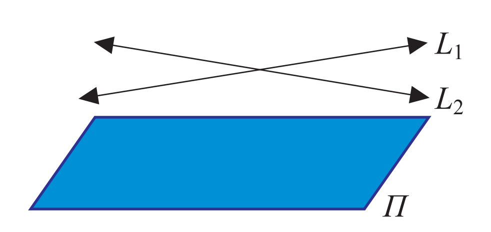
En el espacio existen figuras (conjuntos de puntos) que no están contenidas en plano alguno, a continuación se muestran algunos de ellos y sus relaciones.



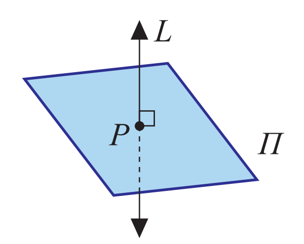
a) Recta intersecando un plano.



b) Planos paralelos.



c) Dos rectas concurrentes paralelas a un mismo plano.



d) Recta perpendicular a un plano.

Figura 8.1: Figuras en el espacio.

8.2 Rectas y planos en el espacio

Objetivos

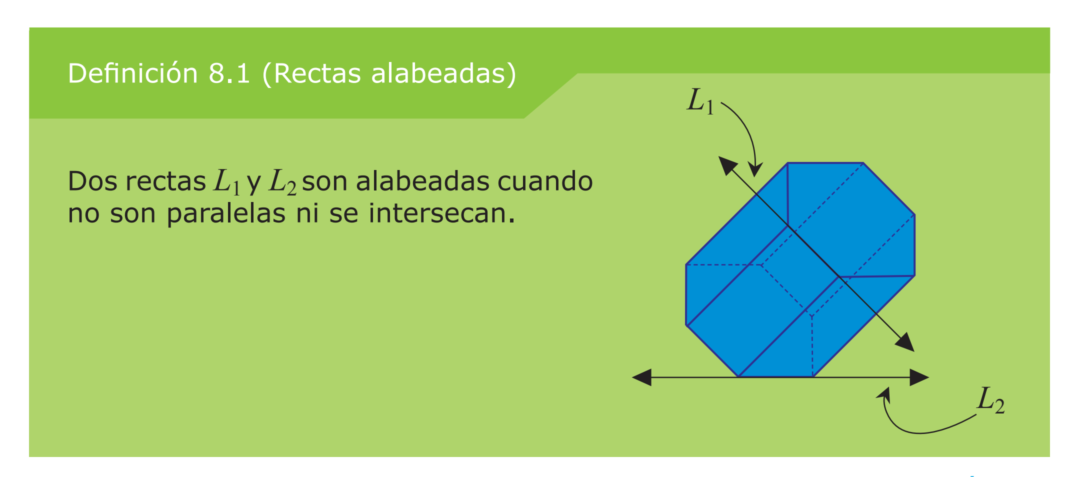
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas dos rectas en el espacio, explicar si son secantes, alabeadas o paralelas, justificando adecuadamente su respuesta.
* Dados un plano y una recta en el espacio, explicar si la recta es perpendicular, secante o paralela al plano.
* Interpretar el concepto de semiespacio, ángulo diedro, ángulo poliedro, arista, cara y vértice.

En el espacio puede ocurrir que dos rectas no sean paralelas o no tengan algún punto de intersección, lo cual no ocurre en el plano.

Definición 8.1 (Rectas alabeadas)

Dos rectas L_1 y L_2 son alabeadas cuando no son paralelas ni se intersecan.



Con respecto a un plano Π, una recta L puede ocupar una de las tres posiciones siguientes:

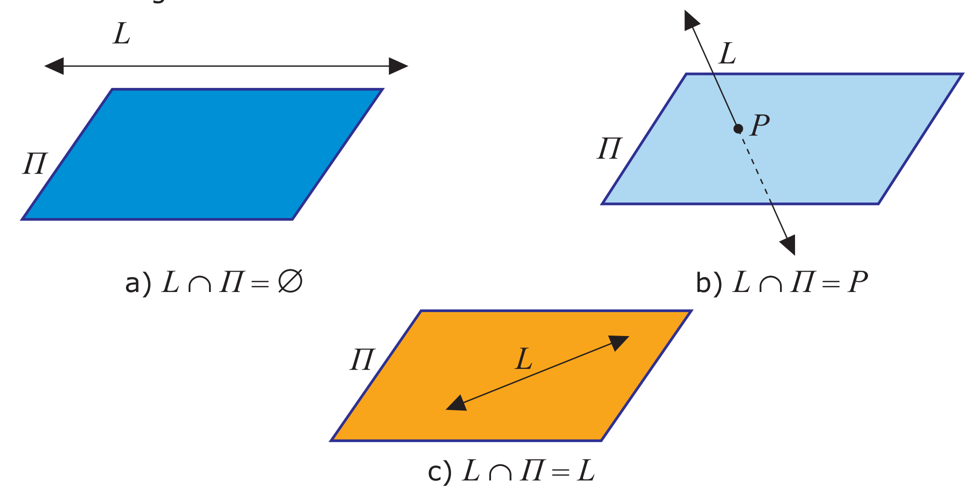


Figura 8.2: Recta L y plano Π.

a) L es paralela al plano Π y no está contenida en él,
b) L interseca a Π en un punto P, y
c) L es paralela a Π y es un subconjunto de Π.

De los casos a) y c) se entiende el paralelismo entre el plano Π y la recta L, así:

$$(L \parallel \Pi) \equiv ((L \cap \Pi = \varnothing) \vee (L \subset \Pi))$$

Definición 8.2 (Planos paralelos)

Un plano es paralelo a otro cuando no se intersecan o son coincidentes. La notación para el paralelismo es: $\Pi_1 \| \Pi_2$.

$$(\Pi_1 \parallel \Pi_2) \equiv ((\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing) \vee (\Pi_1 = \Pi_2))$$

Un plano siempre divide al espacio en dos **semiespacios**.

Dos planos no paralelos se denominan **planos secantes**.

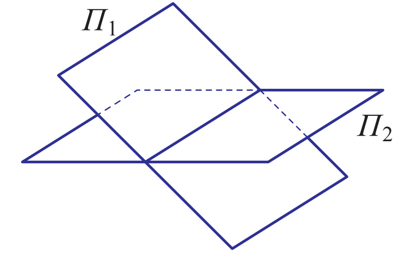


Figura 8.3: Planos secantes.

Definición 8.3 (Ángulo diedro)

Es la unión de dos semiplanos que se intersecan en su borde. Al ángulo diedro se lo suele denominar simplemente diedro; a los semiplanos se los denomina caras del diedro y al borde común se lo denomina arista del diedro.

Dos planos secantes determinan un ángulo diedro. Un ejemplo de este ángulo lo encontramos en la figura que se forma al abrir una tarjeta de cumpleaños.

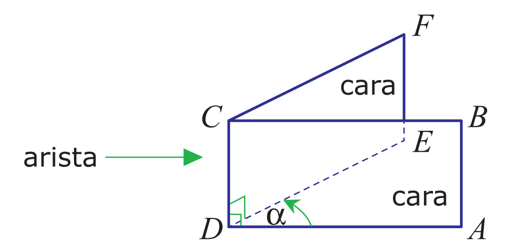


Figura 8.4: Ángulo diedro.

En el diedro $ABCDEF$, los semiplanos $ABCD$ y $CDEF$ son las **caras** del diedro, y la recta $\overline{CD}$ es la **arista** del diedro.

Se denomina **ángulo rectilíneo** al ángulo formado por dos rectas perpendiculares, $\overline{DA}$ y $\overline{DE}$, a la arista $\overline{DC}$, cada una situada en caras diferentes del diedro. La **medida del ángulo diedro** es la medida de su ángulo rectilíneo α.

Definición 8.4 (Ángulo poliedro)

Es la unión de semirrectas que se intersecan en su extremo V y que tienen un punto común con la poligonal d contenida en un plano que no contiene a V. A las semirrectas que se intersecan con uno de los vértices de la poligonal se las denomina aristas del ángulo poliedro y el punto V se denomina vértice del ángulo poliedro.

Por ejemplo, el ángulo triedro (intersección de tres semiplanos) es un ángulo poliedro formado por el vértice V, tres aristas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, y tres caras VAB, VBC, VCA.

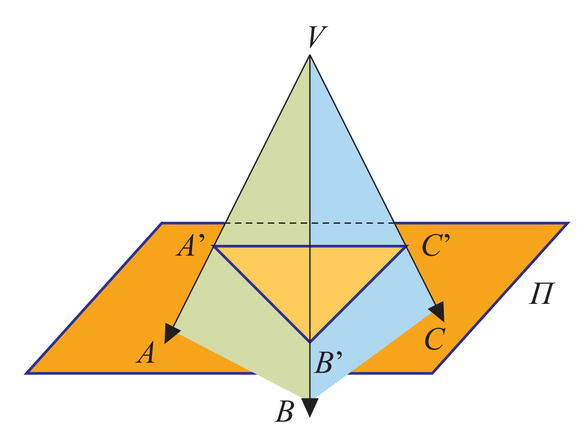


Figura 8.5: Ángulo poliedro.

La intersección del ángulo triedro con el plano Π determina el triángulo $A'B'C'$.

Ejemplo 8.1 Ángulo poliedro.

La figura que forman en un rincón de una habitación las dos paredes y el techo que inciden en ese punto es un claro ejemplo de un ángulo triedro. Las pirámides utilizadas por civilizaciones como las egipcias emplearon el concepto de ángulo tetraedro. La plomada, que es un peso que se emplea en construcción, tiene en su punta un ángulo hexaedro.







8.3 Cuerpos geométricos

En esta sección se clasificarán diferentes cuerpos que se pueden presentar en el espacio tridimensional, atendiendo a los elementos estudiados anteriormente.

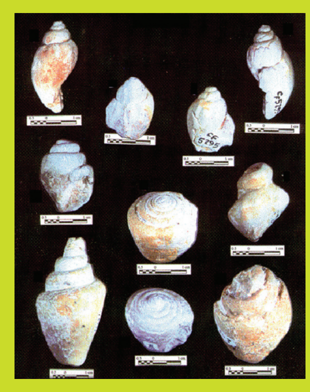
Definición 8.5 (Poliedro)

Se define como poliedro al cuerpo que está limitado por superficies planas (denominadas caras) y de contorno poligonal (denominadas aristas de las caras). Los vértices del poliedro son los vértices de las caras.

Ejemplo 8.2 Poliedros.

Algunos minerales y esqueletos de criaturas marinas son modelos de los sólidos denominados poliedros que se estudiarán en esta sección.





Un **poliedro convexo** es aquel que está limitado por polígonos convexos. Entre sus propiedades más importantes figuran:

- Cada arista de una cara pertenece también a otra cara y únicamente a otra. Dichas caras se denominan **contiguas**.
- Dos caras contiguas están en planos distintos.
- El plano que contiene a cada cara deja a todas las demás a un mismo lado del espacio, es decir, en un mismo semiespacio.
- El número de aristas es igual al número de caras más el número de vértices disminuido en 2.

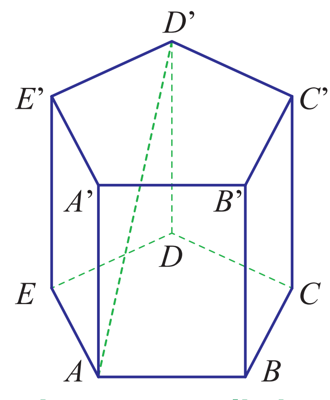


Figura 8.6: Poliedro.

En el poliedro anterior se tienen los vértices A, B, C, D, E, A', B', C', D', E', las aristas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, y las caras $AEE'A'$, $BAA'B'$, $CBB'C'$, $DCC'D'$, $EDD'E'$. En cada vértice deben concurrir al menos tres aristas.

La **diagonal** del poliedro es un segmento de recta que une dos vértices situados en caras diferentes. Por ejemplo, $\overline{AD'}$ es una diagonal en la figura anterior.

Según el número de sus caras, los poliedros se denominan así:

Número de Caras	Nombre
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
10	Decaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

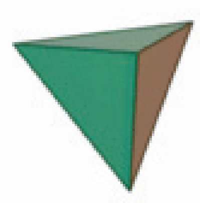
Cuadro 8.1: Nombres de poliedros según su número de caras.

Definición 8.6 (Poliedro regular)

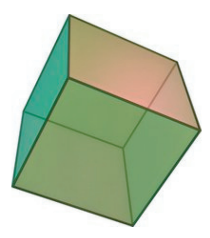
Un poliedro de n caras se dice que es regular, si y sólo si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y sus ángulos poliedros también son congruentes.

Los poliedros regulares, también denominados sólidos platónicos (en honor a Platón), son sólo cinco:

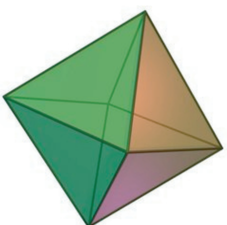
1. **Tetraedro regular:** Está limitado por 4 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 4 vértices, 4 ángulos triedros, 6 aristas y 6 ángulos diedros.



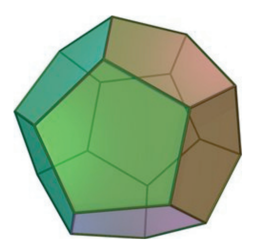
2. **Hexaedro regular o cubo:** Está limitado por 6 caras que son cuadrados. Tiene 8 vértices, 8 ángulos triedros, 12 aristas, 12 ángulos diedros y 4 diagonales congruentes y concurrentes.



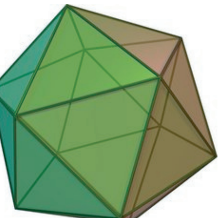
3. **Octaedro regular:** Está limitado por 8 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 6 vértices, 6 ángulos tetraedros, 12 aristas y 12 ángulos diedros. Está formado por dos pirámides unidas por su base común.



4. **Dodecaedro regular:** Está limitado por 12 caras que son pentágonos regulares. Tiene 20 vértices, 20 ángulos triedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.



5. **Icosaedro regular:** Está limitado por 20 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 12 vértices, 12 ángulos pentaedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.



Otro tipo de poliedros importantes son los **prismas** y las **pirámides**, los mismos que serán estudiados a continuación.

8.4 Prismas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un prisma, reconocer los elementos que lo conforman.
* Dado un prisma, identificar si es oblicuo, recto o regular.
* Dado un paralelepípedo, analizar sus principales características.

Definición 8.7 (Prisma)

Un prisma es un poliedro en el cual existen dos caras congruentes paralelas, denominadas bases, en donde las otras caras, denominadas caras laterales, conectan los lados congruentes de las caras paralelas.

A una recta que es paralela a una de las aristas de una cara lateral se la denomina recta **generatriz**. En un prisma las caras laterales son paralelogramos y son paralelas a la recta generatriz g.

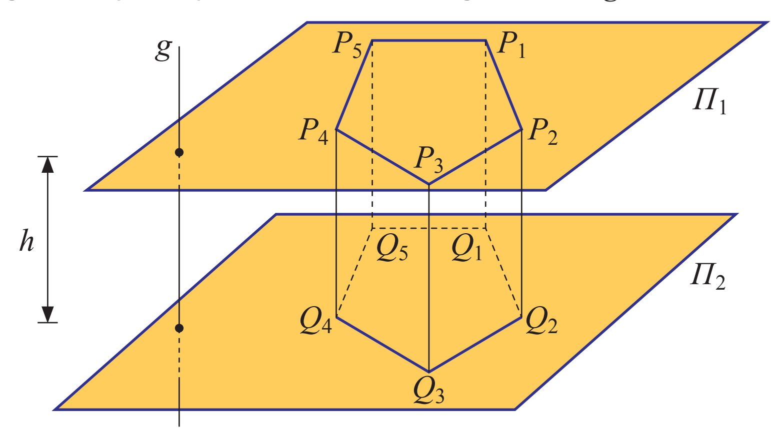


Figura 8.7: Prisma pentagonal.

En la figura anterior las bases del prisma son los pentágonos $P_1P_2P_3P_4P_5$ y $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$, las caras laterales del prisma son $Q_4Q_3P_3P_4$, $Q_3Q_2P_2P_3$, $Q_2Q_1P_1P_2$, $Q_1Q_5P_5P_1$, $Q_5Q_4P_4P_5$; y, g es una recta generatriz paralela a las aristas $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\overline{P_4Q_4}$, $\overline{P_5Q_5}$.

La distancia mínima entre los planos que contienen a las bases del prisma se denomina **altura** del prisma, es decir, es la longitud del segmento de recta perpendicular entre las dos bases.

Si las aristas laterales son perpendiculares al plano que contiene una base, el prisma se denomina **prisma recto**.

En el prisma recto la altura h es congruente con la longitud de las aristas laterales. Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos. Si las bases son polígonos regulares se denomina **prisma recto regular** y, en este caso, las caras laterales son rectángulos congruentes entre sí. Por ejemplo:

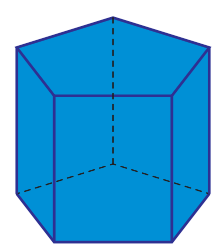


Figura 8.8: Prisma recto regular.

El prisma también puede ser **oblicuo**, si las aristas laterales no son perpendiculares a las bases. Por ejemplo:

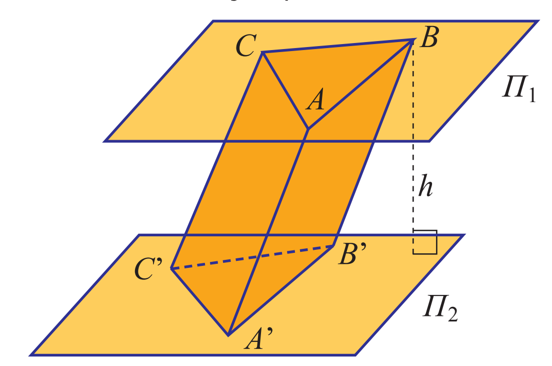
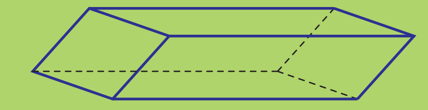


Figura 8.9: Prisma oblicuo triangular.

Definición 8.8 (Paralelepípedo)

Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos.



A un paralelepípedo recto rectangular se le denomina **ortoedro**.

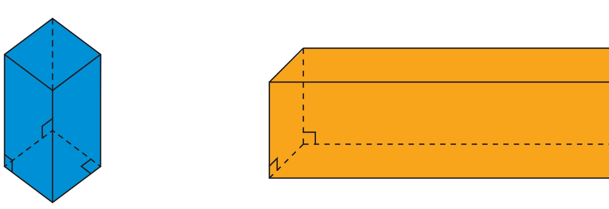
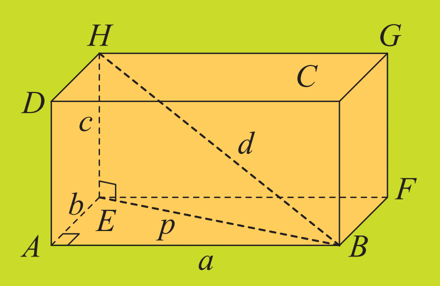


Figura 8.10: Ortoedros.

Ejemplo 8.3 Aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio.

Demuestre que en un paralelepípedo recto rectangular el cuadrado de la longitud de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.



Hipótesis: a, b y c son las dimensiones del paralelepípedo recto rectangular. Se busca la longitud de la diagonal d.

Tesis: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Solución:

En la figura, d es la hipotenusa del triángulo rectángulo BHE:

$$d^2 = p^2 + c^2 \qquad \text{(I)}$$

En el triángulo rectángulo ABE, p es la hipotenusa, entonces:

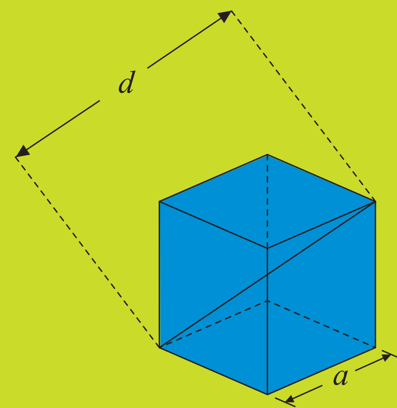
$$p^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(II)}$$

Luego, reemplazando (II) en (I), se tiene:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Ejemplo 8.4 La longitud de la diagonal de un cubo.

Calcule la longitud de la diagonal de un cubo.



Solución:

En el cubo o hexaedro regular, las tres dimensiones son iguales:

$$\begin{aligned} a = b = c \;\Rightarrow\; & d^2 = a^2 + a^2 + a^2 \\ \Rightarrow\; & d^2 = 3a^2 \\ \Rightarrow\; & d \;= a\sqrt{3} \end{aligned}$$

8.5 Pirámides

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una pirámide, reconocer los elementos que la conforman.
* Dada una pirámide, identificar si es oblicua, recta o regular.

Definición 8.9 (Pirámide)

Una pirámide es un poliedro en el cual existe una cara denominada base y un punto que no pertenece al mismo plano de la base, denominado vértice, tal que las otras caras, denominadas caras laterales, son triángulos que van desde los lados de la base al vértice.

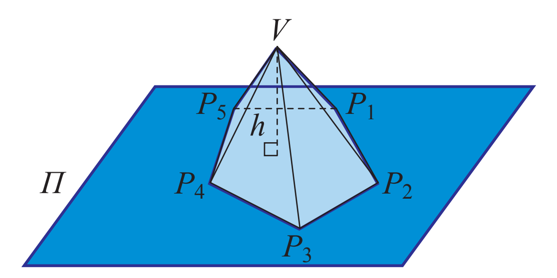


Figura 8.11: Pirámide.

En el poliedro anterior se tienen en la base los vértices P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y las aristas $\overline{P_4P_3}$, $\overline{P_3P_2}$, $\overline{P_2P_1}$, $\overline{P_1P_5}$, $\overline{P_5P_4}$.

Las **aristas laterales** de una pirámide son los segmentos $\overline{VP_1}$, $\overline{VP_2}$, ..., $\overline{VP_n}$. Una pirámide tiene sólo una base.

La distancia mínima entre el plano que contiene a la base de la pirámide y el vértice se denomina **altura** de la pirámide.

Una **pirámide recta** es aquella en la que el pie de su altura en la base equidista de todos los vértices del polígono base; caso contrario, se dice que es **oblicua**.

Definición 8.10 (Pirámide regular)

Una pirámide se denomina regular si es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.

Si la pirámide es regular sus caras son triángulos isósceles congruentes, denominándose **apotema** de la pirámide a la altura de cualquiera de estos triángulos.

Si una pirámide se interseca con un semiespacio generado por un plano paralelo a la base de la pirámide, resultan dos cuerpos: una pirámide y otro que se denomina **pirámide truncada**. Una pirámide truncada tiene dos bases paralelas semejantes, las caras laterales son trapecios que unen los lados semejantes de las bases paralelas y la altura h es la distancia mínima entre ellas.

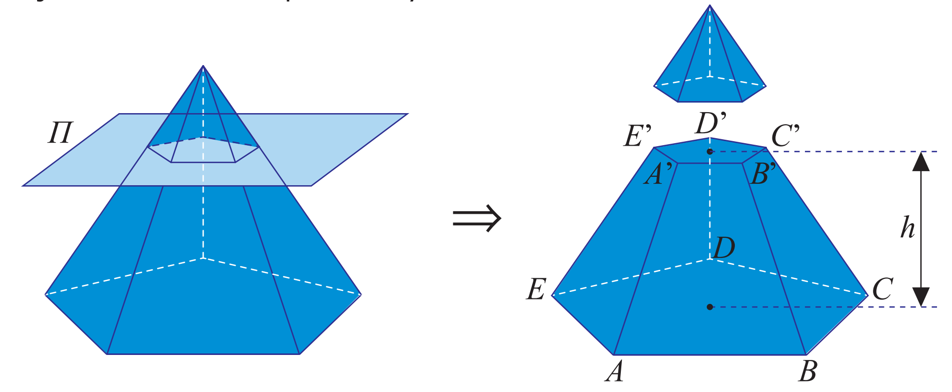


Figura 8.12: Pirámide truncada.

En la figura anterior las bases de la pirámide truncada son los pentágonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, las caras laterales son $EAA'E'$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$.

8.6 Áreas de poliedros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un prisma, calcular el área de su superficie lateral y el área de su superficie total.
* Dada una pirámide, calcular el área de su superficie lateral y el área de su superficie total.
* Dada una pirámide truncada, calcular el área de su superficie lateral y el área de su superficie total.

Los diseñadores profesionales y decoradores de interiores necesitan determinar la cantidad de material que se requiere para decorar superficies. En ocasiones, objetos familiares, tales como mesas auxiliares o vitrinas, tienen formas de prisma o pirámide. Con frecuencia es necesario calcular el área de estas superficies.

Para determinar el área de la superficie de los cuerpos poliedros calculamos el área de cada uno de los polígonos o caras que forman su superficie, sumando luego las áreas obtenidas.

Geometría del Espacio

En los prismas y en las pirámides se tiene los siguientes tipos de áreas:

- Área de la superficie lateral (A_L): Es la suma de las áreas de las superficies de las caras laterales.
- Área de la superficie de la base (A_B): Es el área de la superficie de una base.
- Área de la superficie total (A_T): Es la suma del área de la superficie lateral más el área de la superficie de la base, en el caso de pirámides; o, es la suma del área de la superficie lateral más el duplo del área de la superficie de la base, en el caso de prismas.

a) Área de poliedros regulares

Para calcular el área de la superficie total A_T de un poliedro regular, basta con multiplicar el área de la superficie de una de sus caras por el número de caras del poliedro. Por ejemplo, en el cubo de arista a, $A_T = 6a^2$.

b) Áreas de las superficies de un prisma recto

(Per: perímetro de la base; y, h: altura o longitud de la arista lateral)

$A_L = (Per).(h)$

$A_T = A_L + 2A_B$

$A_T = (Per).(h) + 2A_B$

El área de la superficie de la base no se especifica, pues puede ser la de cualquier polígono.

c) Áreas de las superficies de una pirámide regular

Para el área de la superficie lateral, se calcula el área de la superficie de uno de los triángulos isósceles que son las caras laterales, y se multiplica por el número de caras laterales n.

$$A_L = n\left(\frac{a\,.\,\rho}{2}\right)$$

Donde n: Número de caras laterales de la pirámide.

a: Longitud de la arista de la base.

ρ: Longitud de la apotema de la pirámide.

$$A_T = A_L + A_B$$

El área de la superficie de la base no se especifica, pues puede ser la de cualquier polígono.

d) Áreas de las superficies de una pirámide truncada regular

El área de la superficie lateral de una pirámide truncada regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros basales por la longitud de la apotema lateral.

$$A_L = \left(\frac{Per + Per'}{2}\right) . \rho$$

Donde Per y Per': Perímetros de las bases.

ρ: Longitud de la apotema lateral de la pirámide truncada.

$$A_T = A_L + A_{B\ superior} + A_{B\ inferior}$$

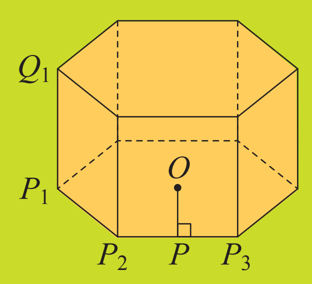
El área de las superficies de las bases no se especifica, pues pueden ser la de cualquier polígono.

Ejemplo 8.5 Área de la superficie total de un prisma.

Calcule el área de la superficie total de un prisma recto hexagonal regular, si su arista lateral mide $4\sqrt{3}m$ y su arista de la base mide $2m$.

Solución:

En esta figura, el segmento $\overline{OP}$ es la apotema del hexágono regular.



$\overline{P_1Q_1} = 4\sqrt{3}m$, $\overline{P_1P_2} = 2m$

$A_T = A_L + 2A_B$

$A_B = \dfrac{Per(base)\ \overline{OP}}{2}$

$\overline{OP} = \dfrac{(\sqrt{3})\ \overline{P_1P_2}}{2} = \sqrt{3}m$

$Per(base) = 6(2) = 12m$

$A_B = \dfrac{12\sqrt{3}}{2}\ m^2 = 6\sqrt{3}m^2$

$A_L = 6\ Área(cara\ lateral)$

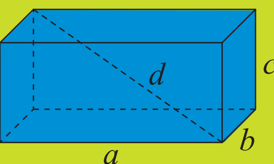
$A_L = [6(2)(4\sqrt{3})] = 48\sqrt{3}m^2$

$A_T = 48\sqrt{3}m^2 + 12\sqrt{3}m^2$

$A_T = 60\sqrt{3}m^2$

Ejemplo 8.6 Diagonal de un paralelepípedo.

La suma de las tres dimensiones de un ortoedro es $15m$ y el área de su superficie total es $200\ m^2$. Calcule la longitud de la diagonal del paralelepípedo.



Solución:

$$a + b + c = 15m$$
$$A_T = 200m^2$$
$$d = ?$$

Por cuanto:

$$A_T = 200 = 2ab + 2ac + 2bc$$
$$a + b + c = 15 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 15^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 225 \qquad \text{(I)}$$

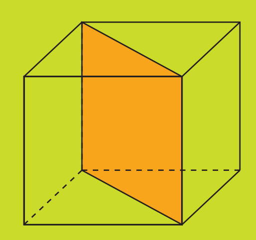
Teniendo en cuenta que: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Reemplazando en (I)

$$d^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 225$$
$$d^2 + 200 = 225 \Rightarrow d^2 = 25$$
$$d = 5m$$

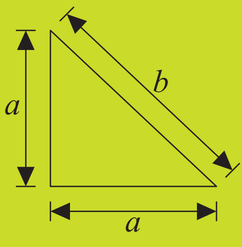
Ejemplo 8.7 Área de superficies en el espacio.

La figura adjunta es un cubo cuya arista mide $a\ cm$. Calcule el valor del área de la superficie sombreada.



Solución:

El área de la superficie que debemos calcular corresponde a la de un rectángulo cuya base (b) debemos determinar y en el cual la altura (h) es congruente con la arista del cubo.



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

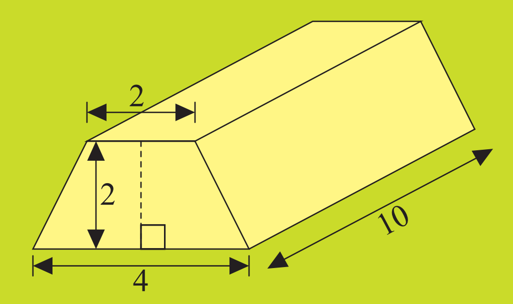
$$A = b \cdot h$$

$$A = (\sqrt{2}a)(a)$$

$$A = \sqrt{2}\ a^2 cm^2$$

Ejemplo 8.8 Área de superficies de prismas.

Los lingotes de oro son barras moldeadas como la de la figura, cuyas dimensiones se miden en cm. Los extremos son trapecios isósceles paralelos. ¿Cuál es su volumen?



Solución:

$$V = A_B\, h_P$$

$$= \frac{(B_T + b_T)h_T}{2}\, h_P$$

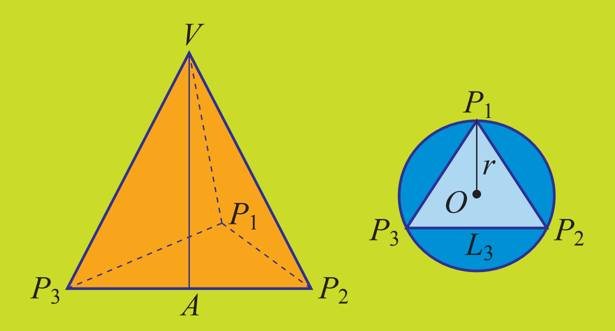
$$= \frac{(4+2)(2)}{2}(10)$$

$$V = 60\ cm^3$$

Ejemplo 8.9 Área de la superficie lateral de una pirámide.

Encuentre el área de la superficie lateral de un tetraedro, cuyas caras laterales son congruentes, cuya apotema mide el triplo de la arista de la base y la circunferencia circunscrita a la base mide $24\pi m$.

Solución:



$\overline{VA} = 3(\overline{P_1P_2})$

$L(Longitud\ de\ la\ circunferencia) = 2\pi(\overline{OP_1}) = 24\pi m \Rightarrow \overline{OP_1} = r = 12m.$

En la circunferencia circunscrita al triángulo, se cumple que: $L_3 = \sqrt{3}r$ y en este caso, $L_3 = \overline{P_2P_3}$.

$\overline{P_2P_3} = \sqrt{3}\ (\overline{OP_1})$

$\overline{P_2P_3} = 12\sqrt{3}$

$\overline{VA} = 3(12\sqrt{3})m = 36\sqrt{3}m$

$$A_L = 3\left(\frac{base \times altura}{2}\right) m^2$$

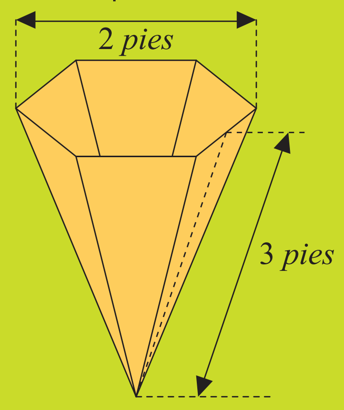
$$A_L = 3\left(\frac{\overline{P_2P_3} \times \overline{VA}}{2}\right) m^2$$

$$A_L = (3)\ \frac{(12\sqrt{3})(36\sqrt{3})}{2}\ m^2$$

$A_L = 1944m^2$

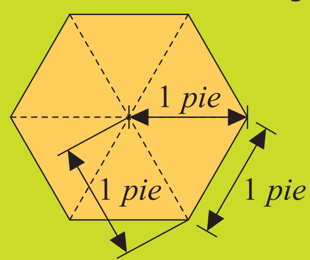
Ejemplo 8.10 Área de superficies de pirámides.

Un recipiente con forma de pirámide regular tiene la parte superior abierta. Esta parte es un hexágono regular con las dimensiones que muestra la figura. Si se van a pintar 100 de estos recipientes, por dentro y por fuera, con una pintura que cubre 450 *pies* cuadrados por galón, ¿cuántos galones se requieren?

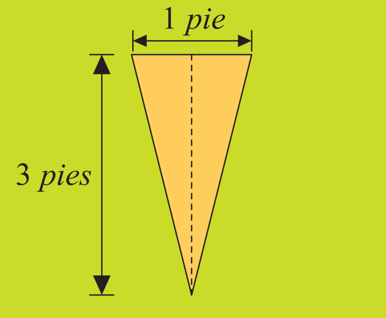


Solución:

La parte superior es un hexágono regular formado por 6 triángulos equiláteros. La longitud de cada lado del triángulo sería entonces 1 *pie*.



La superficie triangular a pintar tiene el siguiente valor de área.



$$A = \frac{(3)(1)}{2}\, pies^2$$

$$A = \frac{3}{2}\, pies^2$$

Como son 6 caras $\Rightarrow A_1 = 6A = 9 pies^2$.

Como es por dentro y por fuera $\Rightarrow A_2 = 2A_1 = 18 pies^2$.

Como son 100 recipientes $\Rightarrow A_3 = 100A_2 = 1800 pies^2$.

Como son 450 $pies^2$ por galón $\Rightarrow$ 4 galones.

Luego, se requerirán 4 galones para pintar los 100 recipientes.

A continuación estudiaremos el cálculo de volúmenes para poliedros, una magnitud muy importante para algunas aplicaciones de la realidad. Por ejemplo, los ingenieros estiman costos de construcción de una carretera determinando la cantidad de material que se debe utilizar, calculando previamente el volumen de los sólidos involucrados.

8.7 Volumen de poliedros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un prisma, calcular su volumen.
* Dada una pirámide, calcular su volumen.
* Dada una pirámide truncada, calcular su volumen.

En esta sección se calculará el volumen de un cuerpo poliédrico con las características estudiadas en las secciones anteriores.

Se denomina volumen V de un cuerpo geométrico a la medida del espacio que ocupa. A partir del cálculo del volumen del **paralelepípedo recto rectangular** se pueden derivar las reglas que permiten calcular el volumen de los demás poliedros.

$$V = A_B \cdot altura$$

$$V = (largo \cdot ancho) \cdot altura$$



$$V = a \cdot b \cdot h$$

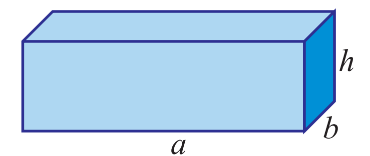


Figura 8.13: Ortoedro.

El **cubo** es un ortoedro con todas sus aristas de igual longitud, entonces su volumen es:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$V = a^3$$

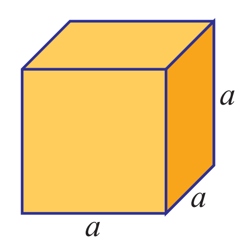


Figura 8.14: Cubo.

Un **paralelepípedo** siempre se puede transformar en un ortoedro de base equivalente y de igual altura, por lo que su volumen es también igual al área de la superficie de la base por la altura.

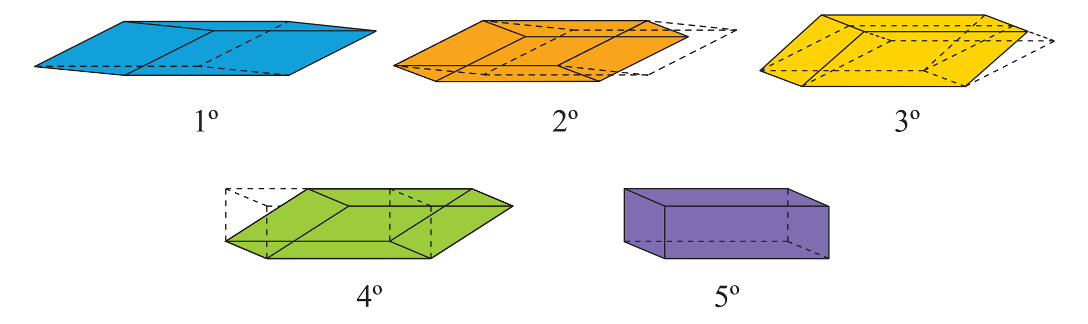


Figura 8.15: Transformación de un paralelepípedo.

Un paralelepípedo siempre se puede descomponer en dos **prismas triangulares equivalentes**, trazando, por ejemplo, un plano que contenga a dos diagonales paralelas, situadas respectivamente en dos caras también paralelas del cuerpo.

Figura 8.16: Prismas equivalentes.

El volumen de cada prisma triangular de la figura es igual a la mitad del volumen del paralelepípedo.

Por el postulado de Cavalieri (véase apéndice B) se establece que todo prisma triangular se puede descomponer en tres pirámides o tetraedros de igual volumen. De aquí se obtiene que el **volumen de un tetraedro** es igual a la tercera parte del volumen del prisma de igual base triangular; entonces, el volumen de una pirámide triangular es:

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$$

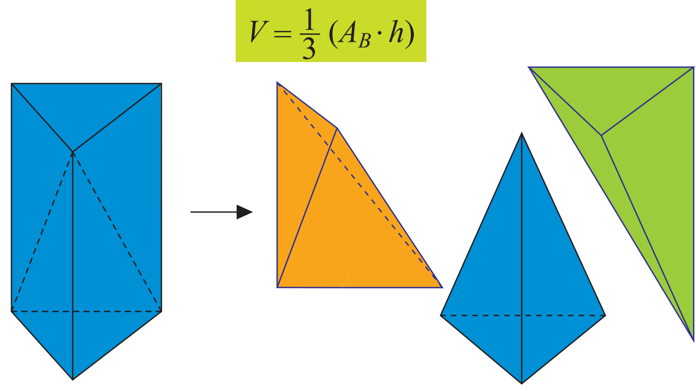


Figura 8.17: Volumen de un tetraedro.

El resultado anterior es válido para cualquier pirámide: "El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la longitud de la altura".

Veamos cómo se obtiene el **volumen** en el caso de una **pirámide pentagonal**:

Si unimos A con D y B con D, la base queda descompuesta en tres triángulos. Los planos que contienen dichas diagonales y el vértice, descomponen la pirámide en tres tetraedros de igual volumen.

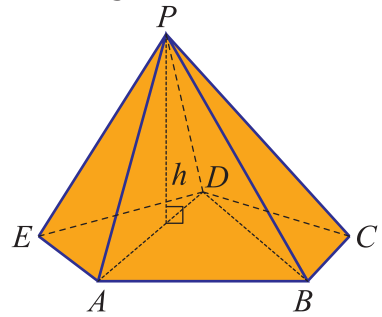


Figura 8.18: Pirámide pentagonal.

$$V(pirámide\ PABCDE) = V(tetraedro\ PEAD) + V(tetraedro\ PABD) + V(tetraedro\ PBCD)$$

$$= \frac{1}{3} A_{EAD} \cdot altura + \frac{1}{3} A_{ABD} \cdot altura + \frac{1}{3} A_{BCD} \cdot altura$$

$$= \frac{1}{3} (A_{EAD} + A_{ABD} + A_{BCD}) \cdot altura$$

$$V(\ pirámide\ PABCDE) = \frac{1}{3} (A_{ABCDE}) \cdot altura$$

El **volumen de una pirámide truncada** de bases paralelas es igual a un tercio del producto de la longitud de su altura por la suma del área de las superficies de las dos bases con la media geométrica entre ellas.

En una pirámide truncada de altura h y bases paralelas de áreas B y B':

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (B + B' + \sqrt{B \cdot B'})$$

$\sqrt{B \cdot B'}$ = media geométrica entre B y B'

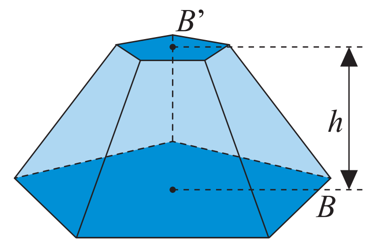
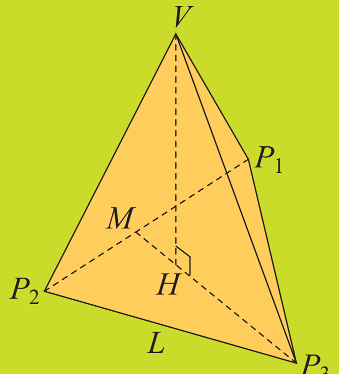


Figura 8.19: Pirámide truncada.

Ejemplo 8.11 Volumen de un poliedro regular.

Encuentre el volumen de un tetraedro regular, siendo su base el $\Delta P_1P_2P_3$ cuyo lado tiene longitud L.



Solución:

$$A_B = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) L^2$$

Además en el ΔVP_3H:

$$\overline{P_3H} = \frac{2}{3}\,\overline{P_3M}$$ H es el ortocentro de $\Delta P_1P_2P_3$.

Como:

$$\overline{P_3M} = \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)$$ Altura del triángulo equilátero.

$$\overline{P_3H} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)$$

En el ΔVP_3H:

$$(\overline{VH})^2 = (\overline{VP_3})^2 - (\overline{P_3H})^2$$ Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{L^2}{3}\right) = \left(\frac{2L^2}{3}\right)$$

$$h = \left(\frac{L\sqrt{6}}{3}\right)$$

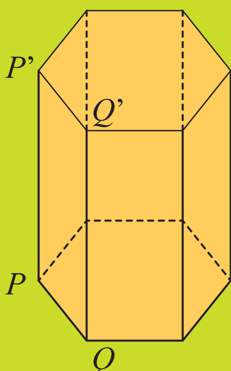
En conclusión:

$$V(Tetraedro\ regular) = \frac{1}{3}A_B h$$

$V(Tetraedro\ regular) = \left(\frac{L^3\sqrt{2}}{12}\right)$, el cual se mide en unidades cúbicas.

Ejemplo 8.12 Volumen de un poliedro regular.

Calcular el volumen de un prisma hexagonal recto cuya altura mide $10\ cm$, y cuya área de la superficie lateral es el cuádruplo del área de la superficie de una de sus bases.



Solución:

$$\overline{PP'} = 10cm$$
$$A_L = 4A_B \qquad (a)$$
$$A_B = \frac{Per(base)\,.\,apotema}{2} = \frac{6(\overline{PQ})\left(\overline{PQ}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$
$$A_L = 6\acute{A}rea\ (cara\ lateral)$$
$$A_L = 6[(\overline{PQ})(\overline{PP'}\,)]$$
$$A_L = 60(\overline{PQ}) \qquad (b)$$

Utilizando (a) y (b):

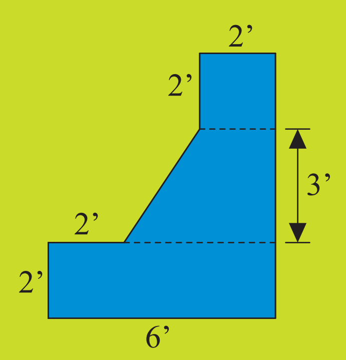
$$60(\overline{PQ}) = 4\left(3\overline{PQ}^{\,2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \overline{PQ}\sqrt{3} = 10$$
$$\overline{PQ} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$$

El volumen del prisma se calcula con:

$$V(Prisma) = A_B\,.\,altura$$
$$= \left(3\overline{PQ}^{\,2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\overline{PP'}\,)$$
$$= 3\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(10)$$
$$V(Prisma) = 500\sqrt{3}\ \ cm^3$$

Ejemplo 8.13 Volumen de prismas.

Un muro de contención de hormigón mide 80 *pies* de longitud, con extremos como los de la figura. ¿Cuántos pies cúbicos de hormigón se emplearon para construir este muro?



Solución:

El volumen que ocupa este muro de hormigón se lo puede obtener dividiéndolo en 3 partes.

Sean: V_1, el volumen del prisma rectangular cuyo largo y ancho miden 6’ y 2’.

V_2, el volumen del prisma trapezoidal cuyas bases miden 2’ y 4’ y la longitud de su altura 3’.

V_3, el volumen del prisma rectangular cuyo largo y ancho miden 2’.

En los 3 casos, la longitud de la profundidad es 80’.

$$
\begin{aligned}
V_T &= V_1 + V_2 + V_3\\
&= A_{B_1} \cdot h + A_{B_2} \cdot h + A_{B_3} \cdot h\\
&= h\left[(a_1)(b_1) + \frac{(b_T + B_T)h_T}{2} + (a_2)(b_2)\right]\\
&= 80\left[(2)(6) + \frac{(2+4)(3)}{2} + (2)(2)\right]\\
&= 80\ (12 + 9 + 4)\\
&= 80\ (25)\\
V_T &= 2000\ \textit{pies cúbicos}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se emplearon 2000 *pies cúbicos* de hormigón para construir este muro.

8.8 Cuerpos de revolución

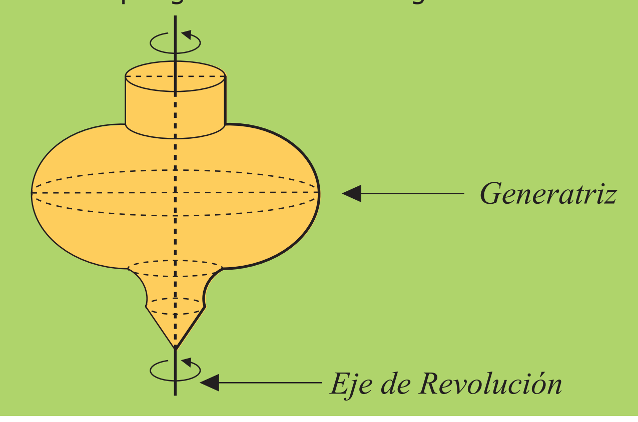
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar las características de los cuerpos de revolución.
* Dado un cilindro de revolución, calcular el área de su superficie lateral, el área de su superficie total y su volumen.
* Dado un cono de revolución, calcular el área de su superficie lateral, el área de su superficie total y su volumen.
* Dada una esfera, calcular el área de la superficie esférica y el volumen de la esfera.
* Dado un rectángulo, triángulo rectángulo, trapecio o semicírculo, calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la figura en torno a un eje.
* Dada una región en el plano cartesiano y un eje de revolución, calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región en torno al eje.

Definición 8.11 (Superficie de revolución)

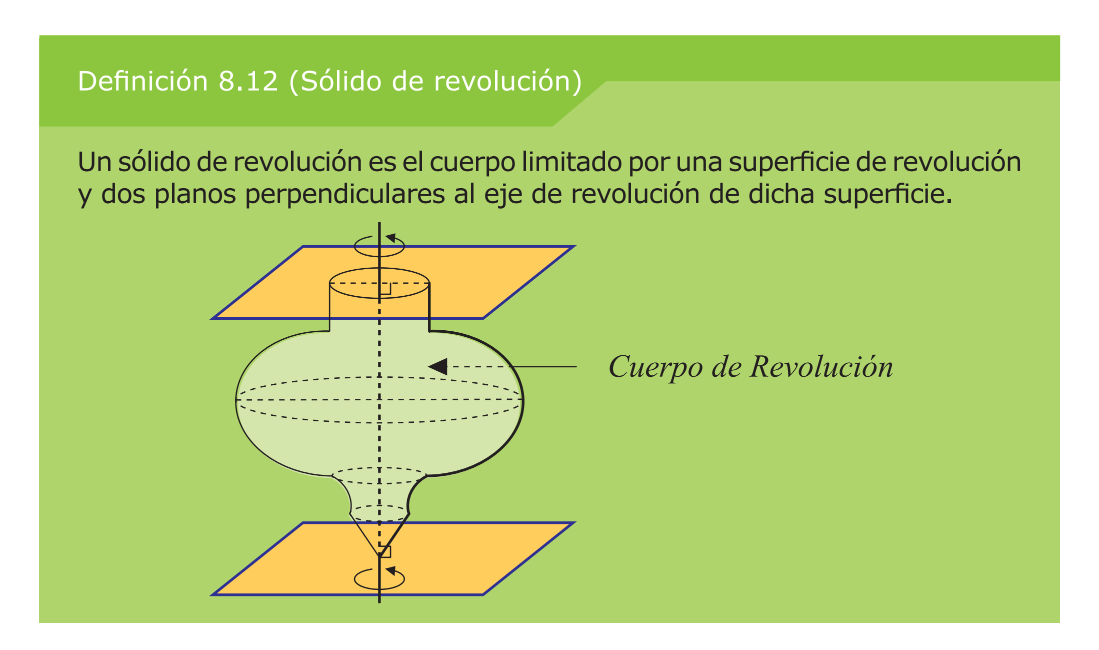
Una superficie de revolución es una superficie generada por una línea o una curva plana continua, sin autointersecciones (los puntos de la línea son coplanares), que gira alrededor de una recta denominada eje de revolución. La línea que gira se denomina generatriz.



En general, las superficies de revolución junto con superficies planas perpendiculares al eje de revolución que contienen a los extremos de la curva de revolución, delimitan cuerpos sólidos.

Definición 8.12 (Sólido de revolución)

Un sólido de revolución es el cuerpo limitado por una superficie de revolución y dos planos perpendiculares al eje de revolución de dicha superficie.



Los cuerpos de revolución (cuerpos redondos) que estudiaremos en esta sección son el cilindro recto, el cono recto y la esfera.

Si consideramos un prisma recto regular con n lados en la base, donde n tiende a infinito, se obtendrá un sólido, denominado **cilindro recto**, cuya base será un círculo. De igual manera, si consideramos una pirámide recta regular con n lados en la base, donde n tiende a infinito, se obtendrá un sólido, denominado **cono recto**, cuya base será un círculo. Nos preocuparemos por ahora de estos dos sólidos.

Una comparación entre el prisma y el cilindro, la pirámide y el cono, se muestra a continuación.

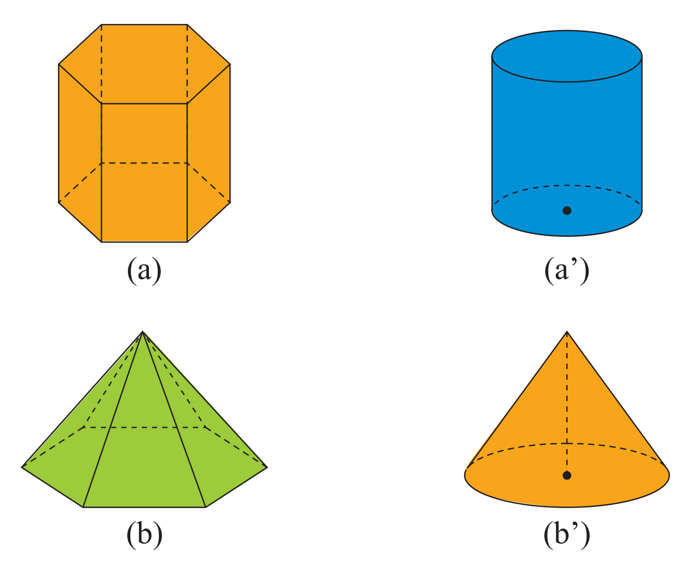


Figura 8.20: Prisma y cilindro, pirámide y cono.

Se puede considerar que el cilindro en este caso es un sólido generado por la rotación completa de un rectángulo en torno a uno de sus lados; a este sólido se le denomina **cilindro de revolución**.

Se puede considerar que el cono en este caso es un sólido generado por la rotación completa de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos; a este sólido se le denomina **cono de revolución**.

En un cono y en un cilindro las bases son círculos, y sus aristas laterales son las **generatrices.** La **altura** es el segmento perpendicular a la base que contiene al vértice como extremo, en el caso del cono, y que contiene a un punto del plano de la otra base, en el caso del cilindro.

El área de la superficie lateral de un cilindro recto será el área de la superficie de un rectángulo cuya base tiene por longitud el perímetro de la circunferencia de radio r de la base, es decir $2\pi r$, y cuya altura tiene por longitud la de la generatriz g, luego:

$$A_L = 2\pi rg$$

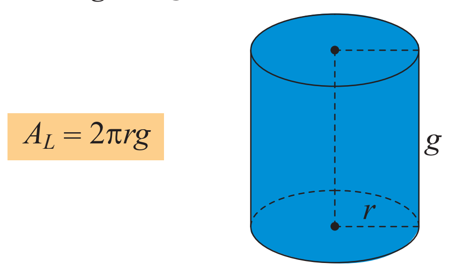


Figura 8.21: Cilindro recto.

El área de la superficie total de un cilindro recto es $A_T = A_L + 2\pi r^2$, esto es:

$$A_T = 2\pi r(g + r)$$

El área de la superficie lateral de un cono recto será el área de la superficie del triángulo, cuya base tiene por longitud el perímetro de la circunferencia de radio r de la base, es decir $2\pi r$, y cuya altura tiene por longitud la de la generatriz g, luego:

$$A_L = \pi rg$$

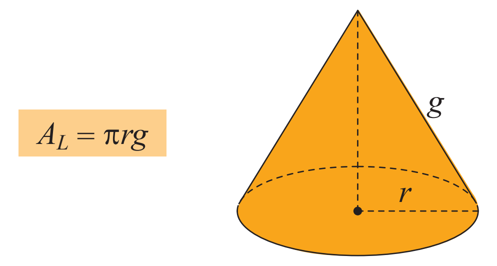
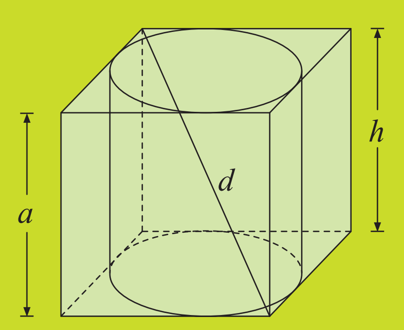


Figura 8.22: Cono recto.

Mientras que el área de la superficie total de un cono recto es: $A_T = \pi r(g + r)$.

Ejemplo 8.14 Área de la superficie lateral de un cilindro.

Un cilindro está inscrito en un cubo cuya diagonal d mide $20cm$. Calcule el área de la superficie lateral del cilindro.



Solución:

$$d = 20cm$$

La altura h del cubo coincide con la generatriz a del cilindro, $h = a$.

Además:

$$d = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{3} = 20 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

Longitud del radio de la base del cilindro:

$$r = \frac{a}{2}$$

Luego:

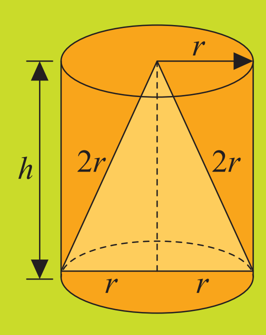
$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi rh \\ &= 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)a \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

$$A_L = \left(\frac{400\pi}{3}\right) cm^2$$

Ejemplo 8.15 Área de la superficie total de un cilindro.

Determine el área de la superficie total de un cilindro cuya generatriz h es perpendicular al diámetro de su base de radio r, que a su vez es congruente con la generatriz del cono inscrito en él.

Solución:



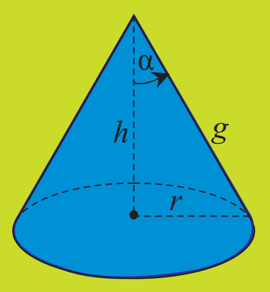
$A_L = 2\pi rh$

La longitud de la generatriz se puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}\, r$$
$$A_L = 2\sqrt{3}\pi r^2$$
$$A_B = \pi r^2$$
$$A_T = A_L + 2A_B$$
$$A_T = 2\sqrt{3}\pi r^2 + 2\pi r^2$$
$$A_T = 2\pi(\sqrt{3} + 1) r^2 u^2$$

Ejemplo 8.16 Área de la superficie lateral de un cono.

Un cono recto de altura $h = 3m$, tiene un área de la superficie lateral de $6\pi m^2$. Determine la medida del ángulo α que la generatriz g forma con la altura h.



Solución:

$$h = 3m$$
$$A_L = 6\pi m^2$$
$$A_L = \pi rg \Rightarrow rg = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{g}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = h^2 \Rightarrow g^2 - \frac{36}{g^2} = 9$$

Por tanto:

$$g^4 - 9g^2 - 36 = 0$$
$$(g^2 - 12)(g^2 + 3) = 0$$
$$(g^2 = 12) \vee (g^2 = -3)$$

De donde:

$$g = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Además:

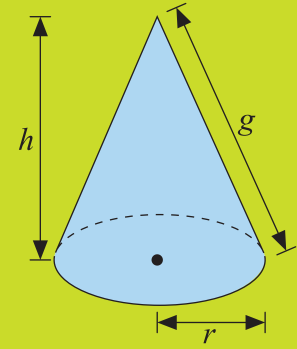
$$cos(\alpha) = \frac{h}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 8.17 Área de la superficie de cuerpos redondos.

Calcule el área de la superficie lateral de un cono cuyo radio tiene longitud $3cm$ y su altura tiene longitud $4cm$.

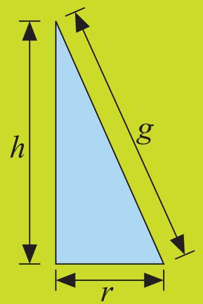
Solución:

La situación descrita puede ser representada en la figura.



$$r = 3cm$$
$$h = 4cm$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$g = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$g = 5cm$$

El área de la superficie lateral del cono viene dada por:

$$A_L = \pi rg$$
$$= \pi(3)(5)$$
$$A_L = 15\pi cm^2$$

Si un cono se interseca con un semiespacio generado por un plano paralelo a la base del cono resultan dos cuerpos: un cono y otro que se denomina **cono truncado**. Un cono truncado tiene dos bases circulares paralelas semejantes, de áreas A y A' , y la altura h es la distancia mínima entre ellas.

Las secciones transversales de un cono dividen a la altura, a las generatrices y a las bases en partes proporcionales, además:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$

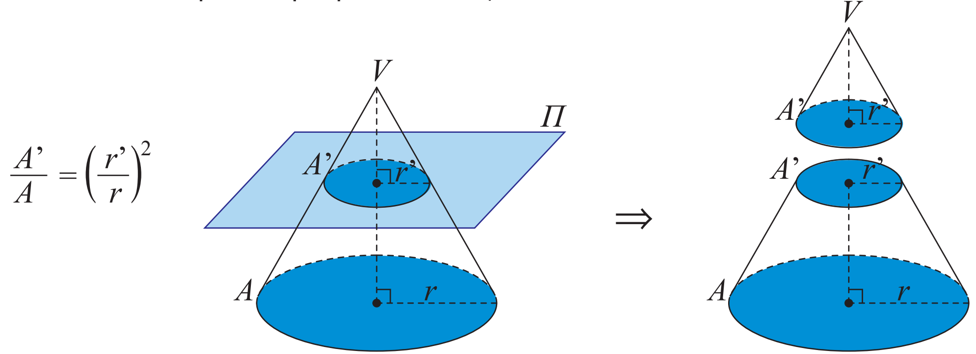
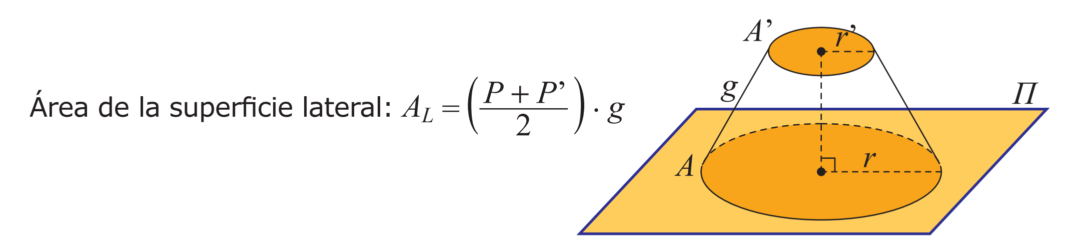


Figura 8.23: Cono truncado recto.

Se puede considerar que el **cono truncado de revolución** de bases paralelas, es un sólido de revolución generado por la rotación de un trapecio rectángulo en torno de un eje que contiene el lado perpendicular a sus bases.

Área de la superficie lateral: $A_L = \left(\frac{P + P'}{2}\right) \cdot g$



Donde: g es la generatriz.

P es el perímetro de la base mayor $= 2\pi r$

P' es el perímetro de la base menor $= 2\pi r'$

Entonces: $$A_L = \frac{(2\pi r + 2\pi r')}{2} \cdot g = \pi(r + r') \cdot g$$

Área de la superficie total: $A_T = A_L + A_B + A_{B'}$

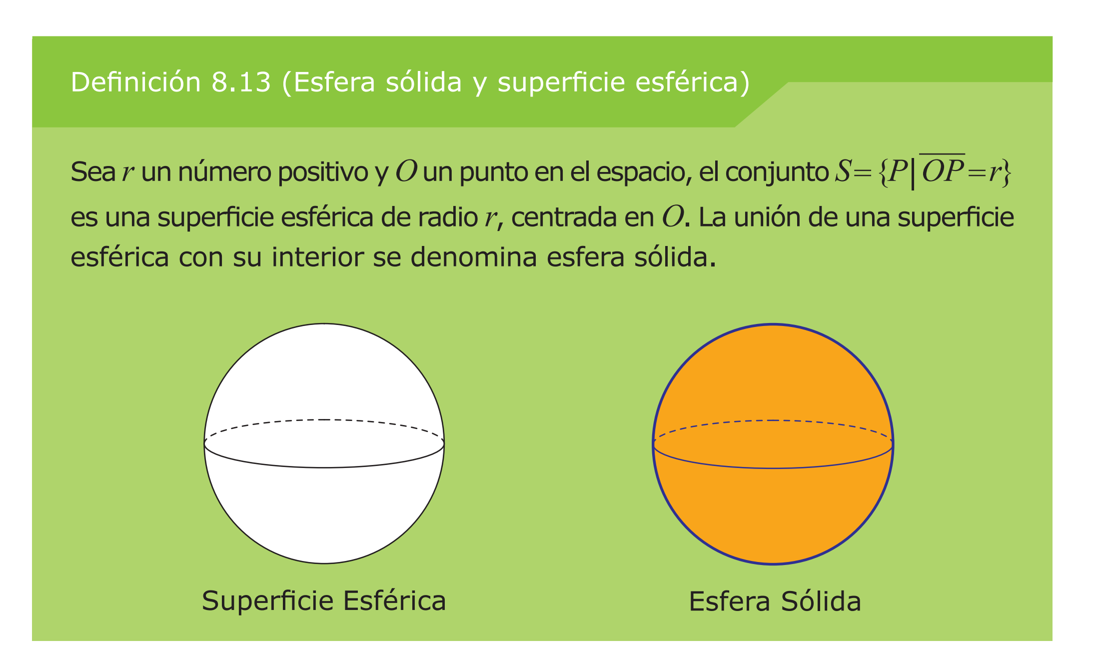
Donde A_B y $A_{B'}$ son las áreas de las superficies de las bases:

Luego: $A_T = \pi(r + r') \cdot g + \pi r^2 + \pi r'^2$

$$A_T = \pi[(r + r') \cdot g + r^2 + r'^2]$$

Definición 8.13 (Esfera sólida y superficie esférica)

Sea r un número positivo y O un punto en el espacio, el conjunto $S = \{P \mid \overline{OP} = r\}$ es una superficie esférica de radio r, centrada en O. La unión de una superficie esférica con su interior se denomina esfera sólida.



Se puede considerar que la esfera sólida es un sólido generado por la rotación completa de un semicírculo en torno al diámetro; a este sólido se le denomina **esfera sólida de revolución**.

Elementos de la esfera sólida y la superficie esférica.

Respecto a la siguiente figura, se pueden observar los siguientes elementos de una esfera sólida y una superficie esférica de centro O y radio r.

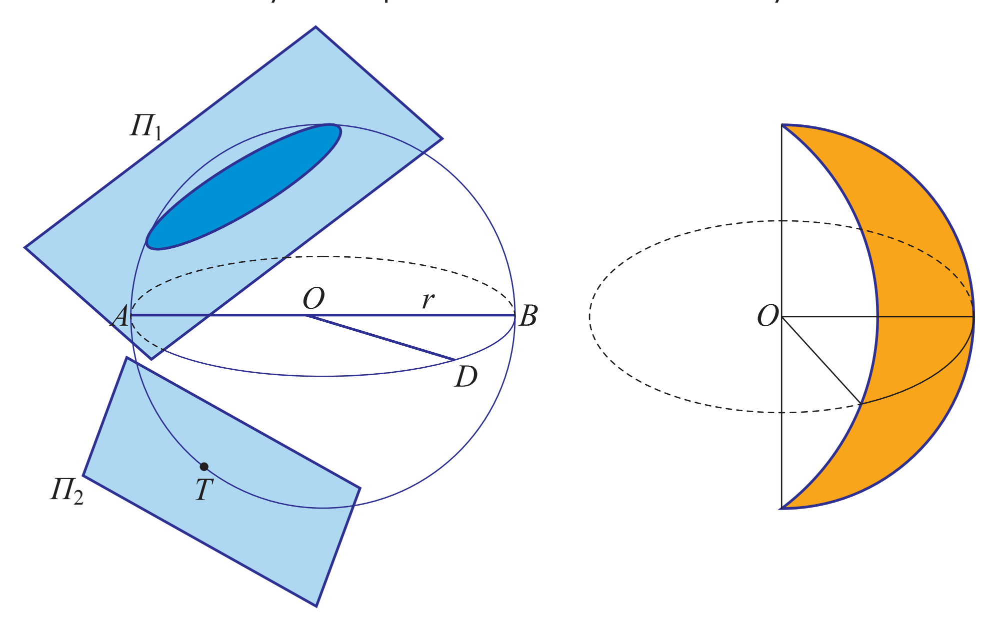


Figura 8.24: Elementos de la esfera sólida y la superficie esférica.

a) **Radio (r):** Es un segmento que une el centro de la superficie esférica con un punto cualquiera de ella. Por ejemplo: $\overline{OD}$, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios. $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$.

b) **Diámetro (d):** Es un segmento de recta que contiene al centro de la superficie esférica y tiene por extremos puntos de la superficie esférica. La longitud del diámetro d es el doble de la longitud del radio r, es decir $d = 2r$. Por ejemplo: $\overline{AB}$.

c) **Casquete esférico:** es la parte de la superficie esférica limitada por un plano secante a la esfera. Si el plano contiene el centro de la esfera, la sección plana que determina es un **círculo máximo**, es decir, es un círculo que tiene igual radio que el de la esfera. Un círculo máximo divide a la esfera en dos **hemisferios**.

d) **Huso esférico:** Un huso esférico o cuña esférica es la intersección de una superficie esférica con un ángulo diedro, cuya arista contiene al centro de la esfera.

e) **Plano secante:** Es un plano que interseca a la superficie esférica en más de un punto. Por ejemplo: Π_1.

f) **Plano tangente:** Es un plano que interseca a la superficie esférica en un solo punto. Por ejemplo: Π_2. El punto de intersección se denomina punto de tangencia o de contacto. En la figura, T es el punto de tangencia. En toda esfera, el plano tangente es perpendicular al radio correspondiente en el punto de tangencia.

Se puede demostrar que el área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo.

$$A(superficie\ esférica) = 4\pi r^2$$

El **volumen de los cuerpos de revolución**, previamente estudiados, puede ser calculado de la siguiente manera:

Cilindro

El volumen de un cilindro es igual al producto del área de la superficie de la base por la longitud de la altura.

$V = A_B \cdot altura$ — r: Longitud del radio de la base.
$V = \pi r^2 \cdot h$ — h: Longitud de la altura.

Cono

El volumen de un cono es un tercio del producto del área de la superficie de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot altura$$

r: Longitud del radio de la base.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

h: Longitud de la altura.

Cono truncado

$$V = \frac{1}{3} \pi h \cdot (r^2 + r'^2 + rr')$$

r y r': Longitudes de los radios de las bases.
h: Longitud de la altura.

Esfera (Sólida)

El volumen de una esfera sólida es igual a un tercio del producto de la longitud del radio por el área de la superficie esférica.

$$V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot 4\pi r^2$$

r: Longitud del radio de la base.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ejemplo 8.18 Área de una superficie esférica.

Cerca de tres cuartas partes de la superficie de la Tierra está cubierta de agua. ¿Cuántos kilómetros cuadrados de la superficie de la Tierra constituyen terreno seco? (Considere $6400km$ como longitud del radio de la Tierra).

Solución:

El área A del terreno seco lo constituirá la cuarta parte de la superficie esférica con $r = 6400km$.

$$A = \frac{1}{4}(4\pi r^2)$$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi(6400)^2$$

$$A = 40'960.000\pi$$

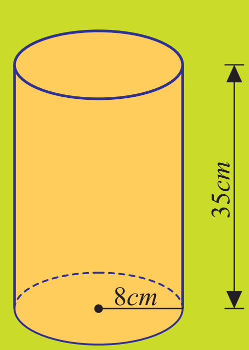
La superficie de la Tierra que constituye terreno seco es $40'960.000\pi\ km^2$.

Ejemplo 8.19 Área y volumen de un cilindro recto.

Un recipiente en forma de cilindro circular recto mide $35cm$ de altura y tiene una base de $16cm$ de diámetro. Encuentre el área de su superficie total y su volumen.

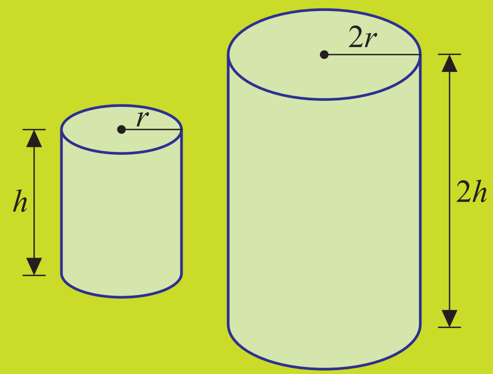
$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2A_B \\ &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi(8)(35) + 2\pi(8)^2 \\ &= 560\pi + 128\pi \\ A_T &= 688\pi \ cm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi(8)^2(35) \\ V &= 2240\pi \ cm^3 \end{aligned}$$



Ejemplo 8.20 Variaciones del área y volumen de un cilindro.

Si las longitudes del radio y de la altura de un cilindro se duplican, ¿cómo varían el área de su superficie total y su volumen?

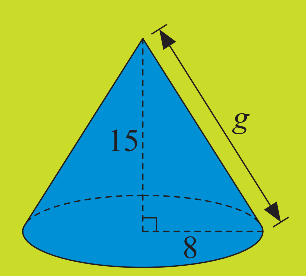


$$\begin{aligned} A_T(\textit{cilindro grande}) &= 2\pi(2r)(2h) + 2\pi(2r)^2 \\ &= 4(2\pi rh) + 4(2\pi r^2) \\ &= 4[2\pi rh + 2\pi r^2] \\ A_T(\textit{cilindro grande}) &= 4A_T(\textit{cilindro pequeño}) \\ V(\textit{cilindro grande}) &= \pi(2r)^2(2h) \\ &= 8\pi r^2 h \\ V(\textit{cilindro grande}) &= 8V(\textit{cilindro pequeño}) \end{aligned}$$

Ejemplo 8.21 Generatriz, área y volumen de un cono.

Un cono circular recto tiene altura $15cm$ y radio de la base $8cm$. Encuentre:

a) La longitud de la generatriz.
b) El área de la superficie total.
c) El volumen.



Solución:

a) Generatriz:

$$g^2 = 8^2 + 15^2$$
$$g^2 = 64 + 225 = 289$$
$$g = 17cm.$$

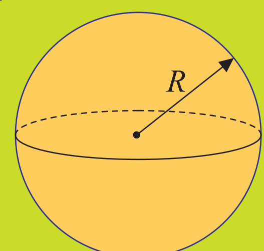
b) $A_T = \pi(8)(17) + \pi(64) = 200\pi\ cm^2$

c) $V = \frac{1}{3}\pi(8)^2(15) = 320\pi\ cm^3$

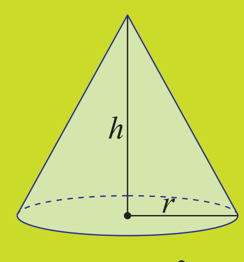
Ejemplo 8.22 Volúmenes de cuerpos redondos.

Una esfera sólida de cobre se funde y con el metal se hacen conos con longitud de radio igual al de la esfera y longitud de la altura igual al doble de la longitud de dicho radio. ¿Cuántos conos se obtienen?

Solución:



$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



$$V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Por condiciones del problema:

$$r = R$$
$$h = 2R$$

$$V_{cono} = \frac{\pi R^2(2R)}{3}$$

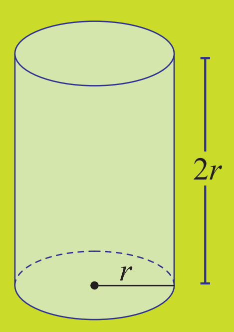
$$V_{cono} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

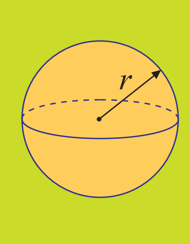
$$\text{Cantidad de conos} = \frac{V_{esfera}}{V_{cono}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2}{3}\pi R^3}$$

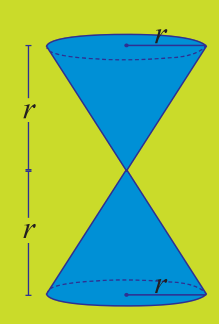
Cantidad de conos $= 2.$

Ejemplo 8.23 Relación entre esfera, cilindro y bicono.

Demuestre que el volumen de un cilindro, cuya altura es congruente con su diámetro, es igual al volumen de la esfera más el volumen del bicono inscritos en el cilindro.







$V(cilindro) = \pi r^2(2r)$
$V(cilindro) = 2\pi r^3$

$V(esfera) = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$

$V(bicono) = 2\left[\frac{1}{3}\pi r^2(r)\right]$

$V(bicono) = \frac{2}{3}\pi r^3$

Solución:

$$V(cilindro) = 2\pi r^3$$

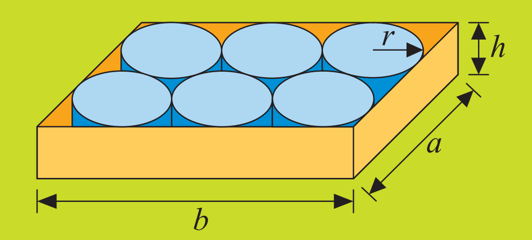
$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V(cilindro) = V(esfera) + V(bicono)$$

Ejemplo 8.24 Volúmenes de cuerpos redondos.

En una caja se embalan seis latas cilíndricas. ¿Cuál es la razón entre el volumen de las seis latas juntas y el volumen de la caja?

Solución:



Se cumple que $b = 6r$ y $a = 4r$

El volumen de cada lata cilíndrica es $V_L = \pi r^2 h$

El volumen de la caja es $V_C = abh$

La razón entre volúmenes se calcula así:

$$\frac{6V_L}{V_C} = \frac{6\pi r^2 h}{abh}$$

$$= \frac{6\pi r^2 h}{(4r)(6r)h}$$

$$\frac{6V_L}{V_C} = \frac{\pi}{4}$$

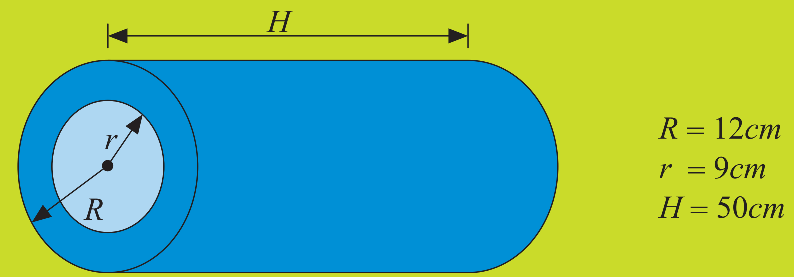
Con lo cual, la razón entre los volúmenes es $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 8.25 Volúmenes de cuerpos redondos.

Un canal de desagüe tiene forma de un tubo cilíndrico de $50cm$ de largo. Los radios interno y externo tienen longitudes de $9cm$ y $12cm$, respectivamente. Determine el volumen de cemento necesario para construir el canal.

Solución:

Se deduce que el canal tiene la siguiente forma:



$R = 12cm$
$r = 9cm$
$H = 50cm$

El volumen del tubo cilíndrico será el volumen del cilindro exterior menos el volumen del cilindro interior.

$V = V_{EXT} - V_{INT}$

$V = \pi R^2 H - \pi r^2 H$

$V = \pi H\ (R^2 - r^2)$

$V = \pi(50)[(12)^2 - (9)^2]$

$V = \pi(50)(144 - 81)$

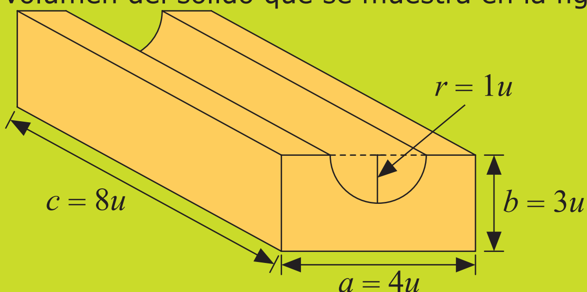
$V = \pi(50)(63)$

$V = 3150\pi$

El volumen de cemento necesario para construir el canal es $3150\pi cm^3$.

Ejemplo 8.26 Volúmenes de figuras.

Determine el volumen del sólido que se muestra en la figura adjunta.



Solución:

Sea U el volumen del paralelepípedo y W el volumen semicilíndrico.

$U = abc$

$U = (4)(3)(8)$

$U = 96$

$W = \frac{1}{2}\, Vcilindro$

$W = \frac{1}{2}\pi r^2 c$

$W = \frac{1}{2}\pi(1)^2(8)$

$W = 4\pi$

El volumen V del sólido será:

$V = U - W$

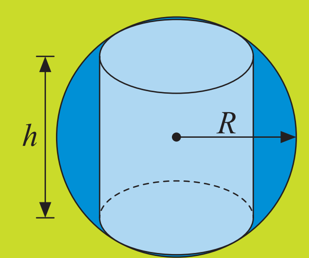
$V = 96 - 4\pi$

$V = 4\,(24 - \pi)\, u^3$

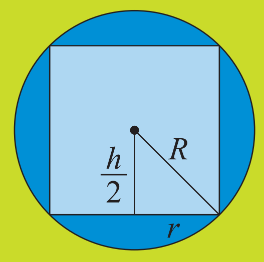
Ejemplo 8.27 Volúmenes de cuerpos redondos.

Determine el volumen de un cilindro de altura h inscrito en una esfera de radio R.

Solución:



Su proyección en un plano lateral es:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$V_{CIL} = \pi r^2 h$$

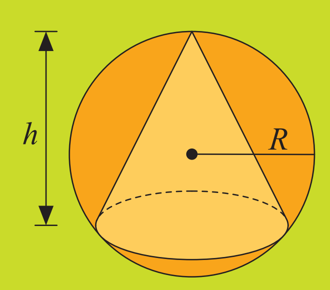
$$V_{CIL} = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

$$V_{CIL} = \frac{\pi}{4} (4R^2 - h^2)\, hu^3$$

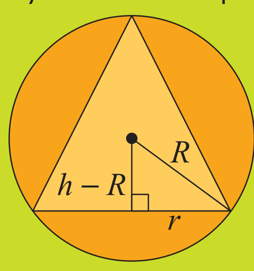
Ejemplo 8.28 Volúmenes de cuerpos redondos.

Determine el volumen de un cono de altura h inscrito en una esfera de radio R.

Solución:



Su proyección en un plano lateral es:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2$$

$$r^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2$$

$$r^2 = 2hR - h^2$$

$$r^2 = h(2R - h)$$

$$V_{CO} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_{CO} = \frac{1}{3} \pi [h(2R - h)]h$$

$$V_{CO} = \frac{\pi}{3} (2R - h)h^2 u^3$$

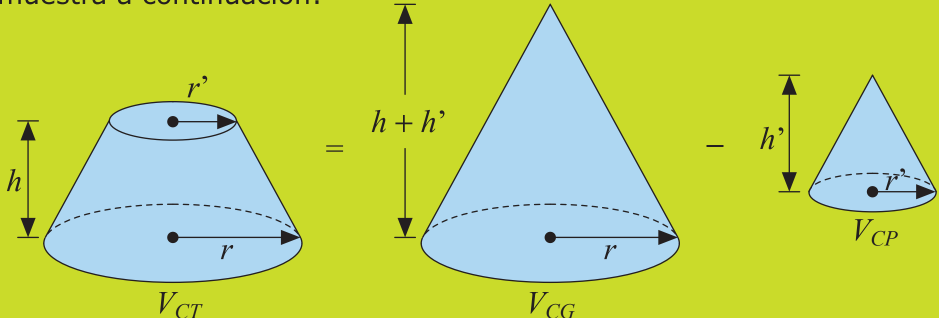
Ejemplo 8.29 Volumen de un cono truncado.

Demuestre que el volumen de un cono truncado de longitudes de radios de las bases r y r' y longitud de altura h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r'^2 + rr')$$

Solución:

El cono truncado puede ser obtenido a partir de dos conos como se muestra a continuación:



Estableciendo semejanzas entre triángulos:

$$\frac{h + h'}{r} = \frac{h'}{r'}$$
$$hr' + h'r' = h'r$$
$$h'r - h'r' = hr'$$
$$h'(r - r') = hr'$$
$$h' = \frac{hr'}{r - r'}$$

Calculando el volumen del cono truncado:

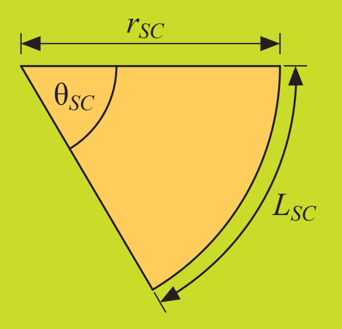
$$\begin{aligned}
V_{CT} &= V_{CG} - V_{CP}\\
&= \frac{1}{3}\pi r^2(h + h') - \frac{1}{3}\pi r'^2 h'\\
&= \frac{1}{3}\pi r^2\left(h + \frac{hr'}{r - r'}\right) - \frac{1}{3}\pi r'^2\left(\frac{hr'}{r - r'}\right)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left[r^2 + \frac{r'r^2}{r - r'} - \frac{r'^2 r'}{r - r'}\right]\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{r^3 - r'r^2 + r'r^2 - r'^3}{r - r'}\right)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{r^3 - r'^3}{r - r'}\right)
\end{aligned}$$

$$V_{CT} = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r'^2 + rr')$$

Ejemplo 8.30 Volúmenes de cuerpos redondos.

Determine el volumen de un cono construido a partir de un sector circular de longitud de radio igual a $2cm$ y ángulo central de medida igual a $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Solución:



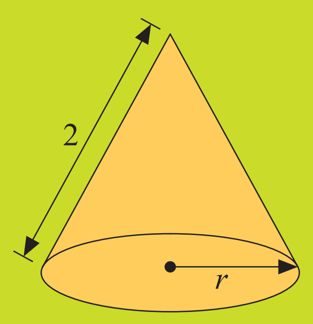
La longitud de arco L_{SC} del sector circular es:

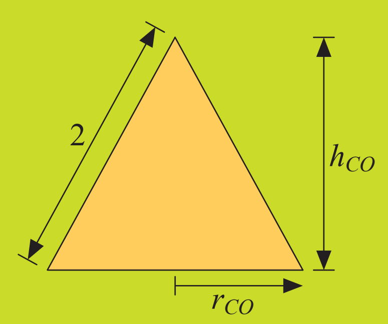
$$L_{SC} = r_{SC}\,\theta_{SC}$$

$$L_{SC} = (2)\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$L_{SC} = \frac{2\pi}{3}$$

Su proyección en un plano lateral es:





La longitud de arco del sector circular coincide con la longitud de la circunferencia de la base del cono.

$$L_{SC} = L_{CO}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 2\pi r_{CO}$$

$$r_{CO} = \frac{1}{3}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$h_{CO} = \sqrt{(2)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$h_{CO} = \sqrt{4 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

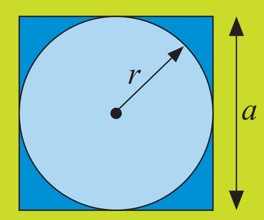
$$V = \frac{1}{3}\,\pi r_{CO}^2\, h_{CO} = \frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{35}}{3}\right) = \frac{\pi\,\sqrt{35}}{81}\,u^3$$

Ejemplo 8.31 Volúmenes de cuerpos redondos.

Calcule el volumen comprendido entre un cubo de longitud de arista a, y la esfera inscrita en él.

Solución:

Su proyección en un plano es:



La longitud del radio es $\frac{1}{2}$ a unidades y el volumen solicitado será la diferencia entre el volumen del cubo y el de la esfera:

$$V = V_C - V_E$$

$$V = a^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$V = a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)u^3$$

Ejemplo 8.32 Volúmenes de cuerpos redondos.

Un rey decide que se fundan 100 esferas de oro de radio a unidades y que, con el material que quede, se formen conos rectos cuyas alturas midan $\frac{a}{2}$ y cuyas bases tengan diámetros de a unidades de longitud. Calcule cuántos conos como esos se podrán formar para repartirlos entre sus súbditos.

Solución:

Denominaremos V_1 al volumen de las 100 esferas.

$$V_1 = 100V_{ESFERA}$$

$$= 100\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$V_1 = \left(\frac{400\pi}{3}a^3\right)$$

Denominaremos V_2 al volumen de los x conos.

$$V_2 = xV_{CONO}$$
$$= x\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$
$$= x\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$
$$V_2 = x\left(\frac{1}{24}\pi a^3\right)$$

Suponiendo que no hay pérdida de material, debe cumplirse que $V_1 = V_2$, luego:

$$\frac{400\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{24}x$$

Despejando x:

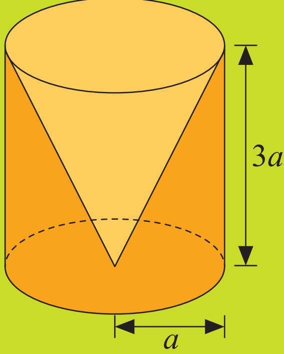
$$x = \left(\frac{24}{3}\right)(400)$$

$$x = 3200$$

El rey podrá repartir 3200 conos de las características anotadas entre sus súbditos.

Ejemplo 8.33 Volúmenes de cuerpos redondos.

En la figura adjunta, determine el volumen comprendido entre el cilindro y el cono.



Solución:

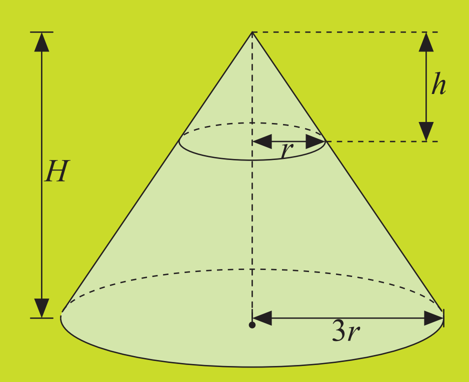
El volumen V comprendido entre el cilindro y el cono será la diferencia de ambos.

$$V = V_{CIL} - V_{CO}$$
$$= \pi r_{CIL}^2\, h_{CIL} - \frac{1}{3}\pi r_{CO}^2\, h_{CO}$$
$$= \pi(a)^2(3a) - \frac{1}{3}\pi(a)^2(3a)$$
$$= 3\pi a^3 - \pi a^3$$
$$V = 2\pi a^3$$

El volumen requerido es $2\pi a^3$ unidades cúbicas.

Ejemplo 8.34 Volúmenes de cuerpos semejantes.

Con respecto a la figura, se conoce que el volumen del cono de radio de la base $3r$ es igual a $27\pi u^3$. Determine el volumen del cono de altura h y radio de la base r.



Solución:

Aplicando el criterio de semejanza de triángulos:

$$\frac{H}{3r} = \frac{h}{r}$$

$$H = 3h$$

$$h = \frac{H}{3}$$

$$V_{CG} = 27\pi = \frac{1}{3}\pi\,(3r)^2 H \Rightarrow r^2 = \frac{9}{H}$$

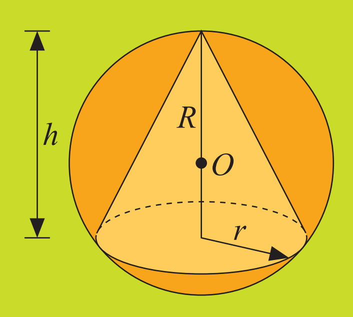
$$V_{CP} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9}{H}\right)\left(\frac{H}{3}\right)$$

$$V_{CP} = \pi u^3$$

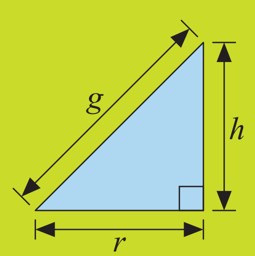
Ejemplo 8.35 Volúmenes de cuerpos redondos.

En la figura adjunta, se ha inscrito un cono recto en una esfera de radio R y centro en O. Si la longitud del radio y el volumen del cono son $3cm$ y $27\pi cm^3$, respectivamente determine el volumen de la esfera.



Solución:

El volumen del cono es $V_{CO} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{9\pi h}{3} = 27\pi$. De aquí: $h = 9cm$.

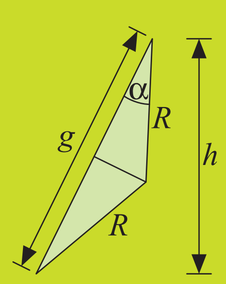


La generatriz del cono se la puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = h^2 + r^2 = 81 + 9 = 90$.

Sea α el ángulo formado por la generatriz g y la altura h del cono. Sea R la longitud del radio de la esfera.

Se tendrá entonces:

$cos\ (\alpha) = \frac{h}{g}$ (I)



También: $cos\ (\alpha) = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{R}$ (II).

Donde R es la longitud del radio de la esfera.

Igualando (I) y (II): $\frac{h}{g} = \frac{g}{2R}$.

De donde $R = \frac{g^2}{2h} = \frac{90}{18} = 5cm$. Y, por lo tanto, el volumen de la esfera será:

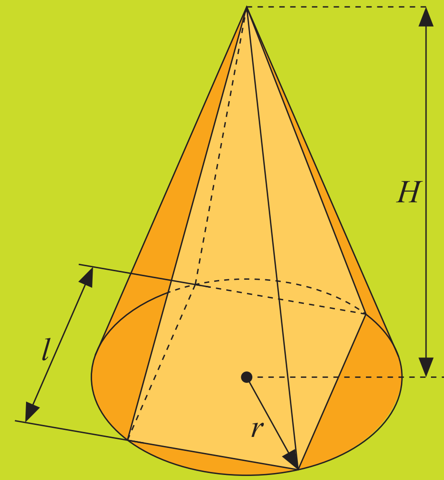
$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi(125)}{3} = \frac{500\pi}{3}\ cm^3$$

Ejemplo 8.36 Volúmenes de cuerpos en el espacio.

Una pirámide con base cuadrada se inscribe en un cono recto, de manera que tengan el mismo vértice y la base de la pirámide quede inscrita en la base del cono. La altura común mide $18cm$ y la longitud de un lado del cuadrado es $15cm$. Calcule el volumen de la pirámide y del cono.

Solución:

La situación planteada se puede representar en la figura adjunta.



$$V_{PIRAMIDE} = \frac{1}{3}V_{PRISMA}$$

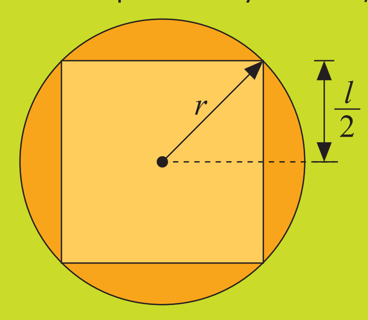
$$= \frac{1}{3}l^2H$$

$$= \frac{1}{3}(15)^2(18)$$

$$V_{PIRAMIDE} = 1350cm^3$$

∴ El volumen de la pirámide es $1350cm^3$.

Considerando las bases de la pirámide y el cono, tenemos:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{l^2}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l$$

Por lo tanto, para calcular el volumen del cono:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 H$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right) l^2 H$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)(15)^2(18)$$

$$V_{CONO} = 675\,\pi cm^3$$

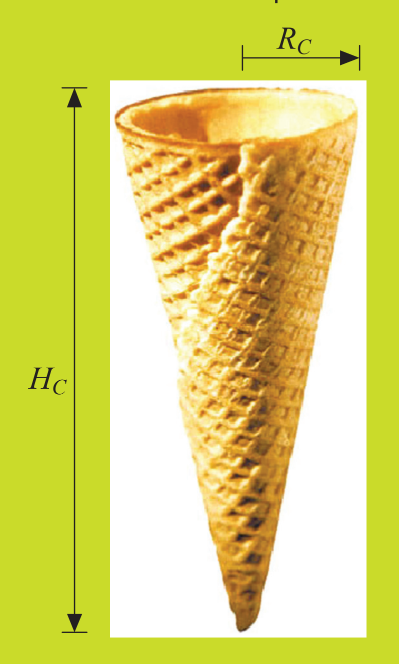
$\therefore$ El volumen del cono es $675\pi cm^3$.

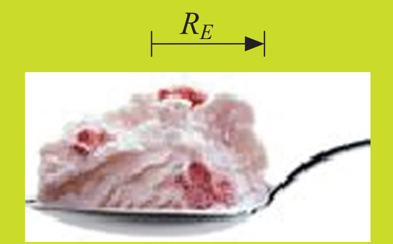
Ejemplo 8.37 Volúmenes de cuerpos redondos.

Un cono de helado tiene $12\frac{1}{2}cm$ de profundidad y $5cm$ de diámetro superior. Se colocan en él dos cucharadas semiesféricas, también de longitud de diámetro $5cm$. Si el helado se derrite dentro del cono, ¿lo rebasará?

Solución:

La situación descrita puede ser representada por:







$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi R_C^2\, H_C$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{25}{2}\right)$$

$$V_{CONO} = \frac{625\pi}{24}\ cm^3$$

$$V_{HELADO} = 2V_{SEMIESFERA} = V_{ESFERA}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\, R_E^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

$$V_{HELADO} = \frac{125\pi}{6}\ cm^3$$

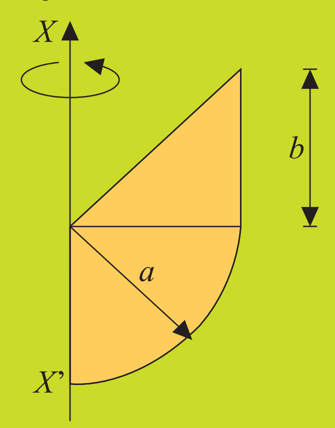
Para que el helado no rebase el cono, debe cumplirse que: $V_{HELADO} \leq V_{CONO}$

Como: $\frac{125\pi}{6} \leq \frac{625\pi}{24}$

Si el helado se derrite, no rebasará el cono.

Ejemplo 8.38 Volumen de un sólido de revolución.

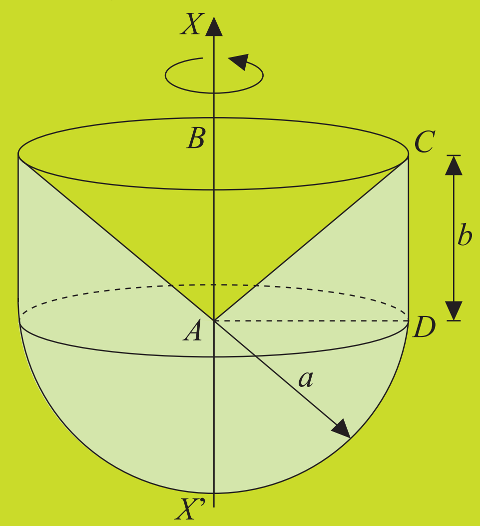
Encuentre el volumen del sólido que se genera al rotar la región sombreada alrededor del eje XX'.



Solución:

Sea U el volumen del hemisferio de radio a que se genera al rotar el cuarto de círculo de radio a alrededor del eje XX':

$$U = \frac{2}{3}\pi a^3$$



Sea V el volumen del cono recto de longitud de radio a y altura b que se genera al rotar el triángulo rectángulo ABC alrededor del eje XX':

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

Sea W el volumen del cilindro recto de longitud de radio a y altura b que se genera al rotar el rectángulo $ABCD$ alrededor del eje XX':

$$W = \pi a^2 b$$

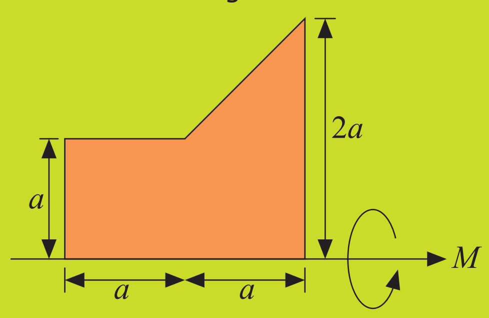
El volumen del sólido es: $U + W - V$

$$U + W - V = \frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 b - \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

$$U + W - V = \frac{2}{3}\pi a^2 (a + b) u^3$$

Ejemplo 8.39 Volumen de un sólido de revolución.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región del plano mostrada en la figura alrededor del eje M.



Solución:

$V_S = V_{CIL} + V_{CT}$

$V_S = \pi(a)^2(a) + \frac{1}{3}\pi[(a)^2 + (a)(2a) + (2a)^2]a$

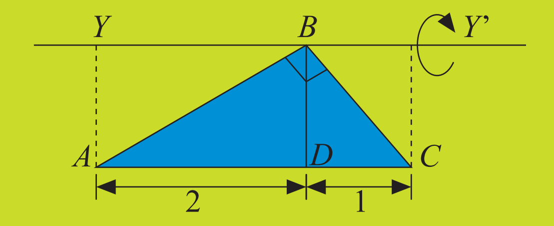
$V_S = \pi a^3 + \frac{1}{3}\pi(a^2 + 2a^2 + 4a^2)a$

$V_S = \pi a^3 + \frac{7}{3}\pi a^3$

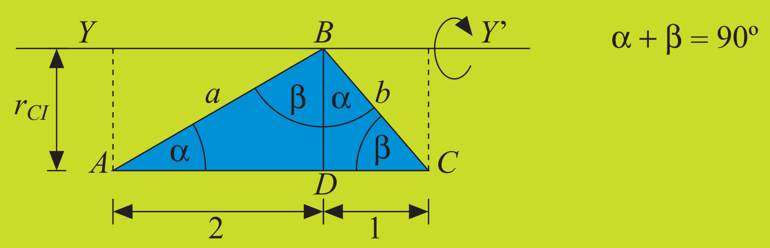
$V_S = \frac{10}{3}\pi a^3 u^3$

Ejemplo 8.40 Volumen de un sólido de revolución.

Si en la figura adjunta el triángulo rectángulo tiene su hipotenusa paralela al eje YY', determine el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región sombreada alrededor de dicho eje.



Solución:



$\alpha + \beta = 90º$

Tenemos 3 triángulos rectángulos que son semejantes, luego tomamos los triángulos ABD y ABC:

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{a}$$
$$a^2 = 6$$
$$a = \sqrt{6}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = (2 + 1)^2$

$$b = \sqrt{(3)^2 - (\sqrt{6})^2}$$
$$\therefore b = \sqrt{3}$$

También se puede utilizar semejanza de triángulos para calcular el valor de b:

$$\frac{b}{3} = \frac{1}{b}$$
$$b^2 = 3$$
$$b = \sqrt{3}$$

Aplicando nuevamente semejanza entre los triángulos DBC y ABC:

$$\frac{r_{CI}}{b} = \frac{a}{3}$$
$$r_{CI} = \frac{ab}{3} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$
$$V = Vcilindro - Vcono_1 - Vcono_2$$
$$V = \pi r_{CI}^2 h_{CI} - \frac{1}{3}\pi r_{CO_1}^2 h_{CO_1} - \frac{1}{3}\pi r_{CO_2}^2 h_{CO_2}$$

Pero $r_{CI} = r_{CO_1} = r_{CO_2} = \sqrt{2}$

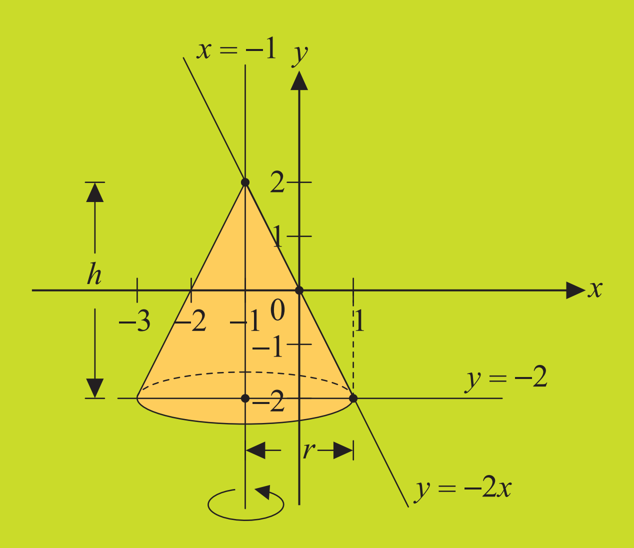
$$V = \pi r_{CI}^2 \left(h_{CI} - \frac{1}{3} h_{CO_1} - \frac{1}{3} h_{CO_2}\right)$$
$$V = \pi(\sqrt{2})^2 \left[3 - \frac{1}{3}(2) - \frac{1}{3}(1)\right]$$
$$V = 2\pi\left(3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$$
$$V = 4\pi u^3$$

Ejemplo 8.41 Volumen de un sólido de revolución.

Si se define la región del plano cartesiano limitada por: $\begin{cases} y = -2x \\ y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$,

encuentre el volumen del sólido de revolución generado al rotar dicha región, alrededor del eje $x = -1$.

Solución:



$r = |1 - (-1)| = 2$

$h = |2 - (-2)| = 4$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

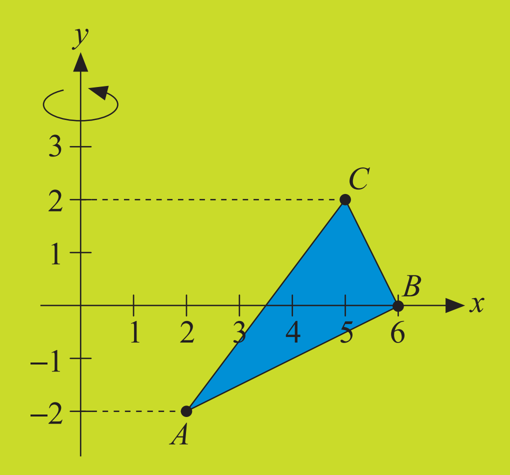
$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi (2)^2(4)$

$V_{cono} = \frac{16}{3}\pi u^3$

Ejemplo 8.42 Volumen de un sólido de revolución.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera cuando el triángulo cuyos vértices son $A(2, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(5, 2)$ gire en torno al eje y.

Solución:



Procedemos a encontrar el punto de intersección del lado $\overline{AC}$ del triángulo con el eje x.

La función lineal que contiene dicho segmento de recta es:

$$f(x) = \frac{2}{3}(2x - 7)$$

Para encontrar el valor de la abcisa del punto de intersección de f con el eje x, debemos resolver la ecuación lineal $f(x) = 0$.

$$\frac{2}{3}(2x - 7) = 0$$

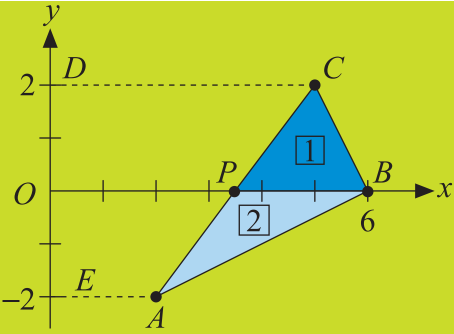
$$2x - 7 = 0$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Las coordenadas de dicho punto P son $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, y también se las puede obtener de manera más sencilla, porque entre $x = 2$ y $x = 5$, la mitad es $x = 3.5$ y las ordenadas respectivas están distribuidas simétricamente respecto al eje x.

El volumen del sólido de revolución que se genera puede ser obtenido en 2 partes:

$$V_S = V_1 + V_2$$



En donde V_1, es el volumen del cono truncado que se genera al rotar la superficie del trapecio *DCBO* menos la superficie del trapecio *DCPO* alrededor del eje y; y, V_2 es el volumen del cono truncado que se genera al rotar el trapecio *OBAE* menos la superficie del trapecio *OPAE* alrededor del eje y.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H_1\left(R_1^2 + R_1 r_1 + r_1^2 - R_2^2 - R_2 r_2 - r_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)\left((6)^2 + (6)(5) + (5)^2 - (5)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)(5) - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(36 + 30 - \frac{35}{2} - \frac{49}{4}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{264 - 70 - 49}{4}\right)$$

$$= \frac{2(145)}{12}\pi$$

$$V_1 = \frac{145}{6}\pi$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi H_3\left(R_3^2 + R_3 r_3 + r_3^2 - R_4^2 - R_4 r_4 - r_4^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)\left((6)^2 + (6)(2) + (2)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)(2) - (2)^2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(36 + 12 - \frac{49}{4} - 7\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(41 - \frac{49}{4}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{164 - 49}{4}\right)$$

$$= \frac{2(115)}{12}\pi$$

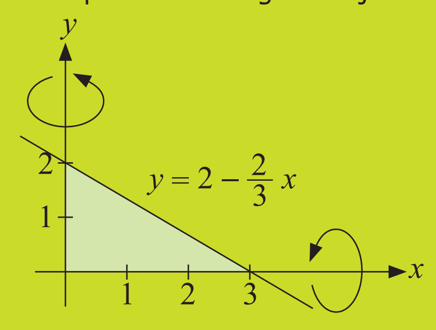
$$V_2 = \frac{115}{6}\pi$$

$$V_S = \frac{145\pi}{6} + \frac{115\pi}{6}$$
$$= \frac{260\pi}{6}$$
$$V_S = \frac{130\pi}{3}$$

Por lo tanto, el volumen que se genera al rotar el triángulo ABC alrededor del eje y es $\frac{130\pi}{3}u^3$.

Ejemplo 8.43 Volumen de un cuerpo de revolución.

Considere la región en el plano de la figura adjunta:



a) Determine Vx, que es el volumen del cuerpo de revolución que se genera al rotar la figura alrededor del eje x.
b) Determine Vy, que es el volumen del cuerpo de revolución que se genera al rotar la figura alrededor del eje y.
c) La proposición: $Vx = Vy$, ¿es verdadera?

Solución:
Dado que se obtiene un cono al rotar alrededor del eje x.

a) $Vx = \frac{1}{3}\pi r_x^2 h_x$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)^2(3)$$

$$Vx = 4\pi u^3$$

Al rotar la figura alrededor del eje y también se obtiene un cono.

b) $Vy = \frac{1}{3}\pi r_y^2 h_y$

$$= \frac{1}{3}\pi(3)^2(2)$$

$$Vy = 6\pi u^3$$

c) A partir de los valores anteriores, concluimos que el valor de verdad de la proposición planteada es falso.

8.3 Cuerpos geométricos

1. Construya un tetraedro regular con arista de $10cm$ de longitud.
2. Construya un hexaedro regular con arista de $12cm$ de longitud.
3. Construya un octaedro regular con arista de $8cm$ de longitud.

8.4 Prismas

4. Construya un prisma regular hexagonal, con arista de la base cuya longitud es $9cm$ y altura de longitud $15cm$. Discuta sobre sus aristas, altura y geometría de sus caras.

5. En un cubo de $4cm$ de arista, determine el ángulo que forma la diagonal de una cara con la diagonal del cubo del mismo vértice.

8.5 Pirámides

6. Construya una pirámide regular pentagonal, con arista de la base cuya longitud es $10cm$ y altura de longitud $15cm$. Discuta sobre sus aristas, altura, vértice y geometría de sus caras.

7. Construya una pirámide truncada regular hexagonal, con arista de la base cuya longitud es $10cm$ y longitud de la altura igual a $8cm$. Discuta sobre la semejanzas de sus bases y geometría de sus caras.

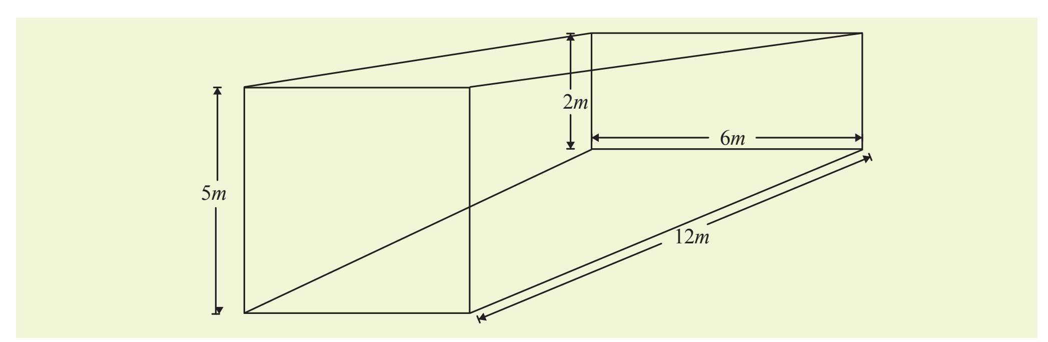
8.6 Áreas de poliedros

8. Calcule el área de la superficie lateral y total de los sólidos construidos en los numerales 1, 2, 3, 4, 6 y 7.

8.7 Volúmenes de poliedros

9. Un aljibe tiene la forma de una pirámide truncada, más ancho por su parte superior, siendo la base inferior un rectángulo de $80cm$ de ancho y $140cm$ de largo. Si el aljibe tiene una altura de $70cm$ y las dimensiones de la parte superior están a razón de 2 a 1 respecto a la base, determine su capacidad.

10. Calcule la capacidad de la piscina que se muestra en la figura.



11. Un lingote de oro en forma de pirámide truncada tiene una base inferior en forma rectangular con dimensiones de $12cm$ y $16cm$, respectivamente. La altura es de $18cm$ y la base superior tiene dimensiones de 3 y $4cm$. Calcule el volumen del lingote.

12. La arista de un cubo de $512cm^3$ de volumen, tiene por longitud:

a) $2cm$ b) $4cm$ c) $8cm$ d) $16cm$ e) $64cm$

13. El sólido de la figura adjunta muestra un cubo de arista a unidades con un hueco también cúbico de arista $a/2$ unidades. El volumen del sólido expresado en unidades cúbicas es:

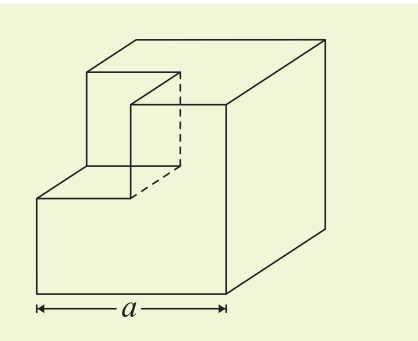
a) $\frac{7}{3}a^3$

b) $\frac{7}{8}a^3$

c) $\frac{1}{3}a^3$

d) $\frac{2}{3}a^3$

e) $\frac{5}{8}a^3$

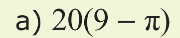


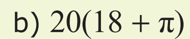
8.8 Cuerpos de revolución

14. Calcular la longitud de la generatriz de un cono de $6cm$ de radio y $8cm$ de altura.

15. Se funden dos esferas de oro con radios que miden 4 y $7cm$ respectivamente, para formar una nueva esfera. Determine la longitud del radio de la nueva esfera.

16. El volumen del sólido que se muestra en la figura adjunta, expresado en unidades cúbicas, es:

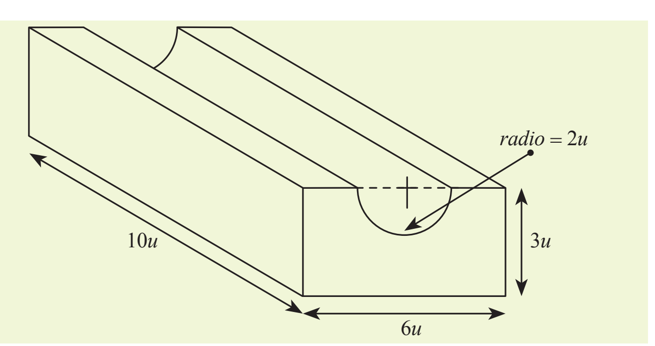

a) $20(9-\pi)$


b) $20(18+\pi)$

c) $20(9+\pi)$

d) $20(18-\pi)$

e) $40(4-\pi)$



Para las siguientes dos preguntas, considere una esfera inscrita en un cubo de arista a unidades.

17. El radio de la esfera mide $\frac{1}{2}a$ unidades.

a) Verdadero

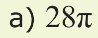
b) Falso

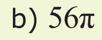
18. El volumen comprendido entre el cubo y la esfera mide $a^3(4\pi-3)$ unidades cúbicas.

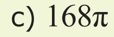
a) Verdadero

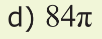
b) Falso

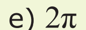
19. Considere el cono truncado tal como se muestra en la figura, con radios $r = 2cm$ y $R = 4cm$ respectivamente y altura $h = 6cm$. Entonces, su volumen expresado en cm^3 es:

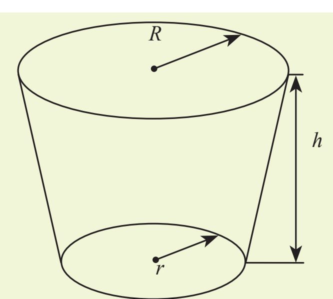

a) 28π


b) 56π

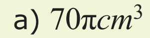

c) 168π


d) 84π


e) 2π



20. En el cilindro hueco que se muestra a continuación, se tiene que el diámetro exterior mide $8cm$, el diámetro interior mide $6cm$ y el espesor e es de $10cm$. Entonces, el volumen de la parte sólida es:



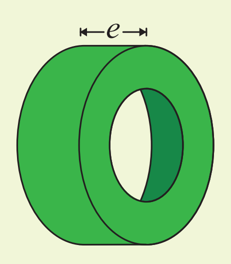
a) $70\pi cm^3$

b) $28\pi cm^3$

c) $700\pi cm^3$

d) $280\pi cm^3$

e) $35\pi cm^3$



21. Dentro de una caja cúbica, cuyo volumen es igual a $64cm^3$, se coloca un balón, de tal forma que toca a todas las caras de la caja en su punto central. El volumen del balón, expresado en cm^3 es:

a) $\frac{8}{3}\pi$ b) $\frac{2}{3}\pi$ c) $\frac{32}{3}\pi$ d) $\frac{16}{3}\pi$ e) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

22. Se tiene en la figura adjunta una semicircunferencia de radio a, un triángulo equilátero y un cuadrado. Entonces, el volumen del sólido que se forma al rotar la región mostrada alrededor de la recta L es:

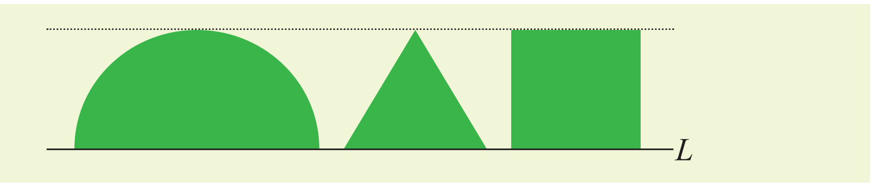
a) $\frac{\pi a^3}{3}\left(7 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\frac{2\pi a^3}{3}$

c) $\pi a^3 (1 + 2\sqrt{3})$

d) $\pi a^3 (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$

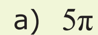
e) $\frac{\pi a^3}{3}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$

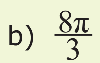


23. La altura de un cilindro recto inscrito en una esfera de radio R y cuya base tiene un diámetro de longitud igual a $2R/3$ es:

a) $\frac{2R}{3}$ b) $\frac{R}{3}$ c) $\frac{4\sqrt{2}\,R}{3}$ d) $\frac{2\sqrt{2}\,R}{3}$ e) $4R$

24. El volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región sombreada de la figura adjunta alrededor del eje yy' es:

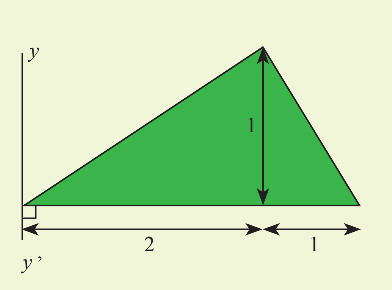
a)  5π

b)  $\frac{8\pi}{3}$

c) 7π

d) $\frac{13\pi}{3}$

e) $\frac{19\pi}{3}$



25. En un cono de diámetro y altura de longitud $2m$ se inscribe otro cono de altura de longitud igual a $1m$, de tal forma que el vértice del cono inscrito coincide con el centro de la base del cono circunscrito. Entonces, el volumen del cono inscrito es:

a) $\pi\, m^3$ b) $\frac{\pi}{12} m^3$ c) $\frac{\pi}{3} m^3$ d) $\frac{\pi}{4} m^3$ e) $2\pi\, m^3$

26. El volumen del sólido que se muestra en la figura adjunta es:

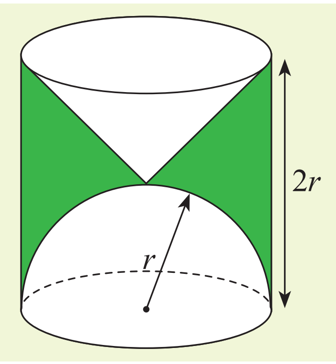
a) $\frac{5\pi}{2} r^3$

b) $4\pi\, r^3$

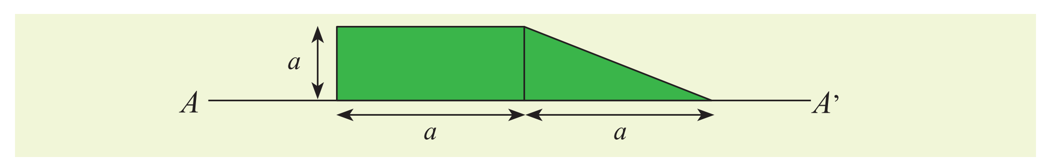
c) $\frac{5\pi}{3} r^3$

d) $\pi\, r^3$

e) $\frac{\pi}{3} r^3$



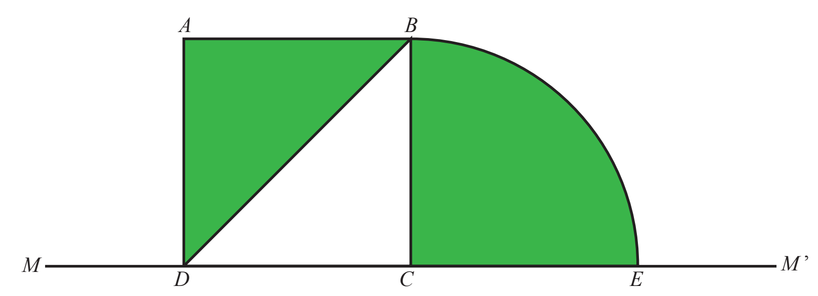
27. Calcule el volumen del sólido que se genera cuando la región sombreada en la figura adjunta gira alrededor del eje AA'.



28. Un cilindro hueco tiene un diámetro exterior de $14pulg$ y un diámetro interior de $10pulg$. Si la altura del cilindro es de $8pulg$, su volumen en $pulg^3$ es:

a) 32π b) 128π c) 190π d) 192π e) 130π

29. Se tiene un cuadrado $ABCD$ de lado $4cm$ de longitud y un cuarto de círculo BCE, como se muestra en la figura.



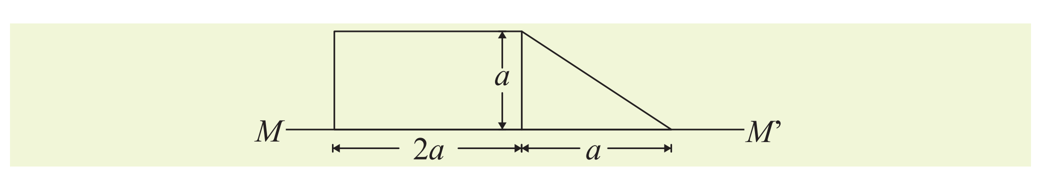
Si la región sombreada gira alrededor del eje MM', el volumen del sólido que se genera en cm^3 es:

a) $\frac{192\pi}{3}$ b) $\frac{256\pi}{3}$ c) $\frac{320\pi}{3}$ d) $\frac{196\pi}{3}$ e) $\frac{512\pi}{3}$

30. El volumen de una esfera de radio igual a 2 unidades es 16π unidades cúbicas.

a) Verdadero b) Falso

31. Considere la región interna al rectángulo y al triángulo rectángulo con las dimensiones que se muestran en la figura adjunta. El área de la superficie total del sólido que se genera al girar esta región, alrededor del eje MM', es:



a) $(5+\sqrt{2})\,\pi a^2$ b) $5\pi a^2$ c) $(4+\sqrt{2})\,\pi a^2$ d) $(3\pi+1)\,a^2$ e) $6\pi a^2$

32. La empresa TOP-ICE requiere fabricar helados con recipiente en forma cónica, de tal forma que la capacidad del cono sea de $125cm^3$ y su altura sea de longitud igual a $10cm$. Determine la longitud del radio que debe tener el cono y la cantidad de material requerida para su fabricación. Construya un modelo del cono para ser mostrado a la gerencia.

33. La empresa FRESHFISH necesita enlatar pescado para exportación. Los requerimientos son los siguientes: el envase debe ser cilíndrico con una capacidad de $400cm^3$ y un diámetro de longitud igual a $15cm$. Determine la altura del envase y la cantidad de material requerido para su fabricación. Construya un modelo del envase.



Capítulo 9

Vectores en el espacio

Introducción

El concepto de vector es muy amplio y su aplicación se evidencia en los diferentes campos de las ciencias. En matemáticas, un vector es un elemento de una estructura algebraica denominada espacio vectorial. En física, un vector es un concepto matemático que se utiliza para describir magnitudes tales como velocidades, aceleraciones o fuerzas. En informática, se lo conoce también como arreglo en una dimensión. En biología, se dice del elemento portador del agente infeccioso, como podría ser el mosquito *Anopheles* infectado con *Plasmodium*, causante de la malaria. En genética, un vector es un agente, que puede ser un virus o un pequeño fragmento de ADN llamado *plásmido*, que porta un gen extraño o modificado. Cuando se usa en terapia génica, el vector pasa el gen deseado a una célula objetivo.



9.1 Vectores en el plano y en el espacio

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar los elementos que identifican a un vector en el plano y a un vector en el espacio.
* Dados dos puntos, construir un vector con la dirección y sentido especificados.
* Representar gráficamente vectores en el plano y en el espacio.
* Identificar condiciones para la igualdad de vectores.

Existen muchas formas de definir un vector de acuerdo al contexto en el cual se está trabajando, la forma más amplia está enmarcada en el álgebra lineal, en la cual se definen espacios vectoriales y a sus elementos se les denomina vectores. Para una comprensión más sencilla, dentro del alcance de este libro, nos interesa únicamente estudiar el espacio vectorial

$\mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y $n \in \mathbb{N}$, el cual permite definir lo que es un vector desde un punto de vista puramente geométrico o algebraico. Así, podemos decir que un vector es un elemento de la forma $\mathbf{V} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, donde a_i es un número real que se denomina coordenada **i-ésima** del vector. Designaremos con $\mathbb{R}^n$ al conjunto de estas **n-uplas**, que también se denomina espacio algebraico **n-dimensional**.

Simbólicamente tenemos:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)/a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

En el caso particular que $n = 2$, $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2)/a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, representa el espacio de los vectores en el plano.

En cambio, con $n = 3$ se tiene $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3)/a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, que constituye el conjunto de vectores en el espacio.

Con $n = 2$ o $n = 3$, podemos visualizar gráficamente los espacios correspondientes a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, a través de los **sistemas de coordenadas**.

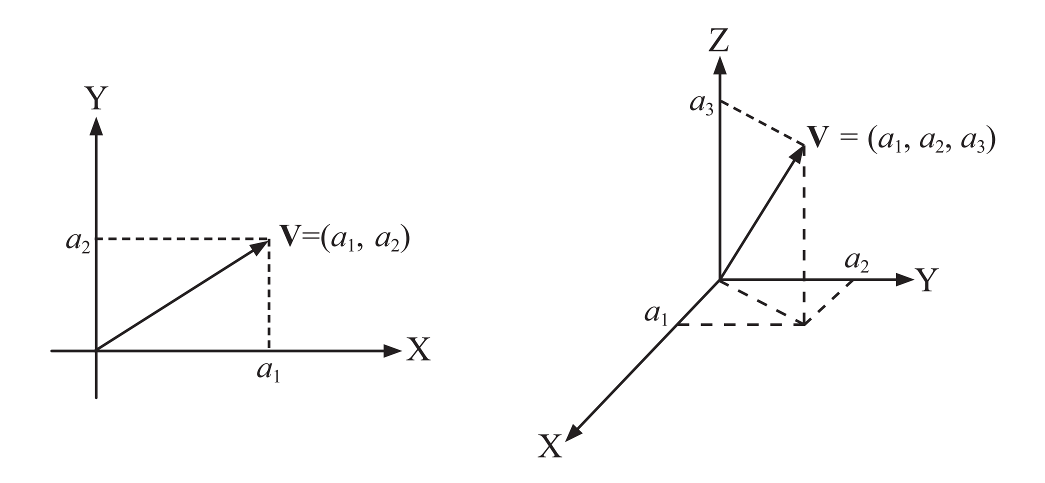


Figura 9.1: Vectores en el Plano y en el Espacio.

En el mundo físico existen magnitudes, todo aquello susceptible de ser medido (*medir es comparar magnitudes de la misma especie, una de las cuales se ha tomado como unidad*), que quedan perfectamente determinadas, dándoles un valor numérico en una unidad conveniente. Estas son las **magnitudes escalares**; así tenemos la presión ejercida por un gas en el interior de un recipiente, la temperatura en un lugar del espacio, el trabajo que se realiza al arrastrar un bulto desde un lugar a otro; luego, la presión, la temperatura y el trabajo son algunos ejemplos de magnitudes escalares.

Vectores en el espacio

Sin embargo, existen otras magnitudes que necesitan, además del valor numérico asignado, una dirección y un sentido para quedar perfectamente determinadas. Si queremos situar (saber su posición) a un alumno en el interior de una clase respecto de la puerta, no nos bastaría con medir la distancia que existe entre el alumno y la puerta, sino que además habría que especificar la dirección. La posición de un objeto respecto de otro es una **magnitud vectorial**, también lo son la velocidad, la aceleración, etc.

Un vector libre, geométricamente puede ser caracterizado por un segmento orientado en el espacio, el cual contiene:

Un **origen**, a considerar cuando interese conocer el punto de aplicación del vector.

Una **dirección** o línea de acción, coincidente con la de la recta que la contiene o cualquier otra recta paralela.

Un **sentido**, que viene determinado por la punta de flecha localizada en el extremo del vector.

Definición 9.1 (Vector en el espacio)

Sean los escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Se define a un vector en el espacio como la terna ordenada (a_1, a_2, a_3) y se lo representa mediante una letra acentuada o una letra con una flecha en la parte superior:

$$\mathbf{V} = (a_1, a_2, a_3)$$

a_1, a_2, a_3 se denominan coordenadas del vector y representan el recorrido en cada dirección de los ejes del sistema de coordenadas X, Y, Z.

Esta definición es de carácter algebraico porque facilita realizar cálculos y operaciones con vectores.

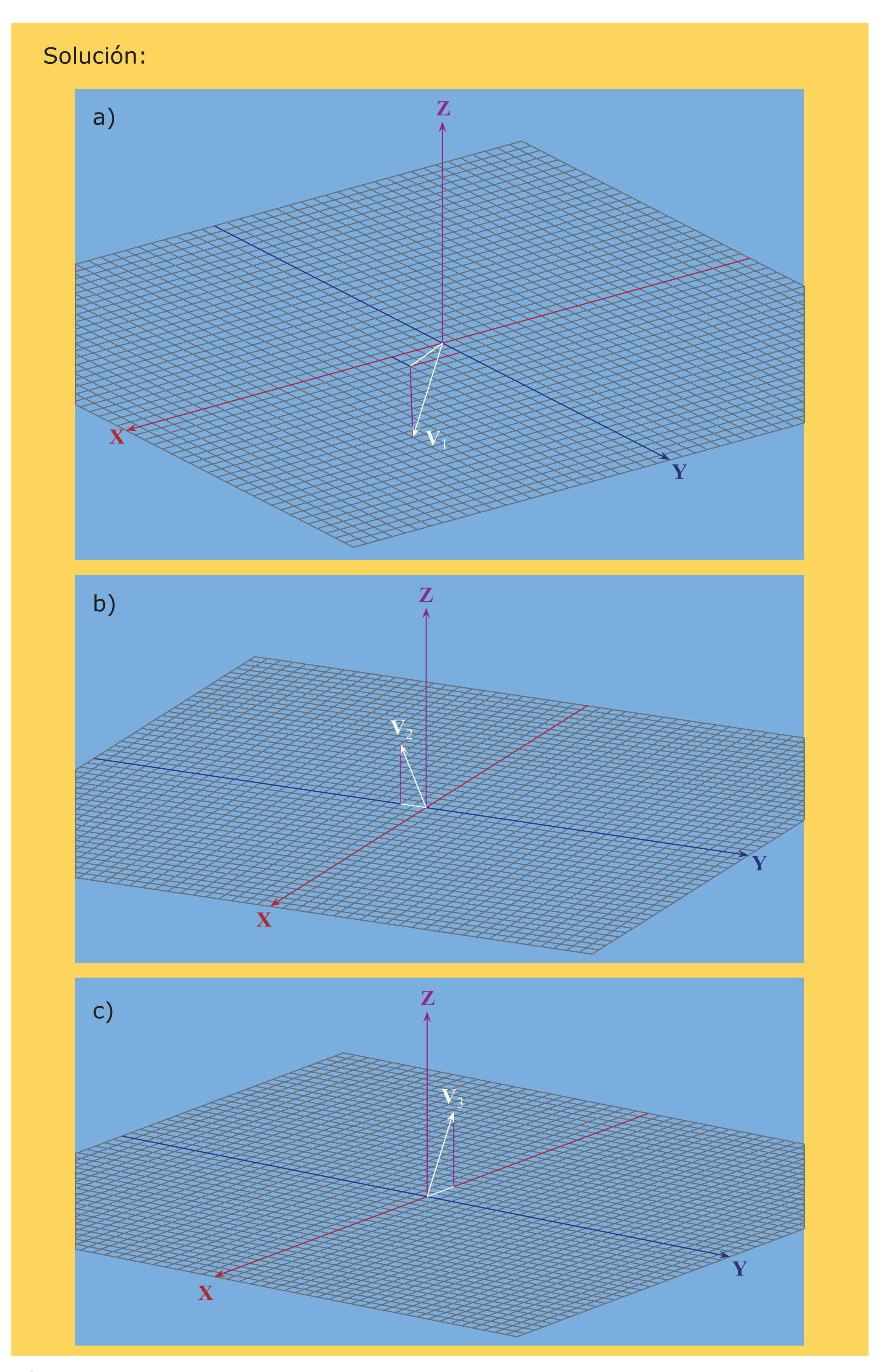
Ejemplo 9.1 Vectores en $\mathbb{R}^3$.

Grafique los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbf{V}_1 = (4, 2, -5)$

b) $\mathbf{V}_2 = (0, -2, 4)$

c) $\mathbf{V}_3 = (-3, 0, 5)$


Solución:
a)
Z
X
Y
V_1
b)
Z
V_2
Y
X
c)
Z
V_3
X
Y

La **magnitud**, **módulo** o **norma** de un vector, denotada por $\|\mathbf{V}\|$, es la distancia de su recorrido, es decir, la longitud del segmento de recta correspondiente al vector: $\|\mathbf{V}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Se conoce como **vector cero** a un vector con recorrido nulo, el cual se denota por:

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

Por lo tanto, la magnitud de este vector es cero.

Desde el punto de vista geométrico, cualquier punto en el plano o el espacio se puede considerar como el vector libre cero, es decir, un vector cuyo origen y extremo final coinciden.

Similarmente, todo segmento de recta dirigido en el plano o en el espacio puede considerarse como un vector en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Supongamos que el segmento de recta tiene su inicio en el punto $\mathbf{P}$ y su extremo final en el punto $\mathbf{Q}$, a él podemos asociar el vector $\mathbf{V} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ del espacio correspondiente. Este segmento de recta asociado a este vector $\mathbf{V}$, que parte del origen y llega al punto $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$, es equivalente al segmento de recta original que partía de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ y da lugar a la igualdad entre vectores.

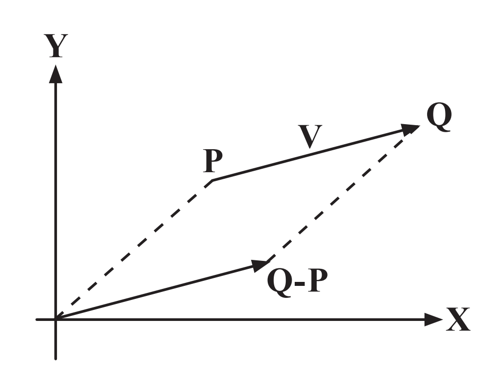


Figura 9.2: Igualdad entre vectores.

Los vectores $\mathbf{V}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{V}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ se dice que son **iguales**, si y sólo si tienen igual recorrido, es decir,

$$(\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2) \Leftrightarrow [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge (a_3 = b_3)]$$

9.2 Operaciones entre vectores

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Definir e interpretar geométricamente las operaciones de suma vectorial y multiplicación de un vector por un escalar.
* Dados varios vectores, realizar una combinación lineal entre ellos.
* Demostrar propiedades de las operaciones entre vectores.
* Dado un conjunto de objetos, reconocer si es un espacio vectorial.
* Demostrar el teorema del producto escalar.
* Calcular la medida del ángulo que forman dos vectores.
* Aplicar las propiedades de las operaciones entre vectores respecto al producto escalar.
* Aplicar el concepto de vectores paralelos, vectores ortogonales, norma de un vector, empleando operaciones entre vectores.

Definición 9.2 (Suma vectorial)

Sean los vectores $\mathbf{V}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{V}_2 = (b_1, b_2, b_3)$, su suma se denota por $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ y sus coordenadas son $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Para su interpretación gráfica, el vector resultante de la suma representa la diagonal del paralelogramo formado por ambos vectores. También podemos colocar los vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, de modo que el punto final de $\mathbf{V_1}$ coincida con el punto inicial de $\mathbf{V_2}$; entonces el vector $\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$ es el vector cuyo punto inicial coincide con el punto inicial de $\mathbf{V_1}$ y cuyo punto final coincide con el punto final de $\mathbf{V_2}$.

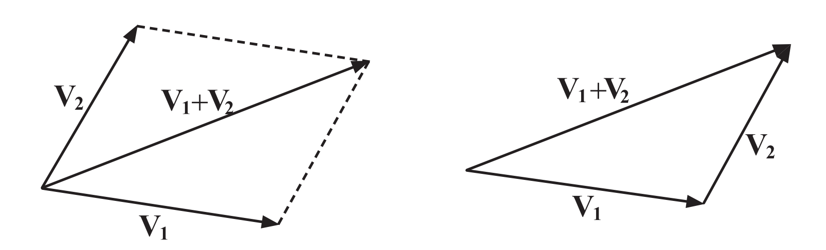


Figura 9.3: Suma gráfica de vectores.

La suma o adición vectorial cumple las siguientes propiedades:

$\forall\ \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1]$	**Conmutativa**
$\forall\ \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3 \in \mathbb{R}^3 [(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)]$	**Asociativa**
$\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3 \forall\ \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{0} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{0} = \mathbf{V}]$	**Neutro aditivo**
$\forall\ \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3\ \exists (-\mathbf{V}) \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{V} + (-\mathbf{V}) = \mathbf{0}]$	**Inverso aditivo**

Cuadro 9.1: Propiedades de la Suma Vectorial.

Podemos caracterizar gráficamente la propiedad del **inverso aditivo** de la siguiente manera: el vector inverso aditivo de un vector dado $\mathbf{A}$ (o $\mathbf{B}$) es otro vector de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario al dado, denotado por $-\mathbf{A}$ (o $-\mathbf{B}$).

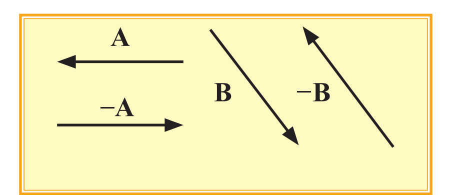


Figura 9.4: Inversos Aditivos.

Ejemplo 9.2 Demostración de propiedades de los vectores.

Sean $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ vectores en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$.

Solución:

Para la demostración consideraremos:

$\mathbf{V}_1 = (a_1, a_2, a_3)$

$\mathbf{V}_2 = (b_1, b_2, b_3)$

$\mathbf{V}_3 = (c_1, c_2, c_3)$

Realizamos la suma entre $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$:

$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

Luego, entre $(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$ y $\mathbf{V}_3$:

$(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, (a_3 + b_3) + c_3)$

Por la propiedad asociativa de números reales, tenemos:

$(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3))$

De donde se obtiene que:

$(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$

Con lo que se demuestra la propiedad.

Ejemplo 9.3 Suma vectorial.

Determine el valor de verdad de la siguiente proposición: "Si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ de igual norma, entonces $\|\mathbf{U} + \mathbf{V}\| = 2\|\mathbf{U}\|$".

Solución:

Podemos notar que esta proposición es falsa, por lo tanto vamos a utilizar el método de demostración por contraejemplo.

Para ello, definimos dos vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que $\mathbf{U} = -\mathbf{V}$, así:

$\mathbf{U} = (2, 3, 4)$

$\mathbf{V} = (-2, -3, -4)$

Al realizar la suma y aplicar el módulo al vector resultante:

$\|\mathbf{U} + \mathbf{V}\| = \|2 - 2, 3 - 3, 4 - 4\| = \|(0, 0, 0)\|$

$\|\mathbf{U} + \mathbf{V}\| = 0$

Con lo que se concluye que $\|\mathbf{U} + \mathbf{V}\| \neq 2\|\mathbf{U}\|$ ya que $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$, es decir que: $0 \neq 2\sqrt{29}$.

Definición 9.3 (Resta vectorial)

Sean los vectores $\mathbf{V}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{V}_2 = (b_1, b_2, b_3)$, su resta se denota por $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ y sus coordenadas son $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

Se puede observar que: $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2)$.

Para su interpretación gráfica, el vector resultante de la resta está sustentado en el lado faltante del triángulo que se forma con $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, para lo cual podemos colocar los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, de modo que sus puntos iniciales coincidan, el vector $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ es el vector cuyo punto inicial coincide con el punto final de $\mathbf{V}_2$ y cuyo punto final coincide con el punto final de $\mathbf{V}_1$.

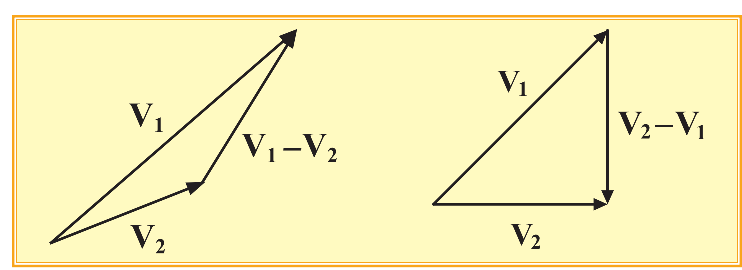


Figura 9.5: Resta gráfica de vectores.

El vector $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ tiene la misma magnitud y dirección del vector $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, pero sentido opuesto a este último. De aquí que la resta entre vectores no es conmutativa.

Definición 9.4 (Multiplicación de un vector por un escalar)

Sea el vector $\mathbf{V} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y un escalar $\mu \in \mathbb{R}$, la multiplicación entre μ y $\mathbf{V}$ se denota por $\mu\mathbf{V}$ y sus coordenadas son $(\mu a_1,\ \mu a_2,\ \mu a_3)$.

El vector $\mu\mathbf{V}$ es un vector cuyo módulo es μ veces el módulo de $\mathbf{V}$, de la misma dirección que $\mathbf{V}$ y de sentido igual al de $\mathbf{V}$, si $\mu > 0$. Si $\mu < 0$, el sentido de $\mu\mathbf{V}$ será contrario al del vector $\mathbf{V}$.

Se puede observar que $\mu\mathbf{V} = \mathbf{0}$, si y sólo si $\mu = 0$ o $\mathbf{V} = \mathbf{0}$.

El producto o multiplicación de un vector por un escalar posee las siguientes propiedades:

$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R} \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 [(\mu\lambda)\mathbf{V} = \mu(\lambda\mathbf{V})]$	**Asociativa**
$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R} \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 [(\mu + \lambda)\mathbf{V} = \mu\mathbf{V} + \lambda\mathbf{V}]$	**Distributivas**
$\forall \mu \in \mathbb{R} \forall \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^3 [\mu(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \mu\mathbf{V}_1 + \mu\mathbf{V}_2]$	

Cuadro 9.2 Propiedades de la multiplicación de un vector por un escalar.

Ejemplo 9.4 Propiedades de los vectores.

Demuestre que si $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$, se cumple que:

$$(\mu + \lambda)\mathbf{V} = \mu\mathbf{V} + \lambda\mathbf{V}.$$

Solución:

Para nuestra demostración, conocemos que:

$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{V} = (a_1, a_2, a_3)$

Así:

$(\mu + \lambda)\mathbf{V} = (\mu + \lambda)(a_1, a_2, a_3)$

Realizamos el producto de un vector por un escalar.

$(\mu + \lambda)\mathbf{V} = ((\mu + \lambda)a_1, (\mu + \lambda)a_2, (\mu + \lambda)a_3)$

Aplicando la propiedad distributiva de la suma de números reales, tenemos:

$(\mu + \lambda)\mathbf{V} = (\mu a_1 + \lambda a_1, \mu a_2 + \lambda a_2, \mu a_3 + \lambda a_3)$

Aplicando la definición de suma de vectores:

$(\mu + \lambda)\mathbf{V} = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) + (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

Aplicando la definición del producto de un vector por un escalar.

$(\mu + \lambda)\mathbf{V} = \mu(a_1, a_2, a_3) + \lambda(a_1, a_2, a_3)$

Por lo tanto, $(\mu + \lambda)\mathbf{V} = \mu\mathbf{V} + \lambda\mathbf{V}$, con lo que se demuestra la propiedad.

Ejemplo 9.5 Operaciones entre vectores.

Dados los vectores $\mathbf{V_1} = (5, 4, 2)$ y $\mathbf{V_2} = (3, 2, 1)$, determine:

a) $\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$

b) $\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}$

c) $4\mathbf{V_1} - 3\mathbf{V_2}$

Solución:

a)
$$\begin{aligned} \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} &= (5 + 3, 4 + 2, 2 + 1) \\ \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} &= (8, 6, 3) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1} &= (3 - 5, 2 - 4, 1 - 2) \\ \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1} &= (-2, -2, -1) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4\mathbf{V_1} - 3\mathbf{V_2} &= 4(5, 4, 2) - 3(3, 2, 1) \\ &= (20, 16, 8) - (9, 6, 3) \\ 4\mathbf{V_1} - 3\mathbf{V_2} &= (11, 10, 5) \end{aligned}$$

La multiplicación de un vector por un escalar permite definir una relación de paralelismo entre dos vectores.

Definición 9.5 (Vectores paralelos)

Dos vectores no nulos $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ son paralelos, si y sólo si el uno es múltiplo del otro, es decir, si existe un escalar $\mu \neq 0$ tal que $\mathbf{V}_2 = \mu\mathbf{V}_1$, lo cual se denota por: $\mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2$.

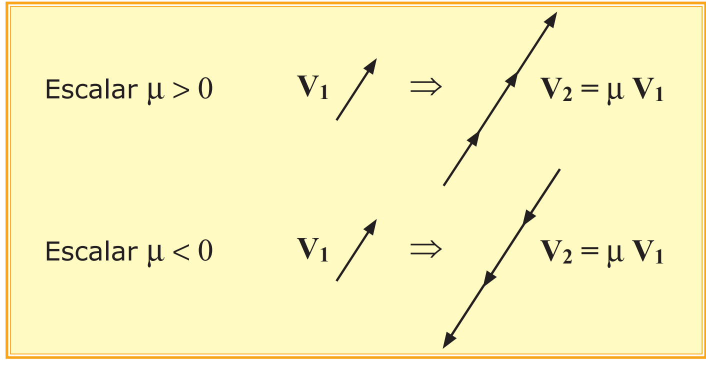


Figura 9.6: Multiplicación de un Vector por un Escalar.

Ejemplo 9.6 Vectores paralelos.

Determine los valores de k y p, para los cuales $\mathbf{V_1} \parallel \mathbf{V_2}$.

$\mathbf{V_1} = (k, k + p, -2)$

$\mathbf{V_2} = (-k - p, 2p, 4)$

Solución:

$\mathbf{V_1} = \mu\mathbf{V_2}$

$(k, k + p, -2) = \mu(-k - p, 2p, 4)$

De las terceras componentes y aplicando el principio de igualdad de vectores, se obtiene que $\mu = -1/2$.

Igualando las otras componentes, respectivamente, se tiene que los valores solicitados son: $k = p = 0$.

Ejemplo 9.7 Vectores paralelos.

Determinar las coordenadas de un vector en $\mathbb{R}^3$ tal que su módulo sea 3 y posea la misma dirección y sentido del vector $\mathbf{V} = (3, -1, 5)$.

Solución:

Denominaremos $\mathbf{W}$ al vector solicitado:

$\mathbf{W} = (a_1, a_2, a_3)$

Como los vectores $\mathbf{W}$ y $\mathbf{V}$ deben tener la misma dirección, entonces:

$\mathbf{W} = \mu\mathbf{V}$

$\mathbf{W} = \mu(3, -1, 5)$

$\mathbf{W} = (3\mu, -\mu, 5\mu)$

Si determinamos el módulo de $\mathbf{V}$, tenemos:

$\| \mathbf{V} \| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (5)^2}$

$\| \mathbf{V} \| = \sqrt{35}$

Luego, por condición del problema:

$\| \mathbf{W} \| = \mu\sqrt{35}$

Puesto que necesitamos que $\|\mathbf{W}\| = 3$, obtenemos el valor de μ:

$$\mu = \frac{\|\mathbf{W}\|}{\sqrt{35}}$$

$$\mu = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

De donde el vector **W** solicitado sería:

$$\mathbf{W} = \frac{3}{\sqrt{35}}(3, -1, 5)$$

$$\mathbf{W} = \left(\frac{9}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{15}{\sqrt{35}}\right)$$

Verificando:

$$\|\mathbf{W}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{35}}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{35}}\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{35}}\right)^2}$$

$$\|\mathbf{W}\| = \sqrt{\frac{81}{35} + \frac{9}{35} + \frac{225}{35}}$$

$$\|\mathbf{W}\| = \sqrt{9}$$

$$\|\mathbf{W}\| = 3$$

Las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, permiten crear un concepto fundamental en la teoría del álgebra vectorial, el de **combinación lineal.**

Definición 9.6 (Combinación lineal)

Se denomina combinación lineal de los vectores $\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}, \ldots, \mathbf{V_n}$ con los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$, al vector $\mathbf{V} = c_1\mathbf{V_1} + c_2\mathbf{V_2} + \ldots + c_n\mathbf{V_n}$.

Se dice que el conjunto de vectores $\{\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}, \ldots, \mathbf{V_n}\}$ generan todo el **espacio vectorial** $\mathbb{R}^n$, si cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse como combinación lineal de ellos. Dicho espacio vectorial debe tener definidas las operaciones descritas anteriormente, es decir, la suma vectorial y la multiplicación de un escalar por un vector.

Ejemplo 9.8 Espacio vectorial.

Determine los valores de k, para los cuales los vectores $\mathbf{V_1} = (k, 1, 1)$, $\mathbf{V_2} = (1, k, 1)$ y $\mathbf{V_3} = (1, 1, k)$ generan el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Si $\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}$, y $\mathbf{V_3}$ generan el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, para cualquier vector

$\mathbf{V} = (a_1, a_2, a_3)$, existen constantes c_1, c_2, c_3, tales que:

$$\mathbf{V} = c_1\mathbf{V_1} + c_2\mathbf{V_2} + c_3\mathbf{V_3}.$$

Por lo cual, $(a_1, a_2, a_3) = (kc_1, c_1, c_1) + (c_2, kc_2, c_2) + (c_3, c_3, kc_3)$, generándose un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, el mismo que se requiere sea consistente.

El siguiente S.E.L. entonces, debe tener solución para cualquier valor de a_1, a_2, a_3:

$$\begin{cases} a_1 = kc_1 + c_2 + c_3 \\ a_2 = c_1 + kc_2 + c_3 \\ a_3 = c_1 + c_2 + kc_3 \end{cases}$$

El S.E.L. tiene solución única si y sólo si $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$.

Es decir: $k^3 - 3k + 2 \neq 0$.

Luego, el S.E.L. tiene solución única para los valores de k del conjunto $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

Ejemplo 9.9 Espacio vectorial.

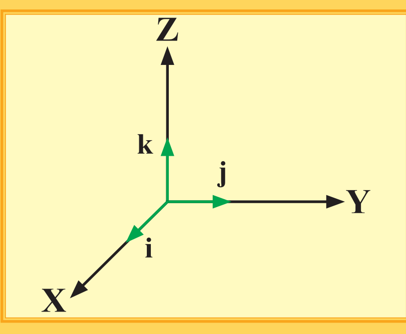
Demuestre que el conjunto de vectores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, definidos por: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ generan el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Solución:

En efecto, sea $\mathbf{V} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \mathbf{V} &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ \mathbf{V} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Es decir, los escalares de la combinación lineal son las mismas componentes del vector.



Vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ generadores de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 9.10 Espacio vectorial.

Analice si el conjunto P de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, constituye un espacio vectorial.

Solución:

Para la demostración construimos dos polinomios de grado menor o igual que n:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

La suma de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es:

$p(x)+q(x) = (a_n+b_n)x^n+(a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}+ \dots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$; y,

constituye un nuevo polinomio de grado menor o igual que n.

El producto de un polinomio de este conjunto por un escalar es:

$\mu p(x) = \mu(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$

$\mu p(x) = \mu a_n x^n + \mu a_{n-1}x^{n-1} + \dots + \mu a_1 x + \mu a_0$,

el cual constituye también un nuevo polinomio de grado menor o igual que n.

A partir de lo anterior, concluimos que efectivamente el conjunto P sí constituye un espacio vectorial.

Ejemplo 9.11 Espacio vectorial.

Analice si el conjunto de matrices de orden 2 x 2 de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ constituye un espacio vectorial.

Solución:

Tomamos dos matrices de orden 2 x 2 que correspondan a la forma dada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos A y B obteniendo:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si reemplazamos los valores de $a_1 + a_2$ por a' y $b_1 + b_2$ por b', tenemos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz de orden 2 x 2 que conserva la forma original.

Si multiplicamos la matriz A por un escalar μ, tenemos:

$$\mu A = \begin{pmatrix} 0 & \mu a_1 \\ \mu b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Reemplazando μa_1 y μb_1 por a' y b' respectivamente:

$$\mu A = \begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

que representa una matriz de orden 2 x 2 con la forma original.

De allí que este conjunto sí constituye un espacio vectorial y a cada matriz del conjunto se la puede considerar como un vector de dicho espacio.

Definición 9.7 (Producto escalar)

Sean los vectores $\mathbf{V_1} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{V_2} = (b_1, b_2, b_3)$, su producto escalar se denota por $\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2}$ y se define como $\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, el producto escalar también denominado **producto punto** por su notación, es un tipo de "producto interno" que se puede definir en un espacio vectorial en general, y es una magnitud escalar que nos informa de la tendencia de los vectores a apuntar hacia un mismo sentido. Se puede definir como una función:

$$\bullet : \mathbb{R}^3 \text{ x } \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

El producto escalar de vectores posee las siguientes propiedades:

$\forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{V} \bullet \mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{V} = 0]$	**Vector nulo**
$\forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{V} \bullet \mathbf{V} = \lVert \mathbf{V} \rVert^2 \geq 0]$	**Definida positiva**
$\forall \mathbf{V_1}, \mathbf{V_2} \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = \mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_1}]$	**Conmutativa**
$\forall \mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}, \mathbf{V_3} \in \mathbb{R}^3 [\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} + \mathbf{V_3}) = \mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} + \mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_3}]$	**Distributiva**
$\forall \mu \in \mathbb{R} \forall \mathbf{V_1}, \mathbf{V_2} \in \mathbb{R}^3 [(\mu \mathbf{V_1}) \bullet \mathbf{V_2}) = \mu(\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2})]$	**Asociativa**

Cuadro 9.3: Propiedades del producto escalar de vectores.

Este producto es de mucha utilidad, porque permite medir el ángulo que forman dos vectores en el plano o en el espacio.

Medida del ángulo entre dos vectores

Sean $\mathbf{V_1} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{V_2} = (b_1, b_2, b_3)$, dos vectores representados con el mismo origen **A**. Los vectores $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$ forman un triángulo. El ángulo cuya medida es θ en el vértice **A** del triángulo es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$.

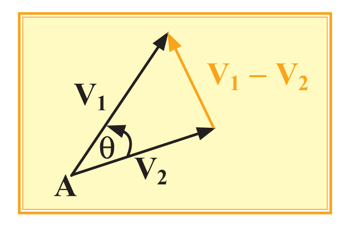


Figura 9.7: Medida del Ángulo entre dos Vectores.

Utilizando la ley del coseno se puede determinar la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2\|^2 = \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_2\|^2 - 2\ \|\mathbf{V}_1\|\ \|\mathbf{V}_2\|\ cos\ (\theta)$$

O también:

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) - 2\ \|\mathbf{V}_1\|\ \|\mathbf{V}_2\|\ cos\ (\theta)$$

Después de desarrollar los cuadrados y reducir términos, obtenemos:

$$-2\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = -2\ \|\mathbf{V}_1\|\ \|\mathbf{V}_2\|\ cos\ (\theta)$$

Y finalmente obtenemos.

$$\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = \|\mathbf{V}_1\|\ \|\mathbf{V}_2\|\ cos\ (\theta)$$

Para este cálculo, se considera que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Teorema 9.1 (Ángulo formado entre dos vectores)

Si $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ son dos vectores no nulos, el ángulo cuya medida es θ, entre $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ está dado por:

$$\theta = arccos\left(\frac{\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2}}{\|\mathbf{V}_1\|\ \|\mathbf{V}_2\|}\right)$$

Definición 9.8 (Vectores ortogonales)

Dos vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ son ortogonales, si y sólo si $\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = 0$.

Geométricamente, la ortogonalidad es sinónimo de perpendicularidad, es decir, los vectores forman un ángulo recto entre ellos, y por lo tanto, $\theta = 90^{\circ}$. Esto se representa con $\mathbf{V_1} \perp \mathbf{V_2}$.

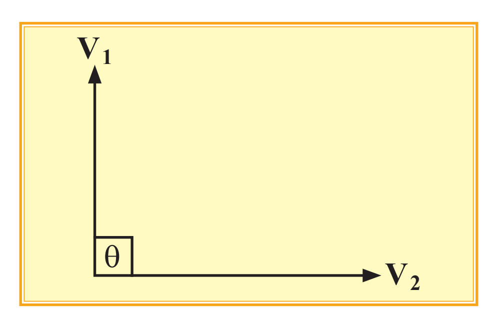


Figura 9.8: Vectores Ortogonales.

Ejemplo 9.12 Producto escalar.

Determine la medida del ángulo que forman entre sí los vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, si se sabe que los vectores $\mathbf{V_3} = \mathbf{V_1} + 2\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_4} = 5\mathbf{V_1} - 4\mathbf{V_2}$ son ortogonales y que además $\|\mathbf{V_1}\| = \|\mathbf{V_2}\| = 1$.

Solución:

Dado que $\mathbf{V_3}$ y $\mathbf{V_4}$ son vectores ortogonales $\mathbf{V_3} \bullet \mathbf{V_4} = 0$, luego:

$$\mathbf{V_3} \bullet \mathbf{V_4} = (\mathbf{V_1} + 2\mathbf{V_2}) \bullet (5\mathbf{V_1} - 4\mathbf{V_2}) = 0$$

$$5\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_1} - 4\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} + 10\mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_1} - 8\mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_2} = 0$$

Puesto que $\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_1} = \|\mathbf{V_1}\|^2$ y $\mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_2} = \|\mathbf{V_2}\|^2$ y aplicando la propiedad conmutativa del producto escalar, tenemos:

$$5\|\mathbf{V_1}\|^2 + 6\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} - 8\|\mathbf{V_2}\|^2 = 0$$

Reemplazando la condición del problema, tal que $\|\mathbf{V_1}\| = \|\mathbf{V_2}\| = 1$:

$$5 + 6\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} - 8 = 0$$

Despejando el producto, se obtiene:

$$6\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = 3$$

$$\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = \frac{1}{2}$$

Aplicando la definición del producto escalar y denominando θ a la medida del ángulo entre $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$:

$$\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = \|\mathbf{V_1}\|\,\|\mathbf{V_2}\| \cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$ que es la medida del ángulo entre $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$.

Ejemplo 9.13 Vectores en $\mathbb{R}^3$.

Se tienen los vectores $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_3}$ en $\mathbb{R}^3$, tales que:

$$\mathbf{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{pmatrix} k+2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallar el valor de k para que $\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$ sea ortogonal a $\mathbf{V_3}$.

Solución:

Realizamos la suma entre $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$:

$$\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = \begin{pmatrix} 1+k+2 \\ 2+3 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+3 \\ 5 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

Luego, para que $\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$ sea ortogonal a $\mathbf{V_3}$, debe cumplirse que:

$(\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}) \bullet \mathbf{V_3} = 0$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} k+3 \\ 5 \\ k-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$k+3+10+k-1=0$

Con lo cual, al despejar el valor de k, se tiene:

$2k = -12$

$k = -6$

Verificación:

$$\mathbf{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}) \bullet \mathbf{V_3} = -3 + 10 - 7 = 0$

Teorema 9.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean $\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2} \in \mathbb{R}^3$, entonces: $(\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2})^2 \leq (\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_1})\,(\mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_2})$.

Demostración:

Si $\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$, ($\mathbf{0}$ vector), ambos miembros de la desigualdad son ceros y por tanto el teorema es cierto.

Supongamos ahora que $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{0}$, consideremos el vector $\mathbf{U} = \mathbf{V}_2 + c\mathbf{V}_1$, donde c es un valor escalar. Realizando el producto punto de $\mathbf{U}$ con $\mathbf{U}$ y aplicando las propiedades del teorema anterior, obtenemos:

$$0 \leq \mathbf{U} \bullet \mathbf{U} = (\mathbf{V}_2 + c\mathbf{V}_1) \bullet (\mathbf{V}_2 + c\mathbf{V}_1) = (\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2) + 2(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)c + (\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_1)c^2$$

Pero la expresión $(\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2) + 2(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)c + (\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_1)c^2$ puede interpretarse como una función cuadrática $f(c) = (\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_1)c^2 + 2(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)c + (\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2)$, la cual geométricamente representa una parábola cóncava hacia arriba. Puesto que se ha demostrado que $f(c) \geq 0$ para toda c, el discriminante de la ecuación cuadrática debe ser menor o igual que 0.

Entonces, se debe cumplir que:

$$[2(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)]^2 - 4(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2) \leq 0$$

O sea:

$$(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)^2 \leq (\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2)$$

Tal como se quería demostrar.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz permite obtener un resultado importante, válido para la norma de la suma $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ que tiene una interpretación geométrica sencilla. Con la ayuda de las propiedades del producto escalar y de la norma, podemos establecer que:

$$\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\|^2 = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \bullet (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$$
$$= (\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_1) + (\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2) + (\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_1) + (\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2)$$
$$\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\|^2 = \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_2\|^2 + 2(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)$$

En la última expresión todos los sumandos son números reales, y al tomar el valor absoluto, se plantea:

$$\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\|^2 \leq \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_2\|^2 + 2|(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2)|$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\|^2 \leq \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_2\|^2 + 2\|\mathbf{V}_1\|\,\|\mathbf{V}_2\|$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\|^2 \leq (\|\mathbf{V}_1\| + \|\mathbf{V}_2\|)^2$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\| \leq \|\mathbf{V}_1\| + \|\mathbf{V}_2\|$$

Esta desigualdad se denomina **desigualdad triangular**.

En función del producto punto, se puede definir la norma de un vector.

Definición 9.9 (Norma de un vector)

Sea $\mathbf{V} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. La norma de $\mathbf{V}$ está dada por $\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\mathbf{V} \bullet \mathbf{V}}$

Ejemplo 9.14 Norma de un vector.

$$\|(0, \sqrt{2}, -2)\| = \sqrt{6}$$

$$\|(3, -4, 0)\| = 5$$

$$\|(1, -\sqrt{10}, -5)\| = 6$$

Se puede demostrar la siguiente propiedad de la norma de un vector.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \ [\|\alpha \mathbf{V}\| = |\alpha| \ \|\mathbf{V}\|]$$

Esta propiedad puede facilitar cálculos de normas con números fraccionarios o que emplean notación científica, como se muestra a continuación.

Ejemplo 9.15 Norma de un vector.

Determine la norma de los siguientes vectores:

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1\right)$

b) $(-100, -200, -500)$

Solución:

El vector del literal a) se lo puede expresar como $\frac{1}{4}(2, 1, -4)$.

Por la propiedad anterior,

$$\left\|\frac{1}{4}(2, 1, -4)\right\| = \frac{1}{4}\ \|(2, 1, -4)\| = \frac{1}{4}\ \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \frac{1}{4}\ \sqrt{21}.$$

El vector del literal b) se lo puede expresar como $-100(1, 2, 5)$.

Por la propiedad anterior,

$$\| -100(1, 2, 5)\| = 100\|(1, 2, 5)\| = 100\ \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = 100\ \sqrt{30}.$$

9.3 Vectores unitarios

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Calcular vectores unitarios sobre una dirección dada.
* Dados dos vectores, calcular la proyección escalar y vectorial especificada entre ellos.

Un vector $\mathbf{V}$ se dice unitario si su norma es la unidad, es decir, si $\|\mathbf{V}\| = 1$.

Ejemplo 9.16 Vectores unitarios.

Son vectores unitarios:

$\mathbf{V} = (0, -1, 0)$

$\mathbf{V} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Una consecuencia inmediata de esta definición es que los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son vectores unitarios.

Si $\mathbf{V}$ es un vector diferente de cero, $\frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ es un vector unitario cuya dirección es la misma que la del vector $\mathbf{V}$.

Proyecciones escalares y vectoriales

Una consecuencia inmediata de lo anterior, es la definición de la **proyección vectorial** (ortogonal) de un vector $\mathbf{V_1}$ sobre otro $\mathbf{V_2}$, denotada por $\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V_2}}\mathbf{V_1}}$, que es el vector que se obtiene al proyectar una perpendicular desde $\mathbf{V_1}$ sobre $\mathbf{V_2}$, como se observa en la figura:

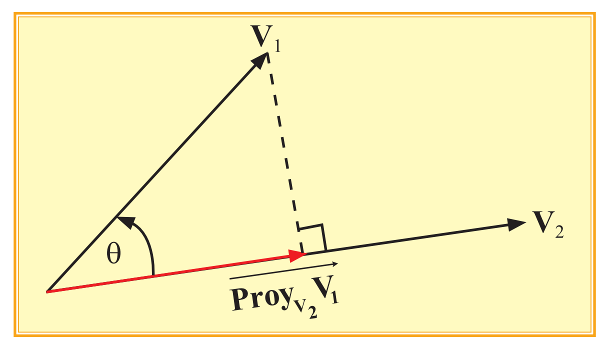


Figura 9.9: Proyección escalar y vectorial de V_1 sobre V_2.

Esta proyección vectorial puede ser obtenida multiplicando un valor escalar por el vector unitario en la dirección de $\mathbf{V_2}$. Este escalar, en valor absoluto, se conoce como la norma de la proyección vectorial: $\|\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1}\|$ y se denomina también **proyección escalar** de $\mathbf{V_1}$ sobre $\mathbf{V_2}$.

De la geometría de triángulos rectángulos, la proyección escalar se puede obtener con:

$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \|\mathbf{V}_1\| \, cos\,(\theta)$; y aplicando el Teorema 9.1 se tiene que:

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2}}{\|\mathbf{V}_2\|}$$

La proyección vectorial de $\mathbf{V_1}$ en la dirección de $\mathbf{V_2}$, se puede obtener con

$$\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1} = \frac{\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2}}{\|\mathbf{V}_2\|^2}\,\mathbf{V}_2$$

Ejemplo 9.17 Producto escalar.

Dados los vectores $\mathbf{V_1} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{V_2} = (-1, 2, 3)$, calcule:

a) $\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2}$

b) $\|\mathbf{V}_1\|$

c) $\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2$

d) $\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2}$

Solución:

a) $\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = (1)(-1) + (0)(2) + (-1)(3)$

$= -1 + 0 - 3$

$\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2} = -4$

b) $\|\mathbf{V}_1\| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2}$

$\|\mathbf{V}_1\| = \sqrt{2}$

c) $\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2 = \dfrac{\mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_1}}{\|\mathbf{V}_1\|}$

$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2 = \dfrac{-4}{\sqrt{2}}$

$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2 = -2\sqrt{2}$

d) $\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2} = \dfrac{\mathbf{V_2} \bullet \mathbf{V_1}}{\|\mathbf{V}_1\|^2}\,\mathbf{V}_1$

$\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2} = -2\sqrt{2}\,\dfrac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2} = (-2, 0, 2)$

Ejemplo 9.18 Vectores en $\mathbb{R}^3$.

Determine el vector $\mathbf{V}$ cuya norma es igual a la proyección escalar del vector $\mathbf{V_1} = (1, 2, 3)$ sobre el vector $\mathbf{V_2} = (1, -1, 2)$ y que es paralelo al vector $\mathbf{V_3} = (2, -1, -2)$.

Solución:

Determinemos la proyección escalar de $\mathbf{V_1}$ sobre $\mathbf{V_2}$:

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{(1, 2, 3) \bullet (1, -1, 2)}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}}$$

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{1 - 2 + 6}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Si denominamos $\mathbf{V}$ al vector cuyas coordenadas queremos encontrar, tenemos que:

$$\|\mathbf{V}\| = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Por condición de paralelismo: $\mathbf{V} \| \mathbf{V_3}$, luego:

$$\mathbf{V} = \mu\mathbf{V}_3$$

$$\|\mathbf{V}\| = \mu\|\mathbf{V}_3\|$$

Reemplazando las normas de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V_3}$:

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} = \mu\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} = \mu\sqrt{9}$$

$$\mu = \frac{5\sqrt{6}}{(6)(3)}$$

$$\mu = \frac{5\sqrt{6}}{18}$$

Luego, el vector $\mathbf{V}$ estaría dado por:

$$\mathbf{V} = \frac{5\sqrt{6}}{18}(2, -1, -2)$$

$$\mathbf{V} = \left(\frac{5\sqrt{6}}{9}, -\frac{5\sqrt{6}}{18}, -\frac{5\sqrt{6}}{9}\right)$$

Comprobación:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6}}{9}\right)^2 + \left(-\frac{5\sqrt{6}}{18}\right)^2 + \left(-\frac{5\sqrt{6}}{9}\right)^2}$$

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\frac{150}{81} + \frac{150}{324} + \frac{150}{81}} = \sqrt{\frac{1350}{324}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{18}\|\mathbf{V}_3\|$$

El lector puede verificar que otra forma de obtener $\mathbf{V}$ es multiplicando $\|\mathbf{V}\|$ por un vector unitario de $\mathbf{V}_3$.

Ejemplo 9.19 Proyecciones escalar y vectorial.

Determine la proyección escalar y vectorial del vector $\mathbf{V}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sobre la dirección del vector $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución:

a) $$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{(2, -1, 3) \bullet (1, -3, -1)}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{2 + 3 - 3}{\sqrt{11}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$$

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1 = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

b) $$\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1} = \frac{(2, -1, 3) \bullet (1, -3, -1)}{(\sqrt{11})^2}(1, -3, -1)$$

$$= \frac{2}{11}(1, -3, -1)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{Proy}_{\mathbf{V}_2}\mathbf{V}_1} = \left(\frac{2}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{2}{11}\right)$$

9.4 Producto vectorial

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dados dos vectores, calcular el producto vectorial entre ellos.
* Demostrar el teorema de la norma del producto vectorial entre vectores.
* Aplicar las propiedades de las operaciones entre vectores respecto al producto vectorial.

Definición 9.10 (Producto vectorial)

Sean los vectores $\mathbf{V_1} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{V_2} = (b_1, b_2, b_3)$, su producto vectorial se denota por $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$ y se define como:

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial también denominado **producto cruz** de dos vectores por su notación, se puede definir en un espacio vectorial en general, y es una magnitud vectorial relacionada con la generación de un vector ortogonal al plano formado por los vectores que intervienen en la operación. Se puede definir el producto cruz como:

$$\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

La definición del producto cruz se obtiene mediante la notación de determinantes:

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Ejemplo 9.20 Producto vectorial.

Encuentre el producto cruz entre $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, si $\mathbf{V_1} = (1, 0, -3)$ y $\mathbf{V_2} = (2, 1, -1)$.

Solución:

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, -5, 1)$$

Sean $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_3}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y λ, β valores escalares, las principales propiedades del producto vectorial son:

$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = -(\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_1})$	**Anticonmutativa**
$\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} + \mathbf{V_3}) = (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) + (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_3})$	**Distributivas**
$(\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3} = (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_3}) + (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$	
$(\lambda\mathbf{V_1}) \times (\beta\mathbf{V_2}) = \lambda\beta(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2})$	**Asociativa escalar**

Cuadro 9.4: Propiedades del producto vectorial.

El vector que resulta del producto cruz es ortogonal al plano que contiene los vectores que se están multiplicando:

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} \perp \mathbf{V_1}, \quad \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} \perp \mathbf{V_2}$$

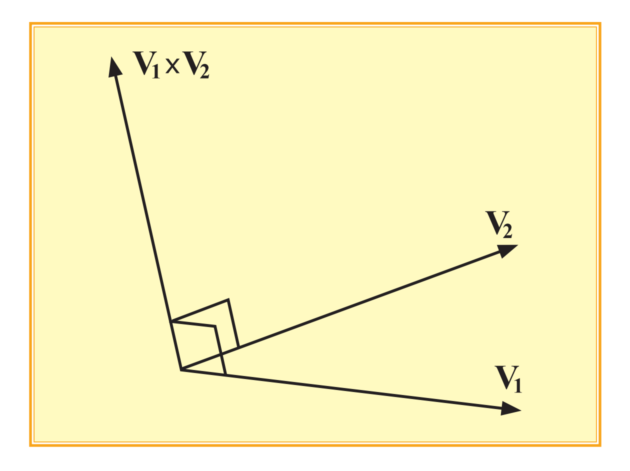


Figura 9.10: Vector $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$ ortogonal a $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$.

Otras propiedades son:

$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ son paralelos
$(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \bullet \mathbf{V_3} = \mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$
$\lVert\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\rVert^2 = \lVert\mathbf{V_1}\rVert^2 \lVert\mathbf{V_2}\rVert^2 - (\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2})^2$

Cuadro 9.5: Otras propiedades del producto vectorial.

A partir de esta última propiedad:

$$\begin{aligned}\lVert\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\rVert^2 &= \lVert\mathbf{V_1}\rVert^2 \lVert\mathbf{V_2}\rVert^2 - (\mathbf{V_1} \bullet \mathbf{V_2})^2\\ &= \lVert\mathbf{V_1}\rVert^2 \lVert\mathbf{V_2}\rVert^2 - \lVert\mathbf{V_1}\rVert^2 \lVert\mathbf{V_2}\rVert^2 \cos^2(\theta)\\ &= \lVert\mathbf{V_1}\rVert^2 \lVert\mathbf{V_2}\rVert^2 (1 - \cos^2(\theta))\\ \lVert\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\rVert^2 &= \lVert\mathbf{V_1}\rVert^2 \lVert\mathbf{V_2}\rVert^2 \, sen^2(\theta)\end{aligned}$$

Extrayendo raíces cuadradas, se obtiene el denominado teorema de la norma del producto cruz, que a continuación se describe.

Teorema 9.3 (Norma del producto cruz)

Si $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ son dos vectores no nulos, y θ la medida del ángulo que forman entre ellos, entonces:

$$\lVert\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\rVert = \lVert\mathbf{V_1}\rVert \, \lVert\mathbf{V_2}\rVert \, sen(\theta); \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Otra propiedad importante del producto cruz, que facilita los cálculos, es la que indica que el producto cruz de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ se puede calcular así:

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{i}$ y a $\mathbf{j}$

$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{j}$ y a $\mathbf{k}$

$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{k}$ y a $\mathbf{i}$

El cual se ilustra como un producto en orden cíclico en el sentido horario:

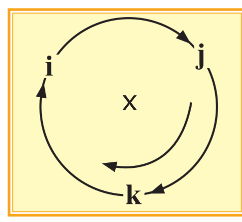


Figura 9.11: Producto cruz de vectores i, j, k.

Así, para el cálculo del producto cruz no hace falta la evaluación del determinante, sino que se multiplica directamente.

Ejemplo 9.21 Producto vectorial.

Encuentre el producto vectorial entre $\mathbf{V_1}= (3, -2, 1)$ y $\mathbf{V_2}= (4, 2, -3)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} &= (3\mathbf{i} -2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})\\ &= 12(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+6(\mathbf{i}\times\mathbf{j})-9(\mathbf{i}\times\mathbf{k})-8(\mathbf{j}\times\mathbf{i})-4(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+6(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+4(\mathbf{k}\times\mathbf{i})\\ &\quad +2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})-3(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\\ &= 6\mathbf{k} + 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k} + 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{i}\\ \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} &= 4\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 14\mathbf{k}\end{aligned}$$

Ejemplo 9.22 Producto vectorial.

Dados los vectores $\mathbf{V_1}= (3,\ 2,\ 5)$, $\mathbf{V_2}= (-3, 1, 3)$ y $\mathbf{V_3}= (-1, 2 ,4)$ calcule:

a) $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$

b) $(\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_1}) \times \mathbf{V_3}$

c) $\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} - \mathbf{V_3})$

Solución:

a) $$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\,(6 - 5) - \mathbf{j}\,(9 +15) + \mathbf{k}\,(3 + 6)$$

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

b) $$\begin{aligned}(\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_1}) \times \mathbf{V_3} &= -(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3}\\ &= -(\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 24 & -9 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\\ &= \mathbf{i}\,(96 + 18) - \mathbf{j}\,(-4 - 9) + \mathbf{k}\,(-2 + 24)\\ (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_1}) \times \mathbf{V_3} &= 114\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 22\mathbf{k}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} - \mathbf{V_3}) &= (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) - (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_3})\\ \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} &= \mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 9\mathbf{k}\\ \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\\ &= \mathbf{i}\,(8 - 10) - \mathbf{j}\,(12 + 5) + \mathbf{k}\,(6 + 2)\\ \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_3} &= -2\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\\ \mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} - \mathbf{V_3}) &= (\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) - (-2\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k})\\ &= (1 + 2)\mathbf{i} + (-24 + 17)\mathbf{j} + (9 - 8)\mathbf{k}\\ \mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} - \mathbf{V_3}) &= 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

9.5 Aplicaciones geométricas del producto vectorial

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Interpretar geométricamente la norma del producto cruz entre dos vectores.
* Calcular el área de la superficie de un triángulo definido por tres puntos no colineales.
* Calcular el volumen de un paralelepípedo definido por cuatro puntos no coplanares.

Área de la superficie de un paralelogramo

La norma del vector $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$ representa el área de la superficie del paralelogramo, cuyos lados adyacentes tienen por longitud $\|\mathbf{V_1}\|$ y $\|\mathbf{V_2}\|$.

Observe que la altura h puede ser calculada con la expresión:

$$h = \|\mathbf{V_1}\|\, sen(\theta)$$

El área de la superficie del paralelogramo es la longitud de la base por la longitud de la altura:

$$A = \|\mathbf{V_2}\|\, h$$

Utilizando el Teorema 9.3 del producto vectorial, se obtiene la expresión:

$$A = \|\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\|$$

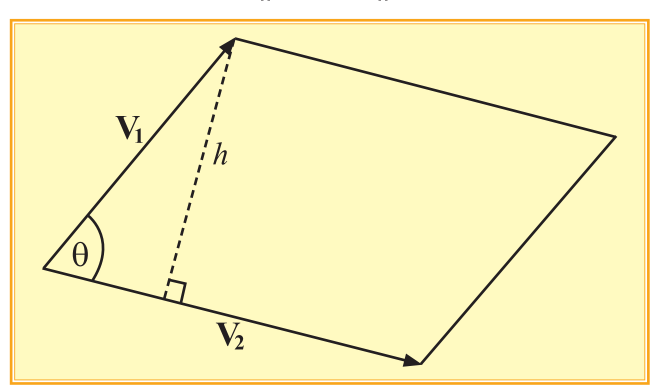


Figura 9.12: Paralelogramo sustentado en V_1 y V_2.

Esto da una buena ilustración geométrica a la norma del producto vectorial. Como caso particular, si $\theta = 0$, $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \mathbf{0}$. Es decir, que el producto vectorial de vectores paralelos es siempre igual al vector cero, puesto que no se forma el paralelogramo.

Ejemplo 9.23 Área de la superficie de un triángulo.

Encuentre el área de la superficie del triángulo **ABC**, cuyos vértices son los puntos: $\mathbf{A}(1, 2, 3)$, $\mathbf{B}(1, 2, 4)$ y $\mathbf{C}(-2, 4, 1)$.

Solución:

Sean $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ los vectores correspondientes a los segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AC}}$, respectivamente.

$\mathbf{V_1} = (0, 0, 1)$

$\mathbf{V_2} = (-3, 2, -2)$

El área de la superficie del triángulo corresponde a la mitad del área de la superficie del paralelogramo.

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2, -3, 0)$$

$$\mathbf{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \, \|\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (0)^2}$$

$$\mathbf{A}_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{13}}{2} \, u^2$$

Ejemplo 9.24 Producto vectorial.

Si los vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ determinan en $\mathbb{R}^3$ un paralelogramo, cuya superficie tiene área $\mathbf{A}$, si entre ellos se define un ángulo de medida θ, y si además $\|\mathbf{V_1}\| = \sqrt{2}$ y $\|\mathbf{V_2}\| = \mathbf{A}\|\mathbf{V_1}\|$, determine la medida de θ en radianes.

Solución:

$A = \|\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}\|$	Área de la superficie del paralelogramo.
$A = \|\mathbf{V_1}\| \, \|\mathbf{V_2}\| \, sen(\theta)$	Definición de norma del producto cruz.
$A = (\sqrt{2})\,(A)\,(\sqrt{2}) sen(\theta)$	Reemplazo de $\|\mathbf{V_1}\|$ y $\|\mathbf{V_2}\|$ según las condiciones del problema.
$A = 2A sen(\theta)$	Multiplicación de ambos miembros por $\frac{1}{\mathbf{A}}$, $\neg(\mathbf{A} = 0)$.
$sen(\theta) = \frac{1}{2}$	Despejamos la medida de θ.

$$\theta = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 9.25 Vectores unitarios.

Determine las coordenadas del vector unitario $\mathbf{V}$ ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución:

Obtenemos en primer lugar un vector ortogonal a los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, realizando el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(6+9) - \mathbf{j}(-2+12) + \mathbf{k}(6+24)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

El vector $\mathbf{V}$ que necesitamos, debe ser paralelo al vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y su norma debe ser 1:

$$\mathbf{V} = \mu(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\|\mathbf{V}\| = \mu\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$$

Reemplazando $\|\mathbf{V}\|$ y $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$, tenemos:

$$1 = \mu\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = \mu\sqrt{1225}$$

$$\mu = \frac{1}{35}$$

De donde $\mathbf{V} = \frac{1}{35}(15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k})$.

$$\mathbf{V} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Verificando:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{36}{49}} = 1 = \frac{1}{35}\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$$

Por otro lado:

$$(\mathbf{V} \bullet \mathbf{A} = 0) \wedge (\mathbf{V} \bullet \mathbf{B} = 0)$$

$$\mathbf{V} \bullet \mathbf{A} = \left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) \bullet (2, -6, -3) = \frac{6}{7} + \frac{12}{7} - \frac{18}{7} = 0$$

$$\mathbf{V} \bullet \mathbf{B} = \left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) \bullet (4, 3, -1) = \frac{12}{7} - \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = 0$$

El lector puede verificar que otra forma de obtener el vector $\mathbf{V}$ es dividiendo $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ para su norma.

Ejemplo 9.26 Área de la superficie de un triángulo.

Si se definen los vectores $\mathbf{A} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}+\mathbf{b}$, siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores tales que $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ y se conoce además que la medida del ángulo comprendido entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es 30°, calcule el área de la superficie del triángulo construido con los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Solución:

El área de la superficie del triángulo, construido con los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, es:

$$\mathbf{A}_{\text{Triángulo}} = \frac{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|}{2} \quad \text{(I)}$$

Por propiedades del producto cruz de vectores:

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})^2 \quad \text{(II)}$$

Evaluando $\|\mathbf{A}\|$ y $\|\mathbf{B}\|$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|^2 &= \mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \bullet (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}) + (3\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) + (3\mathbf{b} \bullet \mathbf{a}) + (9\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}) \\ \|\mathbf{A}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + 6\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + 9\|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\|^2 &= \mathbf{B} \bullet \mathbf{B} \\ &= (3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet (3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (9\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}) + (3\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) + (3\mathbf{b} \bullet \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}) \\ \|\mathbf{B}\|^2 &= 9\|\mathbf{a}\|^2 + 6\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

Debido a que $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$, y reemplazando el producto $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|^2 &= (1)^2 + 6\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos(30^o) + 9(1)^2 \\ &= 1 + 6(1)(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 \\ \|\mathbf{A}\|^2 &= 10 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\|^2 &= 9(1)^2 + 6\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos(30^o) + (1)^2 \\ &= 9 + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \\ \|\mathbf{B}\|^2 &= 10 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} &= (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \bullet (3\mathbf{a} + \mathbf{b})\\
&= 3(\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) + (9\mathbf{b} \bullet \mathbf{a}) + (3\mathbf{b} \bullet \mathbf{b})\\
&= 3\,\|\mathbf{a}\|^2 + 10\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + 3\|\mathbf{b}\|^2\\
&= 3(1)^2 + 10\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,cos(30º) + 3(1)^2\\
&= 3 + 10(1)(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\\
&= 3 + 5\sqrt{3} + 3\\
\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} &= 6 + 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión (II), tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 &= (10 + 3\sqrt{3})\,(10 + 3\sqrt{3}) - (6 + 5\sqrt{3})^2\\
&= (100 + 30\sqrt{3} + 30\sqrt{3} + 27) - (36 + 60\sqrt{3} + 75)\\
&= (127 + 60\sqrt{3}) - (111 + 60\sqrt{3})\\
&= 127 + 60\sqrt{3} - 111 - 60\sqrt{3}\\
\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 &= 16
\end{aligned}$$

Luego, el área de la superficie del triángulo será:

$$\mathbf{A}_\Delta = \frac{\sqrt{16}}{2}$$

$$\mathbf{A}_\Delta = \frac{4}{2}$$

$$\mathbf{A}_\Delta = 2u^2$$

Ejemplo 9.27 Módulo de un vector.

Si se tienen los vectores no paralelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathbb{R}^3$, tales que $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 2$, $\|\mathbf{A}\| = 1$, $\|\mathbf{B}\| = 4$ y $\mathbf{C} = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - 3\mathbf{B}$, determine el módulo de $\mathbf{C}$.

Solución:

Utilizando la definición de norma de **C**, tenemos:

$$\|\mathbf{C}\| = \sqrt{\mathbf{C} \bullet \mathbf{C}}$$
$$\|\mathbf{C}\|^2 = \mathbf{C} \bullet \mathbf{C}$$
$$\|\mathbf{C}\|^2 = [2\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - 3\mathbf{B}] \bullet [2\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - 3\mathbf{B}]$$

Desarrollando el producto, tenemos:

$$\|\mathbf{C}\|^2 = 4(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - 6(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{B} - 6\mathbf{B} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + 9\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}$$

Recordando que los vectores **A** y **B** son perpendiculares a **A** x **B**, resulta:

$$\|\mathbf{C}\|^2 = 4\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 + 9\|\mathbf{B}\|^2$$

Por propiedad del producto cruz:

$$\|\mathbf{C}\|^2 = 4[\|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})^2] + 9\|\mathbf{B}\|^2$$

Reemplazando $\|\mathbf{A}\| = 1$, $\|\mathbf{B}\| = 4$ y $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 2$, se obtiene:

$$\|\mathbf{C}\|^2 = 4[(1)\,(16) - 4] + 9(4)^2$$
$$\|\mathbf{C}\|^2 = 48 + 144$$
$$\|\mathbf{C}\|^2 = 192 = 3(64)$$
$$\|\mathbf{C}\| = 8\sqrt{3}$$

Volumen de un paralelepípedo

Sean $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_3}$ vectores que no están en el mismo plano, el volumen del paralelepípedo que determinan $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_3}$ es igual $|\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})|$.

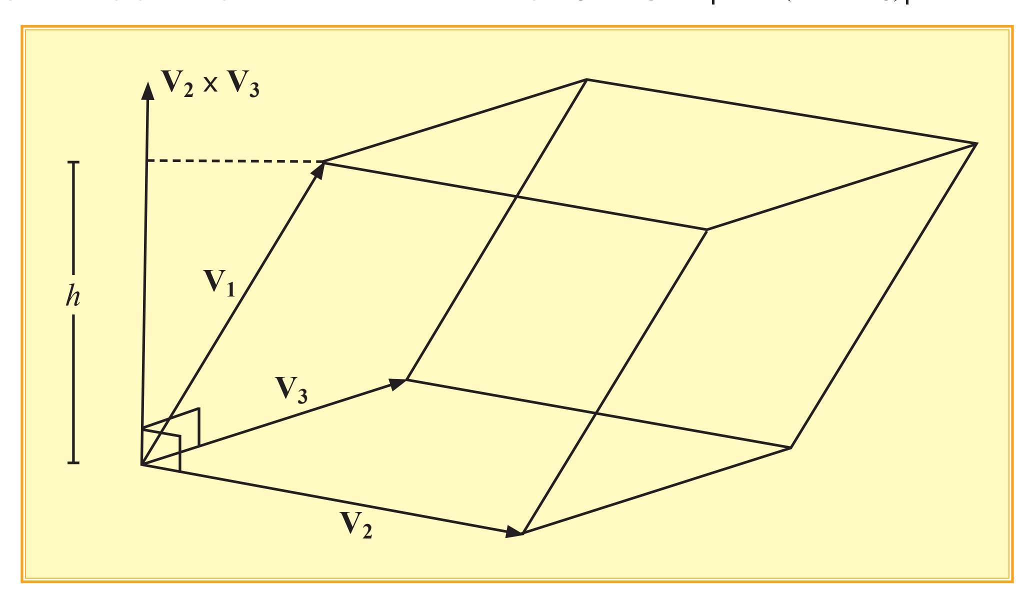


Figura 9.13: Paralelepípedo sustentado en V_1, V_2 y V_3.

Para llegar a esta expresión podemos tomar como base el paralelogramo cuyos lados sean $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_3}$. El área de la superficie del paralelogramo es $\|\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}\|$. Puesto que $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$ es perpendicular a la base, la longitud de la altura es la proyección escalar de $\mathbf{V_1}$ en la dirección del vector $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$.

Con lo cual, h puede ser calculado con:

$$h = \frac{|\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})|}{\|\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}\|}$$

El volumen es el área de la superficie de la base por la longitud de la altura y se llega a la expresión.

$$\text{Volumen} = |\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})|$$

Otras formas para expresar el cálculo de este volumen son:

$$|\mathbf{V_2} \bullet (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_3})|$$

$$|\mathbf{V_3} \bullet (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2})|$$

Es importante notar que la utilización del valor absoluto se hace necesaria, ya que siempre el volumen de un cuerpo debe resultar una cantidad positiva.

El número $\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$, el cual representa el volumen del paralelepípedo cuando le aplicamos el valor absoluto, también se denomina producto mixto de los vectores $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_3}$.

Se puede observar que este producto mixto puede ser desarrollado con el uso de determinantes:

$$\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

siendo $\mathbf{V_1} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{V_2} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{V_3} = (c_1, c_2, c_3)$.

Ejemplo 9.28 Volumen de un paralelepípedo.

Encuentre el volumen del paralelepípedo sustentado en los vectores $\mathbf{V_1} = (1, 2, 4)$, $\mathbf{V_2} = (-1, 0, 3)$ y $\mathbf{V_3} = (-2, 0, 1)$.

Solución:

Volumen $= |\mathbf{V_1} \bullet (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |1(0) - 2(-1+6) + 4(0)|$$

$$= |(-2)(5)|$$

Volumen $= 10\ u^3$

Ejemplo 9.29 Altura de un paralelepípedo.

Determine la longitud de la altura del paralelepípedo sustentado por los vectores $\mathbf{V} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{U} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{W} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, tal que la base del paralelogramo está determinada por los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$.

Solución:

De acuerdo a la definición de la altura, tenemos:

$$h = \frac{|\mathbf{W} \bullet (\mathbf{U} \times \mathbf{V})|}{\|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\|} \qquad \text{(I)}$$

Así calcularemos $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$:

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(1)$$

$$= \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= (1, -1, 1)$$

Luego:

$$\mathbf{W} \bullet (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = (1, 0, 1) \bullet (1, -1, 1)$$

$$= 1 + 1$$

$$\mathbf{W} \bullet (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = 2$$

Finalmente, calculamos:

$$\|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

Reemplazando los resultados anteriores en la expresión (I):

$$h = \frac{|2|}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

9.1 Vectores en el plano y en el espacio

1. Determine el vector $\mathbf{AB}$ para cada par de puntos dado:

a) $\mathbf{A}(2, 1)$; $\mathbf{B}(3, 4)$
b) $\mathbf{A}(-3, 0)$; $\mathbf{B}(10, -5)$
c) $\mathbf{A}(-1, -2)$; $\mathbf{B}(2, 1)$
d) $\mathbf{A}(0, 1)$; $\mathbf{B}(0, 4)$
e) $\mathbf{A}(2, 0)$; $\mathbf{B}(-7, 0)$
f) $\mathbf{A}(1, 1, 0)$; $\mathbf{B}(3, 4, 2)$
g) $\mathbf{A}(0, -3, 4)$; $\mathbf{B}(1, -1, 1)$
h) $\mathbf{A}(3, 2, 3)$; $\mathbf{B}(3, 1, 3)$
i) $\mathbf{A}(0, 1, 0)$; $\mathbf{B}(0, 1, 0)$
j) $\mathbf{A}(8, 0, 0)$; $\mathbf{B}(0, -1, 2)$

2. Determine de ser posible, los valores de a, b para que los siguientes pares de vectores sean iguales:

a) $\mathbf{V}_1 = (2a + b - 1, 3a - b)$; $\mathbf{V}_2 = (2b + 3, 2)$
b) $\mathbf{V}_1 = (b, 0)$; $\mathbf{V}_2 = (a - 3b + 5, -a - b)$
c) $\mathbf{V}_1 = (-a - b, -a - b + 1)$; $\mathbf{V}_2 = (2, 3)$
d) $\mathbf{V}_1 = (4a + 3b, a + 2b)$; $\mathbf{V}_2 = (3a, -b - 1)$

3. Determine de ser posible, los valores de a, b, c para que los siguientes pares de vectores sean iguales:

a) $\mathbf{V}_1 = (a + b - 3 + c, -2a - b + 2c, 3c)$; $\mathbf{V}_2 = (b + c, 2c, -3)$
b) $\mathbf{V}_1 = (c - 2b + 1, 4a, c)$; $\mathbf{V}_2 = (a - c, -a, 1 - b)$
c) $\mathbf{V}_1 = (10a + 2b - c, -a - b, 1)$; $\mathbf{V}_2 = (b - 2c - 1, 3, b)$
d) $\mathbf{V}_1 = (ab, ac, bc)$; $\mathbf{V}_2 = (2, -b, -c)$

9.2 Operaciones entre vectores

4. Determine los vectores que se obtienen al realizar las operaciones indicadas en cada uno de los siguientes literales. En todos los casos considere los vectores $\mathbf{A} = (2, 1, 1)$; $\mathbf{B} = (-3, 5, 1)$; $\mathbf{C} = (2, -1, 0)$; $\mathbf{D} = (-5, 6, 4)$.

a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 2(\mathbf{C} + \mathbf{D})$
b) $\mathbf{A} + 2\mathbf{C} - 2(\mathbf{C} + \mathbf{A}) - \mathbf{B}$
c) $3(\mathbf{B} - 2(\mathbf{A} - \mathbf{D})) + 3\mathbf{C}$
d) Hallar $\mathbf{X}$ si $3\mathbf{A} - \mathbf{C} + 4(\mathbf{X} + \mathbf{B}) = \mathbf{X} + \mathbf{D}$.
e) Hallar $\mathbf{Y}$ si $\mathbf{Y} + \mathbf{A} - 2(\mathbf{B} + \mathbf{Y}) = 3(2\mathbf{Y} - \mathbf{C} + \mathbf{D})$.

5. Respecto a los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ del ejercicio anterior, determine si el vector $(2, -10, 7)$ es combinación lineal de ellos.

6. Si $\mathbf{V} = (2x, 3, y + 1)$, $\mathbf{W} = (x^2 + 1, z, 2y)$ y $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, entonces $\mathbf{V} + \mathbf{W} = 2(2, 3, 2)$.

a) Verdadero
b) Falso

7. Los vectores $\mathbf{V}_1 = (-3, 2, 4)$ y $\mathbf{V}_2 = (3/2, -1, -2)$ son paralelos.

a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

8. Determine de ser posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que los siguientes pares de vectores sean paralelos:

a) $\mathbf{P} = (k, 2, k)$; $\mathbf{Q} = (2, -1, 2)$
b) $\mathbf{A} = (k, 1, -1)$; $\mathbf{B} = (3, 1, 4)$

9. Determine la medida del ángulo formado por los siguientes vectores:

a) $\mathbf{A} = (1, 1, 5)$; $\mathbf{B} = (3, 2, -3)$
b) $\mathbf{C} = (2, 10, -2)$; $\mathbf{D} = (2, 2, 1)$
c) $\mathbf{E} = (-2, -10, 2)$; $\mathbf{F} = (2, 2, 1)$
d) $\mathbf{P} = (0, 0, 1)$; $\mathbf{Q} = (1, 0, 1)$
e) $\mathbf{R} = (1, 0, 0)$; $\mathbf{S} = (0, 1, 0)$

10. Los vectores $\mathbf{V}_1 = (10, 2, -1)$ y $\mathbf{V}_2 = (2, -8, 4)$ son ortogonales.

a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

11. Determine de ser posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que los siguientes pares de vectores sean ortogonales:

a) $\mathbf{A} = (4, 2k, 5)$; $\mathbf{B} = (3k, -10, 1)$
b) $\mathbf{P} = (5k + 1, k - 1, 0)$; $\mathbf{Q} = (1, k, 4)$

12. Los vectores $\mathbf{V} = (4, 2, t)$ y $\mathbf{W} = (-1, 1, 2)$ son ortogonales si y sólo si $t = 2$.

a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

13. El valor de $x \in \mathbb{R}$, para que los vectores $\mathbf{V}_1 = (1, 2, x)$ y $\mathbf{V}_2 = (3, -1, -2)$ sean ortogonales, es:
a) $-1/2$　　b) $1/2$　　c) 1　　d) -1　　e) 0

14. Sean $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ dos vectores ortogonales diferentes del vector cero y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine de ser posible, el valor de λ para que los vectores $\mathbf{U} = \mathbf{V}_1 + \lambda \mathbf{V}_2$ y $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ también sean ortogonales.

15. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3, [\|\mathbf{X}+\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|]$
a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

16. $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3\ \forall k \in \mathbb{R}, [\|k\mathbf{X}\| = k\|\mathbf{X}\|]$
a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

17. $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, [\|\mathbf{X}\| = \mathbf{X} \bullet \mathbf{X}]$
a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

18. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3, [\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^2 + \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^2 = 4(\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y})]$
a) Verdadero　　　　　　　　b) Falso

9.3 Vectores unitarios

19. Calcular un vector unitario sobre la dirección especificada:

a) $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$ b) $\mathbf{V}_2 = (-1, 3)$ c) $\mathbf{V}_3 = (10, 0)$ d) $\mathbf{V}_4 = (0, -2)$
e) $\mathbf{V}_5 = (2, 0, 1)$ f) $\mathbf{V}_6 = (0, -10, 1)$ g) $\mathbf{V}_7 = (0, 0, 0)$ h) $\mathbf{V}_8 = (0, -2, -2)$

20. Determine $Proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, $\overrightarrow{Proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}}$, si:

a) $\mathbf{u} = (2, 3)$; $\mathbf{v} = (5, -1)$
b) $\mathbf{u} = (-3, 10)$; $\mathbf{v} = (2, 0)$
c) $\mathbf{u} = (1, 8)$; $\mathbf{v} = (0, 3)$
d) $\mathbf{u} = (3, 1, 3)$; $\mathbf{v} = (0, 5, -1)$
e) $\mathbf{u} = (1, -5, 2)$; $\mathbf{v} = (2, 0, 4)$
f) $\mathbf{u} = (7, 1, 3)$; $\mathbf{v} = (4, -3, 2)$

21. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores unitarios, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

a) Verdadero b) Falso

22. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores unitarios y ortogonales, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

a) Verdadero b) Falso

23. La proyección escalar del vector $\mathbf{V} = (4, 2, t)$ sobre $\mathbf{W} = (-1, 1, 2)$ es $\sqrt{6}$, si y sólo si $t = 4$.

a) Verdadero b) Falso

24. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores unitarios y ortogonales, entonces $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ es:

a) 2 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 0 e) $2\sqrt{2}$

25. La proyección escalar del vector $\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ en la dirección del vector $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, es:

a) $-\frac{\sqrt{14}}{7}$ b) $2\frac{\sqrt{11}}{11}$ c) $8\frac{\sqrt{11}}{11}$ d) $4\frac{\sqrt{14}}{7}$ e) $-9\frac{\sqrt{11}}{11}$

9.4 Producto vectorial

26. Determine el producto vectorial entre los siguientes pares de vectores:

a) $\mathbf{A} = (2, 3, 1)$; $\mathbf{B} = (-3, 1, 0)$
b) $\mathbf{C} = (2, 1, -1)$; $\mathbf{D} = (-2, 2, 1)$
c) $\mathbf{E} = (2, 10, -2)$; $\mathbf{F} = (1, 5, -1)$
d) $\mathbf{P} = (0, 0, 1)$; $\mathbf{Q} = (1, 0, 1)$
e) $\mathbf{R} = (1, 0, 0)$; $\mathbf{S} = (0, 1, 0)$

27. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$, $[\|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}\| = \|\mathbf{X}\|\,\|\mathbf{Y}\|\, sen(\theta)]$, donde θ es el ángulo formado por $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

a) Verdadero b) Falso

28. Conociendo que $\mathbf{V}_1 \bullet (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3) = 0$, ¿qué información se puede deducir sobre estos vectores?

29. Si se definen los vectores $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, entonces es VERDAD que:
    a) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son ortogonales
    b) Los extremos de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero.
    c) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{C} \times \mathbf{B}$.
    d) $\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 1$
    e) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ forman un ángulo de medida $\pi/4$.

30. Encuentre un vector unitario y perpendicular a los vectores $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

31. Si se tienen los vectores no paralelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$, tales que $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 5$, $\|\mathbf{C} \times \mathbf{B}\| = \sqrt{2}$ y $\mathbf{A} = 2\mathbf{B} - 3(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, entonces el módulo del vector $\mathbf{A}$ es igual a:

    a) $5\sqrt{2}$ b) 7 c) $7\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $4\sqrt{7}$

9.5 Aplicaciones geométricas del producto vectorial

32. Determine el área de la superficie del paralelogramo definido por los vectores:
    a) $\mathbf{A} = (1, 3, 0)$; $\mathbf{B} = (-2, 1, 5)$
    b) $\mathbf{C} = (1, -1, 6)$; $\mathbf{D} = (-2, 10, 1)$
    c) $\mathbf{E} = (1, -4, -2)$; $\mathbf{F} = (0, 7, 0)$

33. Determine el área de la superficie del triángulo definido por los puntos:
    a) $\mathbf{A}(1, 1, 1)$; $\mathbf{B}(-1, 2, 3)$; $\mathbf{C}(2, 6, 5)$
    b) $\mathbf{A}(1, 4, 3)$; $\mathbf{B}(-2, 2, 2)$; $\mathbf{C}(-1, 6, 5)$
    c) $\mathbf{A}(0, 0, 1)$; $\mathbf{B}(-1, 0, 0)$; $\mathbf{C}(0, 1, 0)$

34. Determine el volumen del paralelepípedo sustentado por los tres vectores dados:
    a) $\mathbf{A} = (0, 2, 1)$; $\mathbf{B} = (3, -6, 2)$; $\mathbf{C} = (1, 0, 3)$
    b) $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$; $\mathbf{B} = (0, -1, 0)$; $\mathbf{C} = (1, 7, 2)$
    c) $\mathbf{A} = (2, 1, 4)$; $\mathbf{B} = (-1, 1, 0)$; $\mathbf{C} = (3, 2, 4)$

35. El volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\mathbf{V}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{V}_2 = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{V}_3 = (1, 1, 1)$ es igual a 3.
    a) Verdadero   b) Falso

36. Dados los puntos $P(a, 2a, 3a)$, $Q(3a, a, -2a)$, $R(-a, a, 2a)$ y $S(2a, 5a, a)$, determine el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PR}$ y $\mathbf{PS}$.

37. Hallar la altura del paralelepípedo sustentado con los puntos $P(2, 1, 3)$, $Q(4, -2, 2)$, $R(1, 1, 3)$ y $S(-4, 0, 2)$, si su base está formada por los puntos P, Q y S.



Capítulo 10
Geometría Analítica

Introducción

La geometría analítica es la rama de las matemáticas que usa el álgebra para describir o analizar figuras geométricas. En un sistema de coordenadas cartesianas, un punto del plano queda determinado por dos números, que son su abscisa y su ordenada, recíprocamente, a un par ordenado de números corresponde un único punto del plano. Consecuentemente, el sistema cartesiano establece una correspondencia biunívoca entre un concepto geométrico, como es un punto del plano; y un concepto algebraico, como es un par ordenado. Esta correspondencia constituye el fundamento de la geometría analítica.

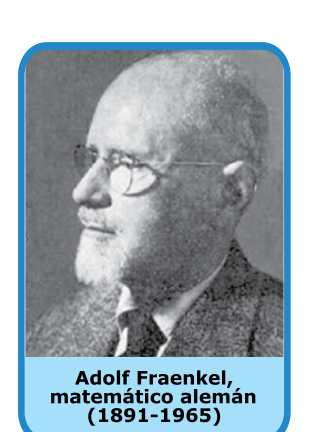
El razonamiento anterior es válido también para un punto en el espacio y una terna ordenada de números.

Lo novedoso de la geometría analítica es que permite representar figuras geométricas mediante ecuaciones del tipo $R(x, y) = 0$, donde R representa una relación. Los problemas de la realidad física que nos rodea sobre el cálculo de distancias u otras mediciones, pueden ser resueltos gracias a la geometría analítica; para el efecto, el sistema de referencia es muy importante y debe ser elegido arbitrariamente siempre y cuando ayude a representar de la forma más sencilla posible las relaciones algebraicas.



Ernst Zermelo, matemático alemán (1871-1953)

En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de dos variables (x, y) de primer grado, por ejemplo: $2x + 6y = 0$; y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de segundo grado de dos variables (x, y), como es el caso de la circunferencia, $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Este hecho no fue visto con nitidez hasta el desarrollo del álgebra moderna y de la lógica matemática, entre finales del siglo XIX y principios



Adolf Fraenkel, matemático alemán (1891-1965)

del siglo XX, cuando a partir de la axiomática propuesta por los matemáticos alemanes Zermelo y Fraenkel, se pudo entender por qué la geometría de los griegos puede desprenderse de sus enunciados y convertirse en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de primer y segundo grado.

10.1 Rectas en el plano

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar los elementos que definen una recta en el plano en forma vectorial, paramétrica, general y de punto-pendiente.
* Dados dos puntos en el plano, calcular la distancia entre ellos y determinar su punto medio.
* Obtener la ecuación de una recta en el plano y graficarla, dadas condiciones sobre los elementos que la definen.
* Identificar condiciones de la pendiente para el paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
* Identificar el ángulo y punto de intersección entre dos rectas secantes.
* Aplicar el teorema de la distancia entre un punto y una recta.

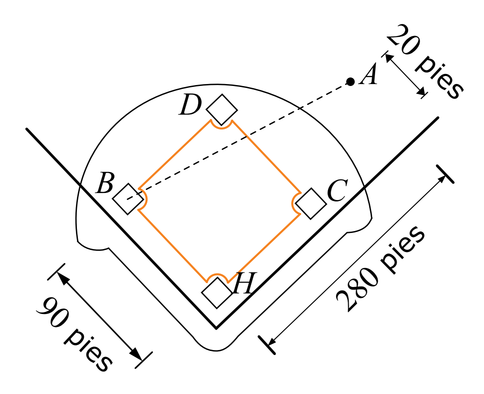
La **recta** es la línea más corta que une dos puntos y constituye el lugar geométrico de los puntos en el plano que están en una misma dirección. Es uno de los entes geométricos fundamentales, junto al punto y el plano. Tal como se ha mencionado en este texto, estos conceptos son considerados primitivos, o sea que no es posible definirlos en base a otros elementos ya conocidos. Sin embargo, es posible elaborar definiciones de ellos, en base a los siguientes postulados característicos, que determinan relaciones entre los entes fundamentales:

1. El punto es el inicio de todo.
2. Existen infinitos puntos e infinitas rectas.
3. Un punto pertenece a infinitas rectas.
4. Dos puntos determinan una única recta en el plano al cual pertenecen.
5. La recta determinada por dos puntos en un plano, pertenece al mismo plano.

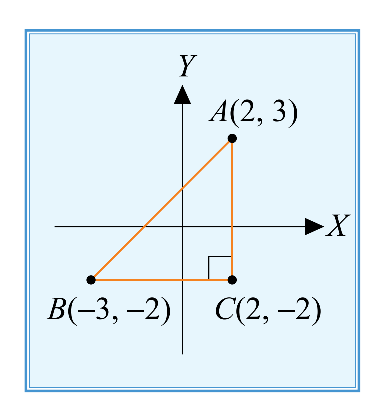
Para continuar con el desarrollo del presente tema, ahora nos proponemos analizar algunos conceptos relevantes.

10.1.1 Distancia entre dos puntos

A partir del concepto de un punto como una pareja ordenada $P(x, y)$, si se conocen las coordenadas de dos puntos, se puede determinar la distancia entre ellos midiendo la longitud del segmento de recta que los une. Por ejemplo, si queremos saber cuánto ha recorrido la pelota lanzada desde el punto A por un jardinero hasta la tercera base (punto B) en una cancha de béisbol (véase la figura), esto será posible si aplicamos el concepto de distancia entre dichos puntos.



A continuación se describe el procedimiento para encontrar la longitud de un segmento que no es paralelo a los ejes coordenados.



Si se desea encontrar $\overline{AB}$, podemos aplicar el siguiente procedimiento.

Sea $\overline{BC}$ un segmento paralelo al eje horizontal y $\overline{AC}$ un segmento paralelo al eje vertical, entonces, $\overline{BC} = |2 - (-3)| = 5$ y $\overline{AC} = |3 - (-2)| = 5$.

Como ABC es un triángulo rectángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

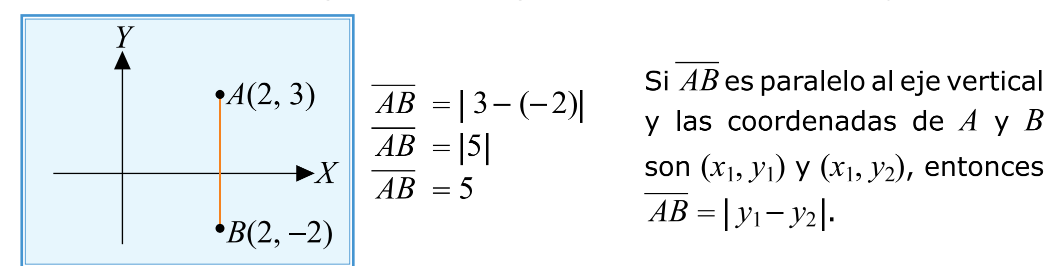
Por lo tanto:

$$\overline{AB}^2 = (5)^2 + (5)^2$$

O bien:

$$\overline{AB} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

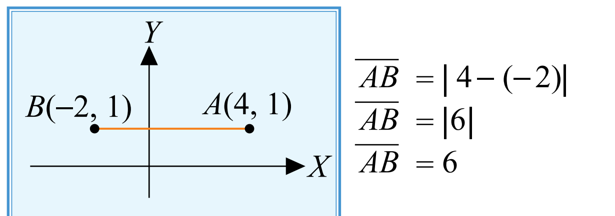
Para determinar la longitud de un segmento que es paralelo al eje vertical:



$$\overline{AB} = |3-(-2)|$$
$$\overline{AB} = |5|$$
$$\overline{AB} = 5$$

Si $\overline{AB}$ es paralelo al eje vertical y las coordenadas de A y B son (x_1, y_1) y (x_1, y_2), entonces $\overline{AB} = |y_1 - y_2|$.

Para determinar la longitud de un segmento que es paralelo al eje horizontal:



$$\overline{AB} = |4-(-2)|$$
$$\overline{AB} = |6|$$
$$\overline{AB} = 6$$

Si $\overline{AB}$ es paralelo al eje horizontal y las coordenadas de A y B son (x_1, y_1) y (x_2, y_1), entonces $\overline{AB} = |x_1 - x_2|$.

Definición 10.1 (Distancia entre dos puntos)

Si A tiene coordenadas (x_1, y_1) y B tiene coordenadas (x_2, y_2), entonces la distancia entre A y B, está dada por: $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

En esta definición, el orden en que se seleccionan los puntos no influye en el valor de la distancia.

Ejemplo 10.1 Distancia entre dos puntos.

Emplee la fórmula de la distancia entre dos puntos para determinar si el ΔABC bosquejado en la figura, es isósceles.

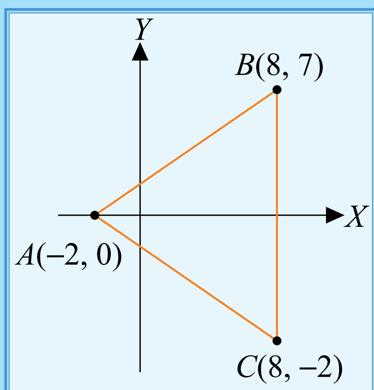
Solución:

Se empieza por determinar las longitudes de los tres lados.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-8)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{149}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{0^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{81}$$

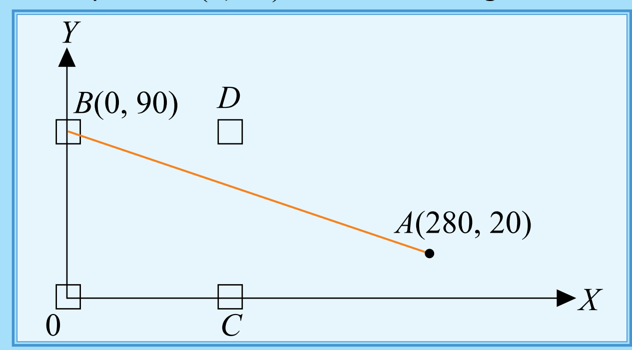
$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-8)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{104}$$



No existen dos lados que tengan la misma longitud, por lo tanto, el ΔABC no es triángulo isósceles.

Ejemplo 10.2 Distancia entre dos puntos.

Volviendo a la pregunta planteada al inicio de esta sección sobre la distancia que recorrió la pelota de béisbol y utilizando un sistema de coordenadas como el de la figura, con origen en *home*, el jardinero está en la posición del punto $A(280, 20)$, mientras que la tercera base se ubica en la posición del punto $B(0, 90)$. Tenemos el siguiente bosquejo.



Solución:

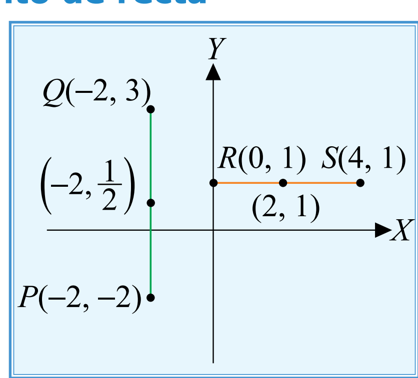
Utilizando la definición de distancia entre A y B, tenemos:

$$d(A, B) = \sqrt{(280-0)^2 + (20-90)^2}$$
$$= \sqrt{(280)^2 + (-70)^2}$$
$$= \sqrt{78400 + 4900}$$
$$= \sqrt{83300}$$
$$d(A, B) = 10\sqrt{833}$$

La pelota recorrió aproximadamente 289 pies.

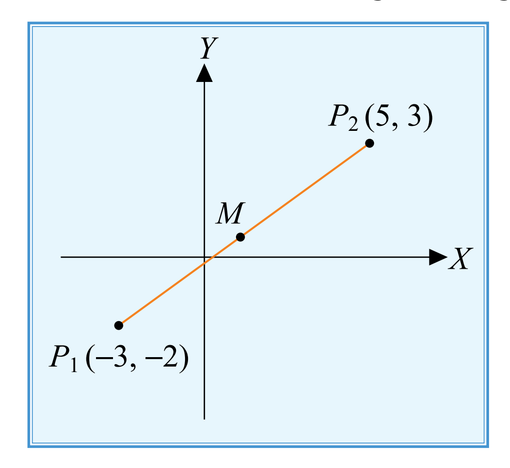
10.1.2 Punto medio de un segmento de recta

En la figura observe que los puntos $(2, 1)$ y $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ equidistan de los extremos de los segmentos a los cuales pertenecen $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente.



Para el segmento horizontal $\overline{RS}$, la abscisa del punto $(2, 1)$ es la semisuma de las abcisas de los extremos y la ordenada se mantiene. Para el segmento vertical $\overline{PQ}$, la ordenada del punto $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ es la semisuma de las ordenadas de los extremos y la abscisa se mantiene.

Este mismo concepto puede aplicarse para otros segmentos de recta. Sean $P_1(x_1, y_1)$ las coordenadas de un extremo y $P_2(x_2, y_2)$ las coordenadas del otro extremo, tal como se muestra en la siguiente figura.



Con $P_1(-3, -2)$ y $P_2(5, 3)$ se verifica que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Es decir, las coordenadas del punto M son $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, el cual equidista de P_1 y de P_2.

A continuación se enunciará y demostrará un teorema con el que se generaliza este resultado.

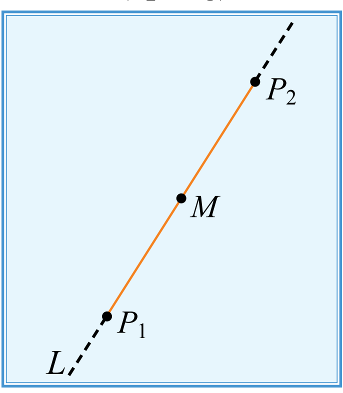
Teorema 10.1 (Punto medio de un segmento de recta)

Si las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{P_1 P_2}$ son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio M de $\overline{P_1 P_2}$ son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Demostración:
Como se analizará en la sección 10.1.3, la ecuación de la recta L que contiene a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$



Debido a que el punto $M(x_0, y_0)$ pertenece a la recta L, tenemos:

$$y_0 - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_0 - x_1)$$

$$\Rightarrow y_0 = \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_0 - x_1)\right] + y_1 \qquad (1)$$

Como $M(x_0, y_0)$ es el punto medio entre P_1 y P_2:

$$d(P_1, M) = d(M, P_2)$$

Aplicando la definición de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}$$

Elevando al cuadrado y transponiendo términos:

$$(x_1 - x_0)^2 - (x_2 - x_0)^2 = (y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2$$

Factorizando:

$$[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_0)]\,[(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)] = [(y_2 - y_0) + (y_1 - y_0)]\,[(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)]$$

Simplificando:

$$[(x_1 + x_2) - 2x_0]\,(x_1 - x_2) = [(y_1 + y_2) - 2y_0]\,(y_2 - y_1)$$

Se reemplaza el valor de y_0 descrito por la ecuación (1), y se obtiene:

$$[(x_1 + x_2) - 2x_0](x_1 - x_2) = \left[(y_1 + y_2) - 2\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_0 - x_1) - 2y_1\right](y_2 - y_1)$$

A continuación se despeja x_0:

$$[2x_0-(x_1+x_2)](x_2-x_1)=\left[(y_1+y_2)-2\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x_0-x_1)-2y_1\right](y_2-y_1)$$

$$[2x_0-(x_1+x_2)](x_2-x_1)^2=[(y_1+y_2)(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)(x_0-x_1)-2y_1(x_2-x_1)](y_2-y_1)$$

$$2x_0(x_2-x_1)^2-(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2=(y_2+y_1)(y_2-y_1)(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)^2(x_0-x_1)-2y_1(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

$$2x_0(x_2-x_1)^2+2(y_2-y_1)^2(x_0-x_1)=[(y_2+y_1)(y_2-y_1)(x_2-x_1)-2y_1(y_2-y_1)(x_2-x_1)]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0(x_2-x_1)^2+2x_0(y_2-y_1)^2-2x_1(y_2-y_1)^2=[(y_2-y_1)(x_2-x_1)(y_2+y_1-2y_1)]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(y_2-y_1)(x_2-x_1)(y_2-y_1)+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2+2x_1(y_2-y_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(y_2-y_1)^2(x_2-x_1)+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2+2x_1(y_2-y_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=[(y_2-y_1)^2(x_2-x_1)+2x_1(y_2-y_1)^2]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=[(y_2-y_1)^2(x_2-x_1+2x_1)]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(y_2-y_1)^2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(x_1+x_2)[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]$$

Simplificando el factor $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]$ de ambos miembros, se tiene: $2x_0=x_1+x_2$.

Luego, $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

Para encontrar y_0 se reemplaza en (1):

$$y_0=\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)\right]+y_1$$

$$y_0=\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x_1+x_2-2x_1}{2}\right)\right]+y_1$$

$$y_0=\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right]+y_1$$

$$y_0=\frac{y_2-y_1}{2}+y_1$$

$$y_0=\frac{y_2-y_1+2y_1}{2}$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad \therefore\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Con esto se demuestra que el punto M equidista de los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$.

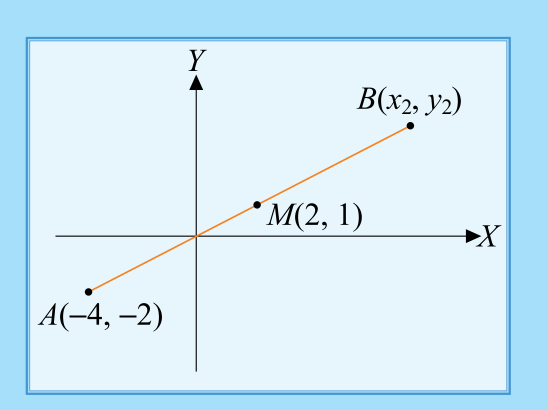
Ejemplo 10.3 Punto medio de un segmento de recta.

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, donde $(-4, -2)$ son las coordenadas de A y $(2, 1)$ son las coordenadas de M, determine las coordenadas de B.

Solución:

Sean (x_2, y_2) las coordenadas de B. Por el teorema 10.1,

$2 = \frac{-4 + x_2}{2}$ y $1 = \frac{-2 + y_2}{2}$.



Despejando se obtiene $x_2 = 8$, $y_2 = 4$. Las coordenadas de B son $(8, 4)$.

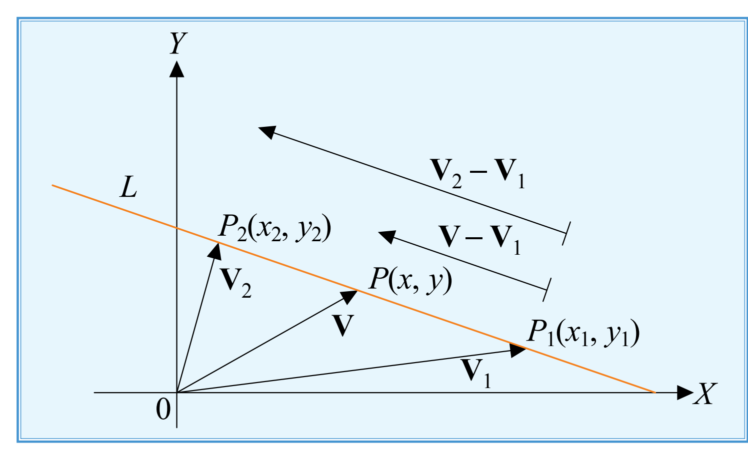
10.1.3 Ecuación de la recta

Si tomamos un sistema de coordenadas en dos dimensiones, a cada punto del plano le corresponden dos números reales o coordenadas x e y. Ocurre además que con cada punto está asociado un vector y solamente uno: aquel que parte del origen y termina en el punto.

En base a los postulados que se mencionaron al inicio de esta sección, una recta se determina completamente por dos puntos distintos, es decir, dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que pertenecen a $\mathbb{R}^2$, existe una sola recta que contiene a ambos.

Apoyándonos en el análisis vectorial, tomaremos un punto arbitrario $P(x, y) \in L$ y su vector asociado respectivo $\mathbf{V} = (x, y)$, para luego establecer la relación necesaria entre dicho punto P con la recta L.

Tomando también la referencia de los puntos $P_1 \in L$ y $P_2 \in L$, construimos los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, que nos servirán para calcular los vectores $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V} - \mathbf{V}_1$.



Con esta construcción vectorial podemos concluir que para que el punto $P(x, y) \in L$, es necesario y suficiente que el vector $\mathbf{V} - \mathbf{V}_1$ sea paralelo al vector $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$:

$$P(x, y) \in L \equiv (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$$

Además, por la definición de vectores paralelos dada en el capítulo anterior:

$$(\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \equiv (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 = \mu\,(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1))$$
$$[\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 = \mu(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)] \equiv [(x - x_1, y - y_1) = \mu\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)]$$

Con lo cual:

$$x - x_1 = \mu\,(x_2 - x_1)$$
$$y - y_1 = \mu\,(y_2 - y_1)$$

El número $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro que caracteriza al punto P, ya que para distintos puntos en el plano, μ toma diferentes valores. De aquí que estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas** de la recta.

Despejando algebraicamente este parámetro μ en las últimas ecuaciones, tenemos que:

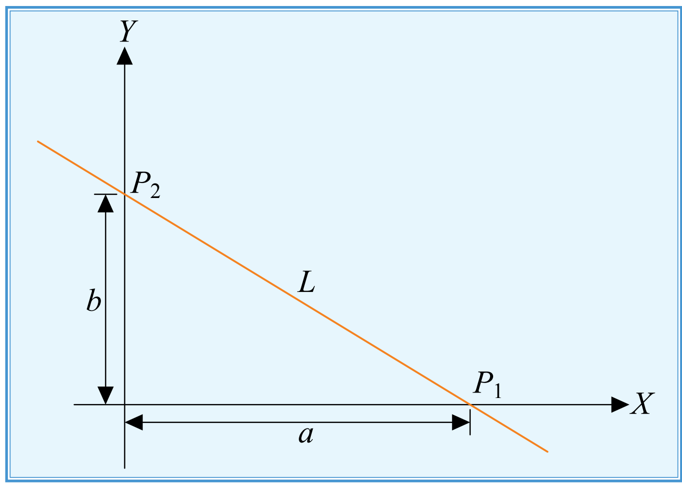
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Numéricamente, esta ecuación tiene sentido cuando $x_2 \neq x_1$ y $y_2 \neq y_1$.

Esta igualdad define una ecuación que describe el conjunto de puntos pertenecientes a la recta L, cuando se conocen las coordenadas de dos puntos que pertenecen a ella, es decir:

$$P(x, y) \in L \equiv \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right)$$

Si se conocen las intersecciones con los ejes coordenados:



Podemos considerar que la recta L contiene a los puntos $P_1(a, 0)$ y $P_2(0, b)$. De esta manera, tenemos que:

$$P(x, y) \in L \equiv \left(\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \right)$$

Esto es:

$$P(x, y) \in L \equiv \left(-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \right)$$

Finalmente:

$$P(x, y) \in L \equiv \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \right)$$

Esta última ecuación se denomina **forma simétrica** de la ecuación de la recta.

En la expresión que se dedujo para la ecuación de la recta: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, los números x_1, y_1, x_2 e y_2 son las coordenadas de los puntos dados P_1 y P_2, por lo tanto, puede transformarse en:

$$P(x, y) \in L \equiv ((y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1))$$
$$P(x, y) \in L \equiv ((y_2 - y_1)\,x - (x_2 - x_1)\,y - (y_2 - y_1)\,x_1 + (x_2 - x_1)\,y_1 = 0)$$

Si reemplazamos:

$$y_2 - y_1 = a$$
$$-(x_2 - x_1) = b$$
$$-(y_2 - y_1)\,x_1 + (x_2 - x_1)\,y_1 = c$$

Podemos escribir:

$$P(x, y) \in L \equiv ax + by + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

La cual representa la **ecuación general** de una recta en el plano.

Ya que: $(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$

Y reemplazando los valores de a y b, se tiene:

$$a(x - x_1) = -b(y - y_1)$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

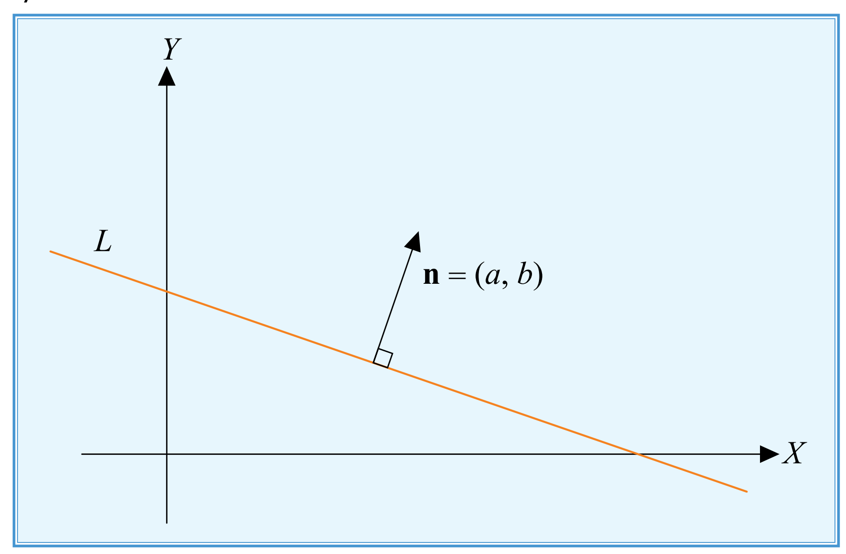
Recordando que $\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 = (x - x_1, y - y_1)$ es un vector paralelo en la dirección de la recta L, y considerando el vector $\mathbf{n} = (a, b)$, puede observarse que la última expresión es:

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1) = 0$$

Esto es:

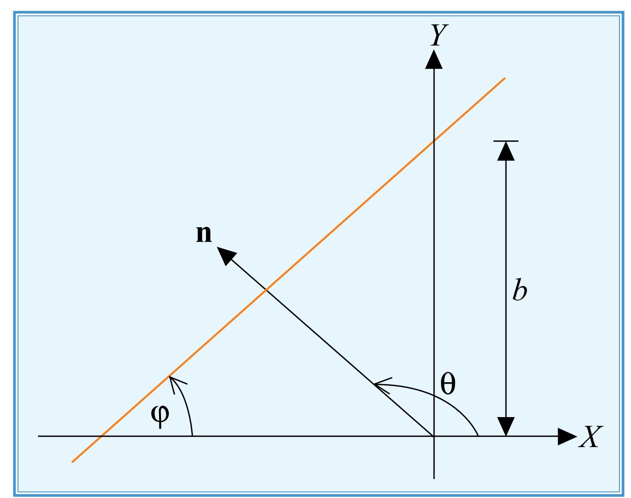
$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1) = 0 \Rightarrow (\mathbf{n} \perp (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1))$$

Con este análisis, podemos concluir que el vector $\mathbf{n} = (a, b)$ es ortogonal a la recta L y se lo denomina **vector normal** a la recta.



Otra forma de definir una recta es conociendo su intersección con el eje Y y la dirección que forma con el semieje X positivo.

Si queremos determinar la ecuación de la recta que interseca el eje Y a una distancia b del origen y forma un ángulo de medida φ con la dirección positiva del eje X, se debe determinar las coordenadas del vector normal unitario $\mathbf{n}$.



El vector $\mathbf{n}$ es normal a la recta, la cual forma un ángulo de medida φ con el eje X. θ es la medida del ángulo que forma $\mathbf{n}$ con el semieje X positivo, cuya medida es $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$. Las coordenadas de este vector son:

$$\mathbf{n} = (cos(\theta), sen(\theta)).$$

Puesto que:

$$cos(\theta) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\,sen(\varphi)$$

$$sen(\theta) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = cos(\varphi)$$

Luego:

$$\mathbf{n} = (-\,sen(\varphi),\, cos(\varphi))$$

De esta manera, la ecuación de la recta L es:

$$(-\,sen(\varphi))x + (cos(\varphi))y + c = 0$$

Para encontrar el valor c, se conoce que $P(0, b) \in L$:

$$-\,(sen(\varphi))(0) + (cos(\varphi))(b) + c = 0$$

Entonces:

$$c = -\,b\;cos(\varphi)$$

Finalmente:

$$(-\,sen(\varphi))x + (cos(\varphi))y - b\;cos(\varphi) = 0$$

Si $cos(\varphi) \neq 0$, podemos dividir por este factor:

$$-\frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)}x + y - b = 0$$

O también:

$$y = \frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)}x + b$$

$$P(x, y) \in L \equiv y = (tan(\varphi))\,x + b$$

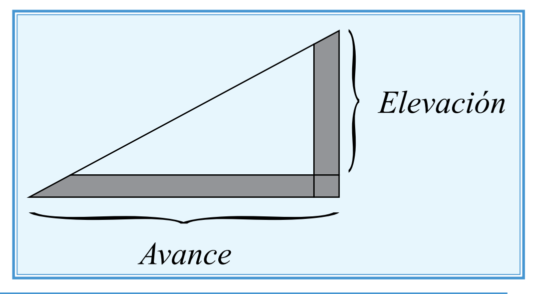
Esta expresión representa la ecuación de una recta, cuando se conoce la medida del ángulo φ que forma con respecto a la dirección positiva del eje X, y que interseca el eje Y a una distancia b del origen.

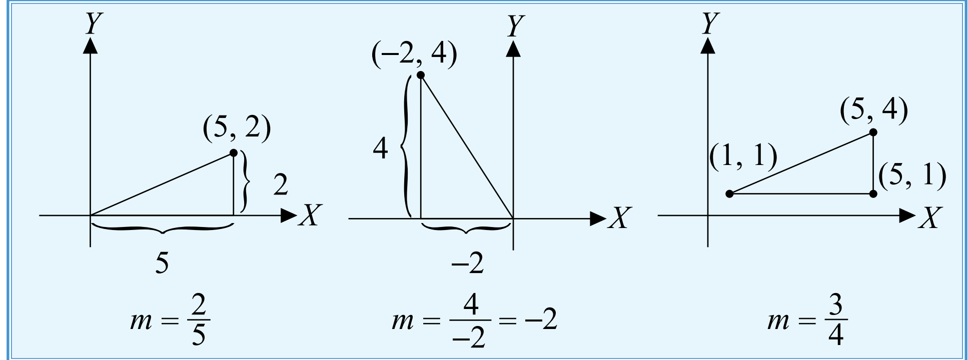
Cuando $tan(\varphi)$ no está definida, la recta es paralela al eje Y y su ecuación es de la forma $x = k$, $k \in \mathbb{R}$.

10.1.4 Pendiente de una recta

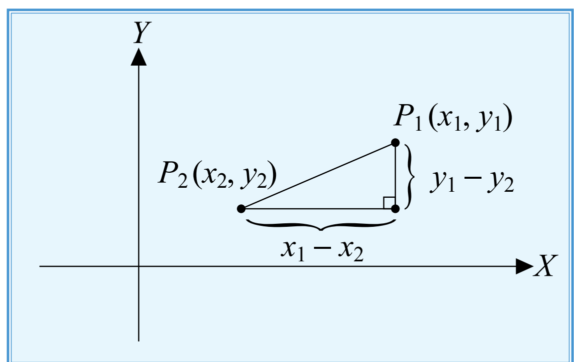
La tangente del ángulo que una recta forma con la dirección positiva del eje X se denomina **pendiente de la recta**, la cual puede denotarse por $m = tan(\varphi)$.

La pendiente de una recta o de un segmento puede considerarse como la razón $\frac{elevación}{avance}$, tal como aparece en la figura.





En general, la pendiente de una recta está determinada por el cambio en la distancia vertical ($y_1 - y_2$), dividida entre el cambio en la distancia horizontal ($x_1 - x_2$).



Definición 10.2 (Pendiente de una recta)

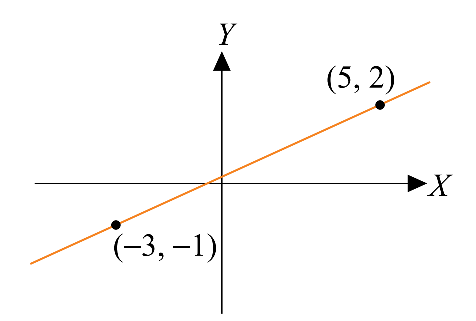
Si P_1 y P_2 tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, entonces la pendiente m de la recta que los contiene es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \text{ si } x_1 - x_2 \neq 0.$$

Si $y_1 = y_2$, su pendiente es cero. Si $x_1 = x_2$, la pendiente de la recta usualmente se denota por el símbolo "∞" y se dice que es infinita; ∞ no es un número, es una forma de decir que no está definida.

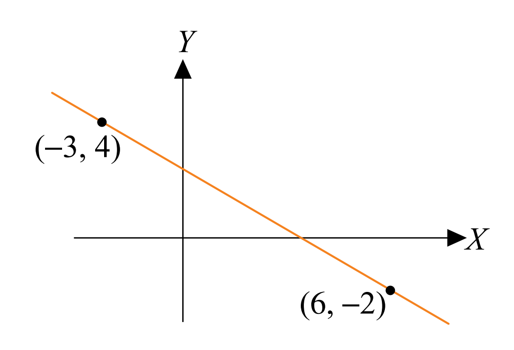
Los ejemplos siguientes muestran que la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa, cero o infinita.

Recta con pendiente positiva



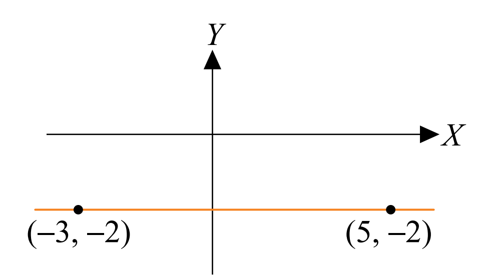
$$m = \frac{2-(-1)}{5-(-3)} = \frac{3}{8}$$

Recta con pendiente negativa



$$m = \frac{4-(-2)}{-3-6} = -\frac{2}{3}$$

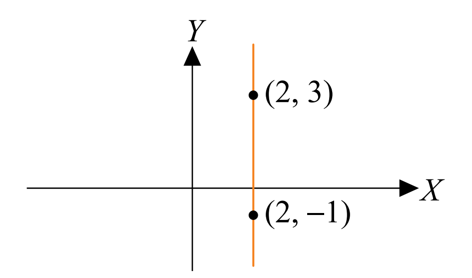
Recta con pendiente cero



$$m = \frac{-2-(-2)}{5-(-3)} = \frac{0}{8} = 0$$

Si es paralela al eje X, $m = 0$.

Recta con pendiente infinita



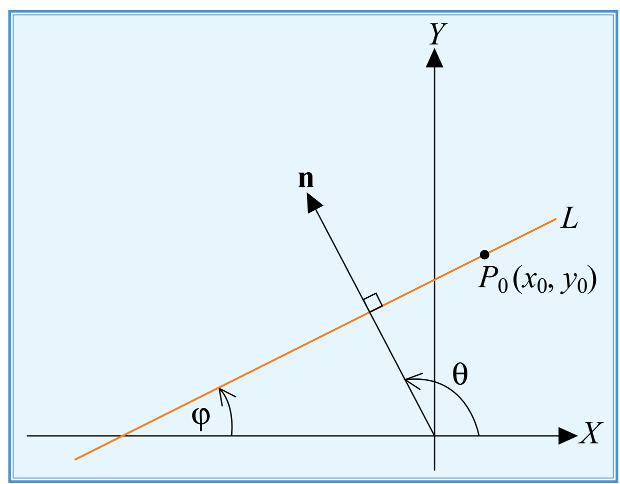
$$m = \frac{3-(-1)}{2-2} = \frac{4}{0}$$

Si es paralela al eje Y, $m = \infty$.

Una recta paralela al eje X se representa de la forma $y = k$, donde k es una constante real. Su interpretación práctica está en el hecho que la variable y no varía si la variable x cambia. Esta situación se presenta, por ejemplo, en un móvil con velocidad constante en el plano Velocidad vs. Tiempo.

Una recta paralela al eje Y, se representa de la forma $x = k$, donde k es una constante real. Su interpretación práctica está en el hecho que la variable x no varía si la variable y cambia. Una situación que refleja este comportamiento es la demanda de combustible en el plano Precio vs. Cantidad.

Para encontrar la ecuación de la recta de pendiente m que contiene al punto $P_0(x_0, y_0)$, partimos de las coordenadas de su vector normal unitario.



$$\mathbf{n} = (-sen(\varphi), cos(\varphi))$$

La ecuación de la recta buscada será del tipo:

$$(-sen(\varphi))x + (cos(\varphi))y + c = 0$$

Si suponemos que $cos(\varphi) \neq 0$, podemos escribir:

$$(-tan(\varphi))x + y + \frac{c}{cos(\varphi)} = 0$$

O también:

$$y = mx + b$$

Y así:

$$b = y_0 - mx_0$$

Finalmente:

$$P(x, y) \in L \equiv y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de la recta **punto-pendiente.**

Cabe recordar que la forma $y = mx + b$ es equivalente a la forma $y = (tan(\varphi))x + b$, obtenida anteriormente, por lo que m es la tangente del ángulo de medida φ que la recta forma con el semieje X positivo.

También es cierto que toda recta en el plano se representa por una ecuación general del tipo $ax + by + c = 0$ y viceversa.

Despejando y se obtiene $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, por lo que $m = -\frac{a}{b}$, cuando $b \neq 0$.

Ejemplo 10.4 Ecuación de una recta.

Determine la ecuación de la recta L que contiene al punto $P_0(4, 2)$ y que es paralela al eje X.

Solución:

Encontraremos la ecuación de la recta L, conociendo un punto que pertenece a ella y su pendiente.

El punto que contiene es $P_0(4, 2)$ y su pendiente será $m = 0$, ya que es paralela al eje X.

Luego, aplicando la forma de la ecuación para L, tenemos:

$P\,(x, y) \in L \equiv y - y_0 = m(x - x_0)$

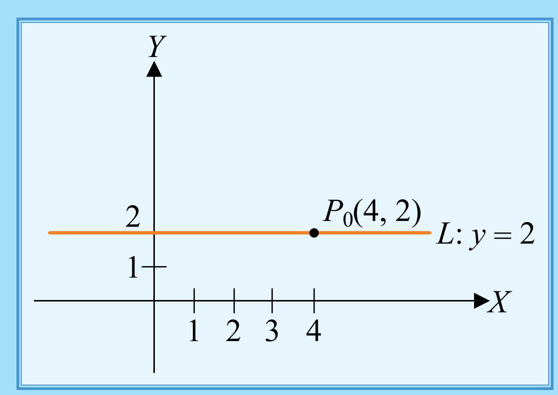
$P_0(4, 2) \in L \equiv y - 2 \;= 0(x - 4)$

La ecuación de la recta L sería:

$L\!: y = 2$

Nótese que todos los puntos cuya ordenada es 2, pertenecen a la recta solicitada.

Veamos la gráfica de L:



Ejemplo 10.5 Ecuación de una recta.

Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $P_0(3, 4)$ y que es paralela al eje Y.

Solución:

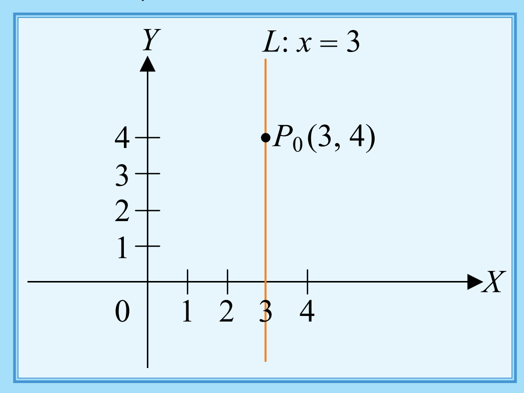
Encontraremos la ecuación de la recta L, conociendo un punto que pertenece a ella y su pendiente.

El punto que contiene es $P_0(3, 4)$, y su pendiente $m = \infty$; ya que es paralela al eje Y.

La ecuación de la recta L solicitada será:

$P(x, y) \in L \equiv (x = 3)$

Analizando la gráfica de L, tenemos:



Nótese que todos los puntos cuya abscisa es 3, pertenecen a la recta solicitada.

Ejemplo 10.6 Pendiente e intersecciones de una recta.

Determine el valor de la pendiente y las intersecciones con los ejes coordenados, de la recta cuya ecuación es: $3x + 2y = 6$.

Solución:

Para obtener el valor de la pendiente de la recta, comparamos esta ecuación con la de una recta cuando se conoce un punto que pertenece a ella y su pendiente; así:

$P(x, y) \in L \equiv (y - y_0) = m(x - x_0)$

Despejando y de la ecuación dada:

$2y = 6 - 3x$

$y = 3 - \frac{3}{2}x$

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

Luego, su pendiente $m = -\frac{3}{2}$.

Ahora determinamos las intersecciones con los ejes:

- Con el eje X:

La intersección con el eje X ocurrirá cuando $y = 0$, así:

$0 = -\frac{3}{2}x + 3$

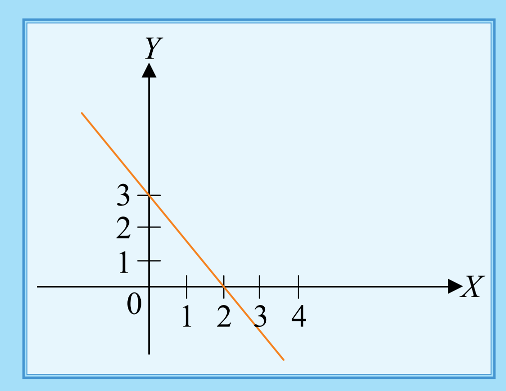
$-\frac{3}{2}x = -3 \qquad \therefore\ x = 2$

- Con el eje Y

La intersección con el eje Y ocurrirá cuando $x = 0$, así:

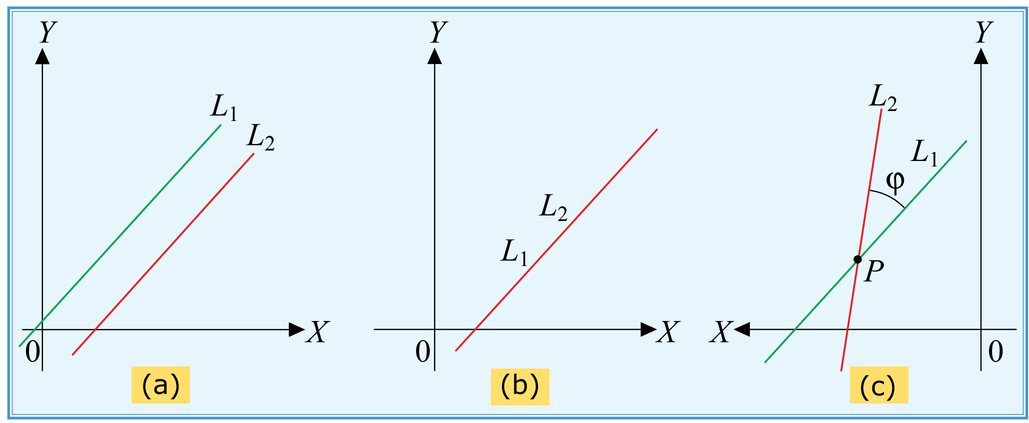
$y = -\frac{3}{2}(0) + 3 \qquad \therefore\ y = 3$

Por lo tanto, la recta cuya ecuación se solicita tendrá por pendiente el valor de $-\frac{3}{2}$, y sus intersecciones con los ejes estarán dadas por los puntos $P_1(2, 0)$ y $P_2(0, 3)$, tal como se puede observar en su gráfica:



Nótese que la ecuación de la recta puede ser expresada así: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, la cual se indicó que constituye su forma simétrica, en donde los denominadores de las fracciones que contienen x, y, representan las intersecciones con los ejes coordenados.

Si al mismo tiempo consideramos dos rectas en el plano, solamente una de las siguientes situaciones ha de ocurrir:



En el caso (a) las rectas L_1 y L_2 se conocen como **paralelas**; el caso (b) presenta rectas L_1 y L_2, que son **coincidentes**; el caso (c) presenta rectas L_1 y L_2, **secantes**.

Ahora queremos determinar en cada caso, qué relaciones hay entre los coeficientes de las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2.

$P(x, y) \in L_1 \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1 = 0)$
$P(x, y) \in L_2 \equiv (a_2 x + b_2 y + c_2 = 0)$

Empecemos por el caso (a); si $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ es el vector normal a L_1 y $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$, el vector normal a L_2 y además sabemos que si $L_1 \parallel L_2$, se debe cumplir que $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$:

$$(\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2) \equiv (\mathbf{n}_1 = \mu \mathbf{n}_2)$$

Es decir:

$$(a_1 = \mu a_2) \wedge (b_1 = \mu b_2)$$

En otras palabras, dos rectas L_1 y L_2 son paralelas, si y sólo si los coeficientes de las variables x, y, en sus ecuaciones algebraicas, son respectivamente proporcionales:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \mu$$

Con esto se deduce que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, y por tanto, $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$.

De la ecuación general de una recta se sabe que m es igual a $-\frac{a}{b}$. Por lo tanto, se demuestra que $m_1 = m_2$, es decir, que las pendientes de dos rectas paralelas son iguales.

Si, a más de esto, se cumple que:

$$\frac{c_1}{c_2} = \mu$$

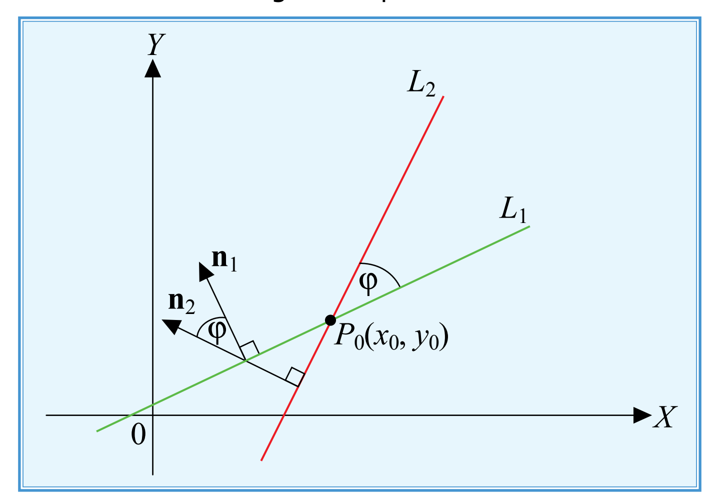
tendremos el caso (b), y ambas rectas serán coincidentes, es decir, describirán la misma recta.

Teorema 10.2 (Pendiente de rectas paralelas)

Las pendientes de dos rectas paralelas entre sí tienen el mismo valor.

En el caso (c) se dan algunas situaciones de interés, como el ángulo que forman las dos rectas al intersecarse y el punto en el que se intersecan.

La medida del ángulo φ, formado por las rectas L_1 y L_2 (o su suplemento), puede calcularse mediante el siguiente procedimiento:



En primer lugar, conviene observar que los vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ deben formar entre sí el mismo ángulo de medida φ (o su suplemento), si $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$:

$$\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = \|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\| \, cos(\varphi)$$

$$cos(\varphi) = \frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|}\right)$$

Las coordenadas del punto de intersección $P_0(x_0, y_0)$ de las rectas L_1 y L_2 se obtienen construyendo el siguiente S.E.L.:

$$((P_0(x_0, y_0) \in L_1) \wedge ((P_0(x_0, y_0) \in L_2) \equiv \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

El problema geométrico de determinar el punto de intersección de L_1 y L_2 es equivalente al problema algebraico de encontrar las soluciones del S.E.L.

Para el caso de rectas secantes, el sistema es consistente y tendrá como solución única el par ordenado (x_0, y_0).

En el caso de dos rectas paralelas no coincidentes, el sistema es inconsistente, y para el caso de rectas coincidentes, el sistema es consistente pero tendrá infinitas soluciones.

Cuando las rectas son secantes, puede ocurrir que $L_1 \perp L_2$, en este caso determinaremos la relación que existe entre las pendientes m_1 y m_2.

$$P(x, y) \in L_1 \equiv (y = m_1 x + b_1) \equiv (m_1 x - y + b_1 = 0)$$
$$P(x, y) \in L_2 \equiv (y = m_2 x + b_2) \equiv (m_2 x - y + b_2 = 0)$$

L_1 tiene el vector normal $\mathbf{n}_1 = (m_1, -1)$.

L_2 en cambio, tiene $\mathbf{n}_2 = (m_2, -1)$.

Por condición, $L_1 \perp L_2$, y así:

$$(L_1 \perp L_2) \Rightarrow (\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2) \Rightarrow (\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = 0)$$
$$m_1 m_2 + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Teorema 10.3 (Pendiente de rectas perpendiculares)

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares entre sí es -1.

Ejemplo 10.7 Rectas en el plano.

Sean las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : 2x - y + 3 = 0$$
$$L_2 : x + 2y - 2 = 0$$

Determine la medida del ángulo de intersección de las rectas L_1 y L_2 y las coordenadas del punto de intersección.

Solución:

El vector normal a la recta L_1 es $\mathbf{n}_1 = (2, -1)$, y el normal a la recta L_2 es $\mathbf{n}_2 = (1, 2)$

$$cos(\varphi) = \frac{(\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2)}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|} = 0$$

Puesto que $cos(\varphi) = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, a fin de encontrar las coordenadas del punto $P_0(x_0, y_0)$, resolvamos el S.E.L.:

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 3 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema se puede concluir que $y_0 = 2x_0 + 3$. Utilizando esta información en la segunda ecuación.

$$x_0 + 2(2x_0 + 3) - 2 = 0$$

Es decir:

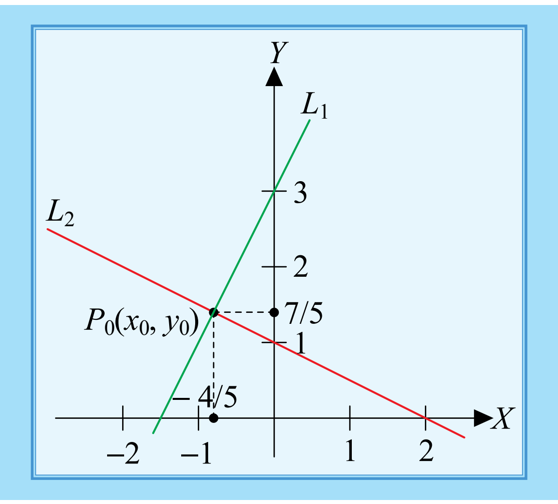
$$5x_0 = -4 \Rightarrow x_0 = -\frac{4}{5}$$

De esta manera:

$$y_0 = 2\left(-\frac{4}{5}\right) + 3 = \frac{7}{5}$$

Finalmente:

$$P_0\left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

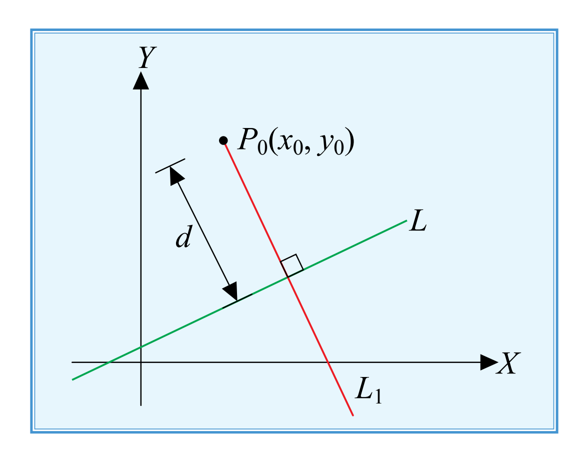


10.1.5 Distancia de un punto a una recta

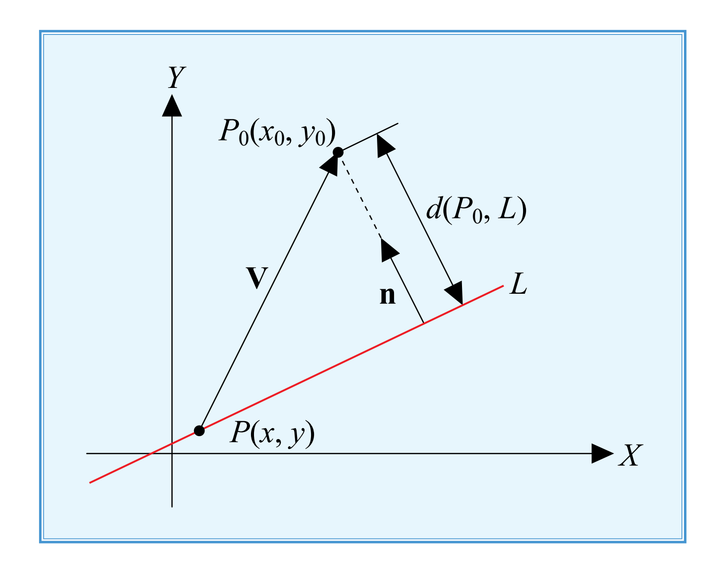
Supongamos que $\neg(P_0(x_0, y_0) \in L)$, en donde $(P(x, y) \in L) \equiv (ax + by + c = 0)$, nos proponemos encontrar la mínima distancia del punto P_0 a la recta L, denotada por $d(P_0, L)$.

Conviene recalcar que la distancia $d(P_0, L)$ siempre es positiva. Además, esta distancia se mide perpendicularmente a la recta.

Una opción para resolver este problema sería construir una recta perpendicular L_1 a la dada que contenga el punto $P_0(x_0, y_0)$, y calcular el punto de intersección con la recta. La distancia buscada se encontraría como la distancia entre los puntos P_0 y el punto de intersección de ambas rectas. No es difícil imaginar que este procedimiento no es muy eficiente.



Otra opción para el cálculo de esta distancia, respaldada en el análisis vectorial, sería construir un vector normal $\mathbf{n}$, a la recta L. Desde un punto perteneciente a L, se construye el vector caracterizado por el recorrido $\mathbf{V} = \overrightarrow{PP_0}$. La distancia buscada será el valor absoluto de la proyección escalar del vector $\mathbf{V}$ sobre el vector $\mathbf{n}$.



Siendo el vector $\mathbf{V} = (x_0 - x, y_0 - y)$ y $\mathbf{n} = (a, b)$.

La proyección escalar de $\mathbf{V}$ sobre el vector $\mathbf{n}$ está dada por:

$$\mathbf{Proy_n V} = \frac{\mathbf{V} \bullet \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

$$= \frac{(x_0 - x, y_0 - y) \bullet (a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{ax_0 + by_0 - (ax + by)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\mathbf{Proy_n V} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como la distancia $d(P_0, L)$ siempre es positiva:

$$d(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ejemplo 10.8 Distancia de un punto a una recta.

Determine la distancia del punto $P_0(-2, 1)$ a la recta L, cuya ecuación es $2x - 3y + 2 = 0$.

Solución:

La distancia de P_0 a L, se calcula con:

$$d(P_0, L) = \frac{|(2)(-2) + (-3)(1) + 2|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{|-4 - 3 + 2|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$d(P_0, L) = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

El punto P_0 se encuentra a $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ unidades de la recta L.

Ejemplo 10.9 Distancia de un punto a una recta.

Si las rectas $L_1: -x + y - 1 = 0$ y $L_2: 2x - 2y + k = 0$ distan entre sí $\sqrt{2}$ unidades, determine el producto de los valores de k.

Solución:

Como se puede concluir a partir de las ecuaciones de ambas rectas L_1, L_2, estas resultan paralelas, y para determinar la distancia entre ellas localizaremos primero un punto que pertenece a L_1, así:

$L_1: -x + y - 1 = 0$

Tomamos $x = 1$, con lo que evaluando en L_1 tenemos $y = 2$, obteniendo el punto $P_0(1, 2) \in L_1$.

Luego determinaremos la distancia desde este punto P_0 hasta la recta L_2, de acuerdo con la expresión:

$$d(P_0, L_2) = \frac{|(2)(1) + (-2)(2) + k|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2}}$$

$$d(P_0, L_2) = \frac{|2 - 4 + k|}{\sqrt{8}}$$

Puesto que la distancia $d(P_0, L_2)$ debe ser $\sqrt{2}$, según condición del problema, tenemos:

$$\frac{|2 - 4 + k|}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$|-2 + k| = \sqrt{16}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{16}$$

De donde:

$$k_1 = 2 + 4 \quad \wedge \quad k_2 = 2 - 4$$

Por lo tanto,

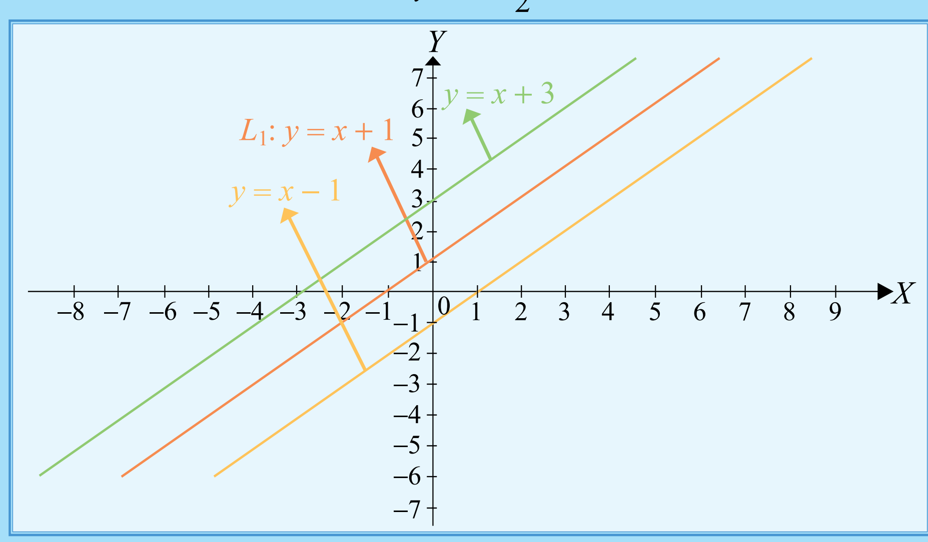
$$k_1 = 6 \quad \wedge \quad k_2 = -2$$

Y el producto de los valores de k es:

$$k_1 k_2 = (6)(-2) = -12$$

A partir de los valores de k, la gráfica de L_1 y las posibilidades para la recta L_2 serían:

$$y = x + \frac{k}{2}$$



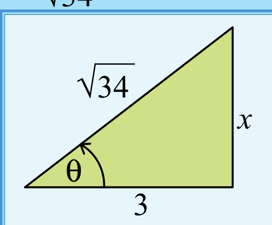
Ejemplo 10.10 Ecuación de una recta.

Determine la ecuación de la recta L que contiene al punto $P_0\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y que forma un ángulo de medida θ con el semieje X positivo, tal que $cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Solución:

Para determinar la ecuación de la recta L solicitada, debemos contar con un punto que pertenece a ella y su pendiente. El punto es conocido: $P_0\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

El valor de la pendiente de la recta, es la medida de la tangente del ángulo de medida θ; para encontrar su valor construimos un triángulo rectángulo tal que $cos\,(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$, así:



Luego, $x = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 9} = \sqrt{25} = 5$.

De donde $tan\,(\theta) = \frac{5}{3}$, valor que representa la pendiente de la recta L, con lo cual su ecuación sería:

$$y - \frac{1}{4} = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{5}{3}x - \frac{15}{12}$$

$$12y - 3 = 20x - 15$$

$$20x - 12y - 12 = 0$$

$$L: 5x - 3y - 3 = 0$$

10.2 Secciones cónicas

Objetivos

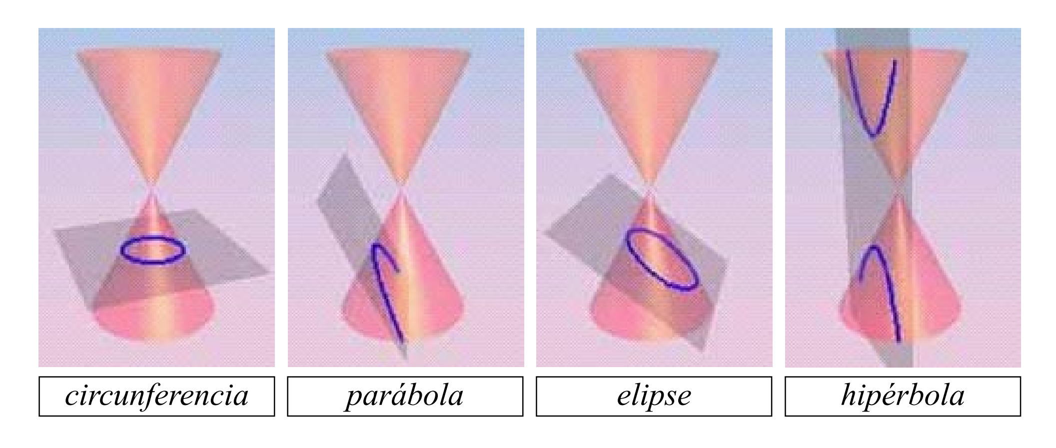
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar el origen de las cónicas.
* Dada una ecuación general cuadrática, identificar la cónica que representa, en caso de que ésta exista, justificando cada uno de sus elementos.
* Obtener la ecuación en forma canónica de una cónica.
* Representar una cónica en el plano y ubicar sus elementos, a partir de su ecuación canónica.
* Resolver elementos geométricos empleando relaciones cónicas.
* Reconocer el lugar geométrico de una, cónica, dada su definición o empleando relaciones entre números complejos.
* Resolver sistemas de inecuaciones empleando relaciones cónicas.

En el libro "*Cónicas*", de Apolonio de Perga, se estudian las figuras que pueden obtenerse al intersecar un bicono con diversos planos. Previo a este trabajo, existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas, según el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso.

Si bien no disponía de la geometría analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las mismas que se aproxima mucho a aquella. Los resultados obtenidos por él fueron los únicos que existieron hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron el problema, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone.

Las figuras que se van a estudiar son la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, pues todas ellas se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.



circunferencia | *parábola* | *elipse* | *hipérbola*

La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:

La trayectoria que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, se puede considerar una parábola. Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad, la curva que describe el móvil (si se ignora el rozamiento del aire), es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.

La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.

En el Sistema de Navegación de Largo Alcance (LORAN por sus siglas en inglés), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar. Aunque un barco reciba siempre las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una

de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola, cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio.

10.2.1 Circunferencia

Definición 10.3 (Circunferencia)

Conjunto de puntos en el plano cartesiano que se encuentran a una distancia fija r, de un punto fijo $O(h, k)$. La distancia fija r es denominada longitud del *radio* y el punto fijo $O(h, k)$ es el *centro* de la circunferencia.

Y
P(x, y)
r
O(h, k)
X

Circunferencia $= \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(O, P) = r\}$

Forma canónica de la ecuación de una circunferencia

Considérese la circunferencia centrada en $O(h, k)$ y de longitud de radio r. La condición para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la misma es:

$$d(O, P) = r$$

Es decir:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{(a)}$$

Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas $(0, 0)$, la **forma canónica** de la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma general de la ecuación de una circunferencia

Desarrollando la expresión (a), se obtiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Considerando que los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales, se los puede agrupar con un factor común A y obtener:

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0;\ A,D,E,F \in \mathbb{R};\ \neg(A = 0)$$

En la cual se ha denominado $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

De aquí se deduce que, una condición necesaria para que una ecuación cuadrática represente una circunferencia, es que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales.

Ejemplo 10.11 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación general de la circunferencia centrada en el punto $O(5, -2)$ y cuya longitud del radio es 3.

Solución:

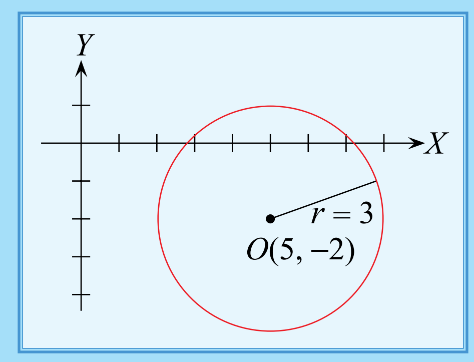
La distancia de $P(x, y)$ al punto $O(5, -2)$ es $r = 3$.

Para que el punto pertenezca a la circunferencia, se ha de verificar:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$$



Ejemplo 10.12 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación general de la circunferencia de centro $O(1, 1)$ y que contiene al punto $P(-2, 3)$.

Solución:

La longitud del radio será calculada con la fórmula de distancia entre los dos puntos dados:

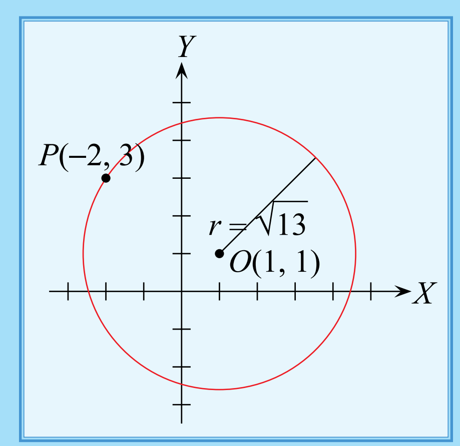
$$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

Así, la ecuación de la circunferencia es:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{13})^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 13$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$



Ejemplo 10.13 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto $O(3, 4)$ y es tangente a la recta $x - 2y + 3 = 0$.

Solución:

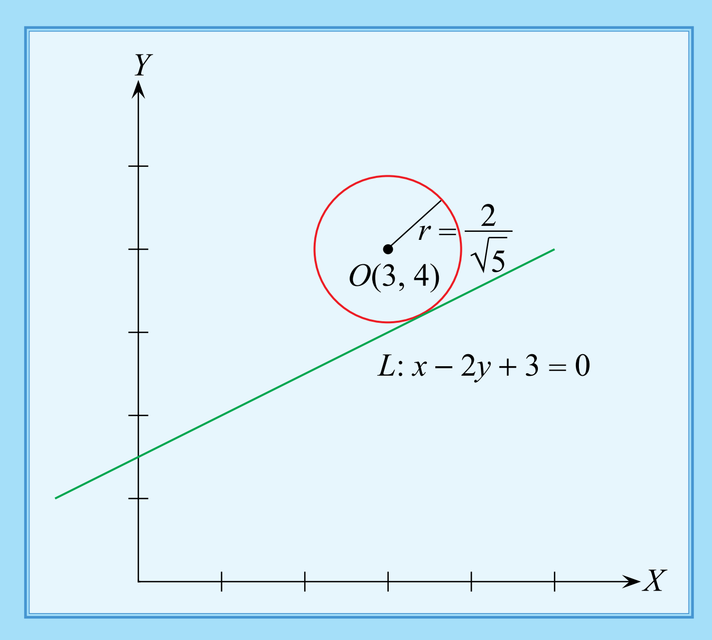
La longitud del radio es la distancia desde el centro de la circunferencia a la recta tangente especificada:

$$r = d(O, L)$$

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{|(1)(3) - (2)(4) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (2/\sqrt{5})^2$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4/5$
$5x^2 + 5y^2 - 30x - 40y + 121 = 0$



Ejemplo 10.14 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $(3, 2)$, $(2, 4)$ y $(-1, 1)$.

Solución:

La ecuación de una circunferencia tiene la forma $A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$, la cual puede ser representada también por: $x^2+y^2+D'x+E'y+F'=0$.

Para que dicha circunferencia contenga a todos los puntos dados, estos han de verificar la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}(3, 2)\ : 3^2+2^2+3D'+2E'+F' = 0 \Rightarrow 3D'+2E'+F' = -13\\ (2, 4)\ : 2^2+4^2+2D'+4E'+F' = 0 \Rightarrow 2D'+4E'+F' = -20\\ (-1, 1): (-1)^2+1^2-D'+E'+F' = 0 \Rightarrow -D'+E'+F' = -2\end{array}\right\}$$

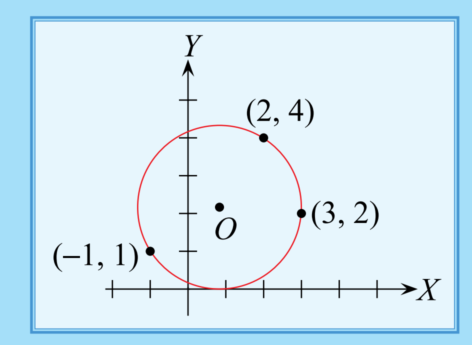
Resolviendo este S.E.L. de tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtiene:

$$D' = -\frac{5}{3}; \qquad E' = -\frac{13}{3}; \qquad F' = \frac{2}{3}$$

Así, la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}y + \frac{2}{3} = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 5x - 13y + 2 = 0$$



Cálculo de los elementos de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro en $O(h, k)$ y longitud de radio r es: $(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$, donde $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

A partir de estos datos, se obtienen los siguientes resultados:

$$h = -\frac{D}{2} \qquad k = -\frac{E}{2}$$

$$r^2 = h^2 + k^2 - F = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

Si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} < 0$, ha de interpretarse que no existe tal circunferencia y se dirá, en este caso, que se trata de una circunferencia imaginaria.

Si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} = 0$, ha de interpretarse que no existe tal circunferencia y en este caso, la ecuación representa un punto con coordenadas (h, k).

Ejemplo 10.15 Ecuación de una circunferencia.

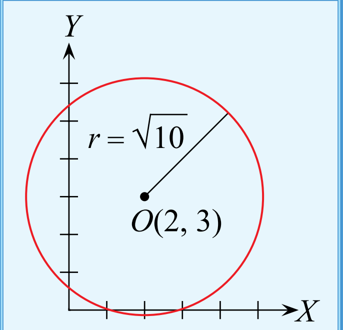
Determine las coordenadas del centro O y la longitud r del radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} h = -\frac{D}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ k = -\frac{E}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \ Centro: O(2, 3)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (-6)^2 - 4(3)}{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}}$$

$$r = \sqrt{10}\ u$$



Otra forma de reconocer que la circunferencia existe y determinar las coordenadas del centro O y la longitud r del radio, es conociendo su ecuación general y completando el trinomio cuadrado perfecto en las variables x e y. Si la circunferencia existe, la suma de los cuadrados de los binomios que se forman debe ser positiva, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.16 Reconocimiento de una circunferencia.

Encuentre de ser posible, las coordenadas del centro O y la longitud r del radio de los siguientes lugares geométricos:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 41 = 0$

Solución:

a) $(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = -1$

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 4$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

$r = 2$; $Centro$: $O(-1, 2)$

En este caso, la circunferencia existe, la longitud de su radio es r, y su centro es el punto O.

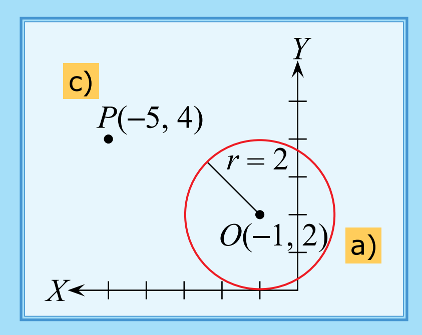
b) $(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = -16$
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = -16 + 4 + 9$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -3$

En este caso, la circunferencia no existe.

c) $(x^2 + 10x) + (y^2 - 8y) = -41$
$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) = -41 + 25 + 16$
$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 0$

En este caso, la ecuación representa un punto cuyas coordenadas son $(-5, 4)$.

En la siguiente gráfica se encuentran representados los literales a) y c).



Ecuación de la recta tangente a una circunferencia

Un punto P puede pertenecer o no a la circunferencia, por lo tanto, se pueden dar las siguientes situaciones:

- Si el punto P pertenece a la circunferencia, existe una recta tangente. El radio es perpendicular a esta recta en dicho punto.
- Si el punto P es exterior al círculo, existen dos rectas tangentes. El centro del círculo equidista de dichas rectas en los puntos de tangencia.
- Si el punto P es interior al círculo, no existe la posibilidad de definir una recta tangente.

Ejemplo 10.17 Ecuación de la recta tangente a una circunferencia.

Determine la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$, si dichas rectas contienen los puntos:

a) $(2, 3)$

b) $(5, 5)$

c) $(1, 1)$

Solución:

Se comprueba si los puntos pertenecen o no a la circunferencia:

a) $(2, 3)$: $2^2 + 3^2 - 4 + 9 - 18 = 0 \Rightarrow (2, 3)$, pertenece a la circunferencia.

b) $(5, 5)$: $5^2 + 5^2 - 10 + 15 - 18 = 37 > 0 \Rightarrow (5, 5)$, es exterior al círculo.

c) $(1, 1)$: $1^2 + 1^2 - 2 + 3 - 18 = -15 < 0 \Rightarrow (1, 1)$, es interior al círculo.

Según este análisis, habrá una recta tangente a la circunferencia que contiene el punto $(2, 3)$, dos rectas tangentes que contienen el punto $(5, 5)$, y ninguna en $(1, 1)$.

a) Recta tangente a la circunferencia en el punto $(2, 3)$:

Se ha de encontrar la ecuación de una recta que contenga a $(2, 3)$ y sea perpendicular al radio que contiene a este punto.

Centro de la circunferencia:

$$O\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

La recta que contiene al radio, contiene a los puntos $(2, 3)$ y $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, y su pendiente es:

$$m = \frac{-\frac{3}{2} - 3}{1 - 2} = \frac{9}{2}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es: $y - 3 = -\frac{2}{9}(x - 2)$.

b) Rectas tangentes a la circunferencia que contienen el punto $(5, 5)$:

En el caso del punto $(5, 5)$ hay que encontrar las ecuaciones de las rectas que, conteniendo a éste, su distancia al centro sea igual a la longitud del radio.

Calculamos la longitud del radio:

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{(-2)^2 + (3)^2 - 4(-18)}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}}$$

La ecuación de una recta que contenga a $(5, 5)$ es:

$$y - 5 = m\,(x - 5)$$
$$mx - y + (5 - 5m) = 0$$

La distancia de $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ a dicha recta es la longitud del radio:

$$r = \frac{\left|m + \frac{3}{2} + 5 - 5m\right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\left|\frac{13}{2} - 4m\right|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Igualando la expresión encontrada con la longitud del radio:

$$\frac{\left|\frac{13}{2} - 4m\right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{\frac{85}{4}} \Rightarrow \frac{\left(\frac{13}{2} - 4m\right)^2}{1 + m^2} = \frac{85}{4}$$

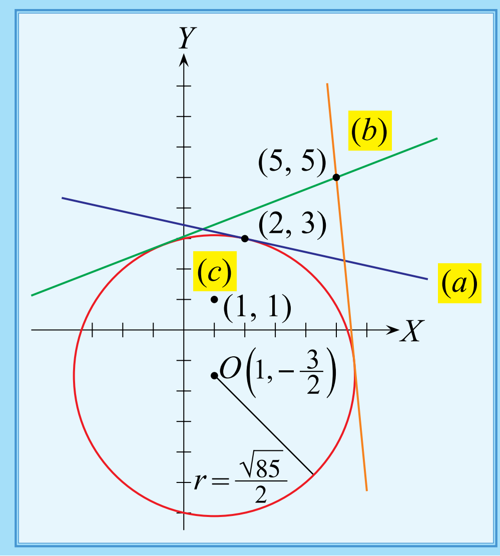
$$4\left(\frac{169}{4} - 52m + 16m^2\right) = 85 + 85m^2$$

$$169 - 208m + 64m^2 = 85 + 85m^2$$

$$21m^2 + 208m - 84 = 0 \Rightarrow m = \frac{-208 \pm \sqrt{50320}}{42}$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de m en la ecuación $y - 5 = m(x - 5)$, se obtienen las ecuaciones de las dos rectas tangentes.

En la siguiente gráfica se encuentran representados los literales a) y b).



Ejemplo 10.18 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $A(0, 6)$ y $B(1, 5)$ y cuyo centro se encuentra localizado sobre la recta $L: x + y = -1$.

Solución:

Partiremos de la ecuación de la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Reemplazamos las coordenadas de los puntos A y B que pertenecen a ella:

$$(0 - h)^2 + (6 - k)^2 = r^2 \qquad \text{(I)}$$

$$(1 - h)^2 + (5 - k)^2 = r^2 \qquad \text{(II)}$$

Como además el centro $O(h, k)$ pertenece a la recta L, éste debe satisfacer su ecuación:

$$h + k = -1$$
$$h = -1 - k \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en (I) y (II), respectivamente:

$$(1 + k)^2 + (6 - k)^2 = r^2$$

$$(2 + k)^2 + (5 - k)^2 = r^2$$

$$1 + 2k + k^2 + 36 - 12k + k^2 = r^2$$

$$4 + 4k + k^2 + 25 - 10k + k^2 = r^2$$

$$2k^2 - 10k + 37 = r^2 \qquad \text{(IV)}$$

$$2k^2 - 6k + 29 = r^2 \qquad \text{(V)}$$

Restando las expresiones (IV) – (V) y despejando k, se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2k^2 - 10k + 37 = r^2 \\ -2k^2 + 6k - 29 = -r^2 \\ \hline -4k = -8 \\ k = 2 \end{array}$$

Reemplazando en (III) el valor de $k = 2$, tenemos:

$$h = -1 - 2$$
$$h = -3$$

Reemplazando h y k en (I), se obtiene:

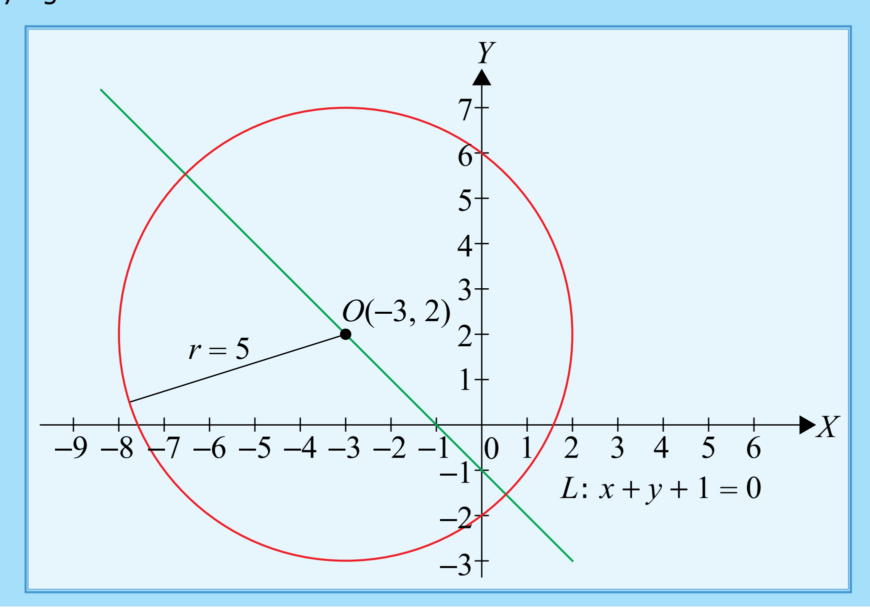
$$(3)^2 + (6 - 2)^2 = r^2$$
$$r^2 = 9 + 16$$
$$r^2 = 25$$

$r = 5$

Con lo cual, la ecuación de la circunferencia buscada sería:

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Cuya gráfica sería:



Ejemplo 10.19 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación del lugar geométrico dado por la igualdad $|z - 1| = 2|z + 2i|$, $z \in \mathbb{C}$.

Solución:

Definimos un complejo $z = x + yi$ y lo reemplazamos en la igualdad dada:

$|z - 1| = 2\,|z + 2i|$

$|x + yi - 1| = 2|x + yi + 2i|$

$|(x - 1) + yi| = 2|x + (y + 2)i|$

Calculando los módulos indicados, tenemos:

$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + (y + 2)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo los términos semejantes:

$(x-1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y+2)^2]$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + y^2 + 4y + 4)$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 16y + 16$
$3x^2 + 3y^2 + 2x + 16y + 15 = 0$

Completando trinomios:

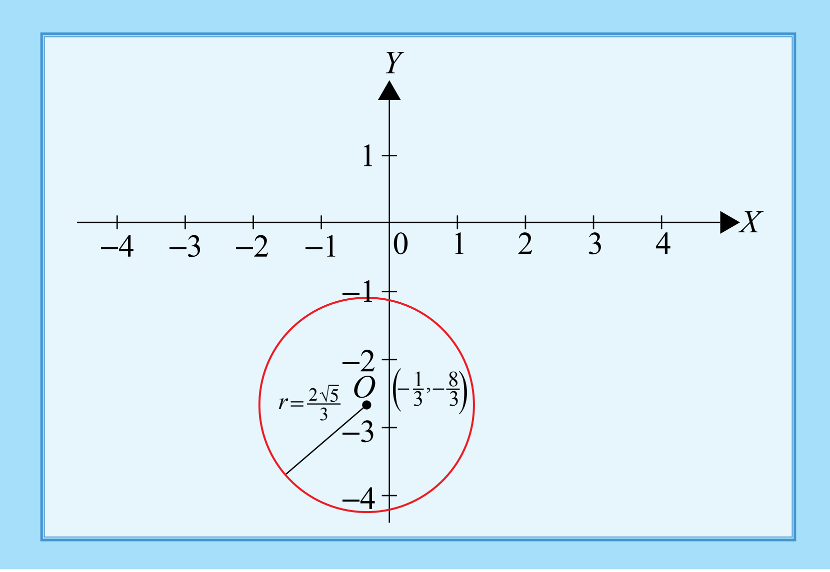
$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 3\left(y^2 + \frac{16}{3}y + \frac{64}{9}\right) = \frac{1}{3} + \frac{64}{3} - 15$$

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{3}$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

La cual representa la ecuación de una circunferencia centrada en $O\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y cuya longitud del radio es $r = \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

La gráfica de la circunferencia sería:

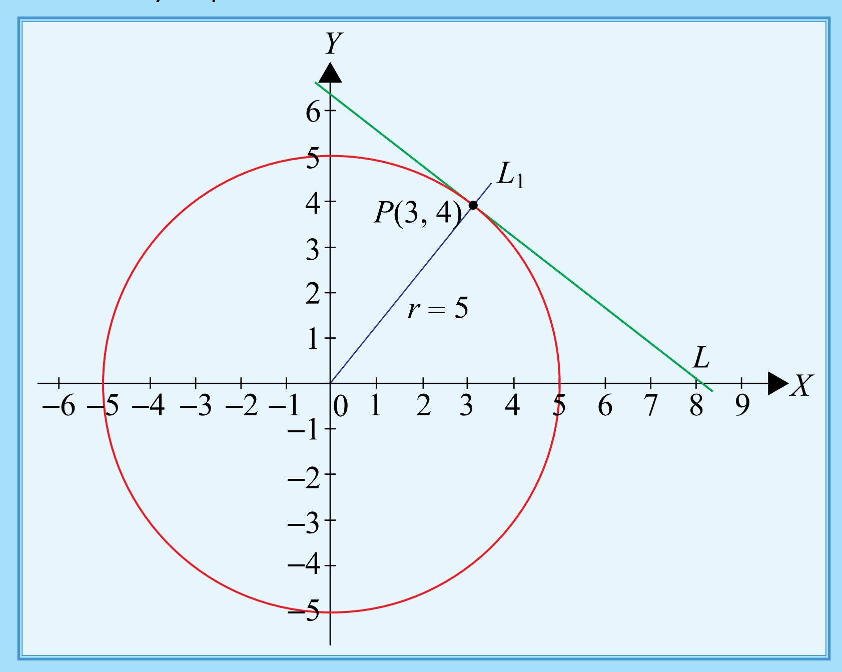


Ejemplo 10.20 Circunferencia y recta tangente.

Determine la ecuación de la recta L tangente a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.

Solución:

Para analizar la información dada en el problema, procedemos a graficar la cónica dada y el punto.



$x^2 + y^2 = 25$ representa una circunferencia con centro $O(0, 0)$ y $r = 5$.

Para determinar la ecuación de la recta L debemos contar con un punto y su pendiente. El punto $P(3, 4)$ es conocido, y para obtener la pendiente determinaremos la ecuación de la recta L_1 que contiene al radio de la circunferencia y a la que pertenecen los puntos $(0, 0)$ y $(3, 4)$.

Así:

$$L_1\text{: } y = \frac{4}{3}x$$

Debido a que L_1 es perpendicular a L por ser la recta tangente perpendicular al radio en el punto de tangencia, la pendiente de L se obtendrá a partir de:

$$m\,m_1 = -1$$

$$m\left(\frac{4}{3}\right) = -1$$

$$m = -\frac{3}{4}$$

Con las coordenadas del punto $(3,\ 4)$, y la pendiente $m = -\frac{3}{4}$, procedemos a determinar la ecuación de L:

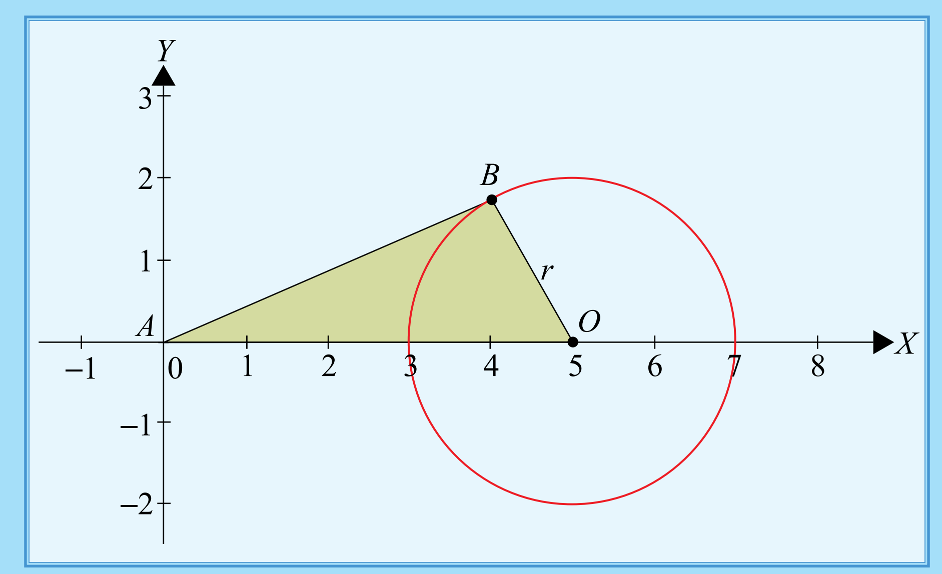
$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$4y - 16 = -3x + 9$$

$$L: 3x + 4y - 25 = 0$$

Ejemplo 10.21 Circunferencia y triángulo.

De acuerdo al bosquejo gráfico que se presenta a continuación, la ecuación de la circunferencia es: $x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0$, siendo $\overline{AB}$ un segmento tangente y el punto O su centro. Calcule el área de la superficie del triángulo ABO.



Solución:

Trabajamos en primer lugar, con la ecuación de la circunferencia dada, a fin de determinar las coordenadas del punto O y la longitud de su radio r. Así:

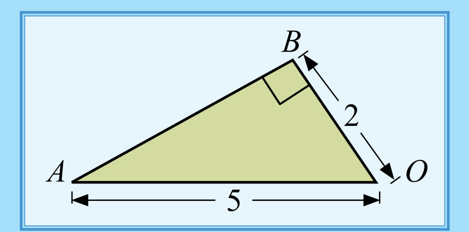
$$x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0$$

$$(x^2 - 10x + 25) + y^2 + 21 - 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 4$$

Luego: $O(5, 0)$ y $r = 2$.

Debido a que el segmento $\overline{AB}$, por ser tangente a la circunferencia es perpendicular al radio, el triángulo ABO que se forma es rectángulo con las siguientes medidas:



Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la longitud $\overline{AB}$, así:

$(\overline{AB})^2 = (5)^2 - (2)^2$

$(\overline{AB})^2 = 25 - 4$

$\overline{AB} \quad = \sqrt{21}$

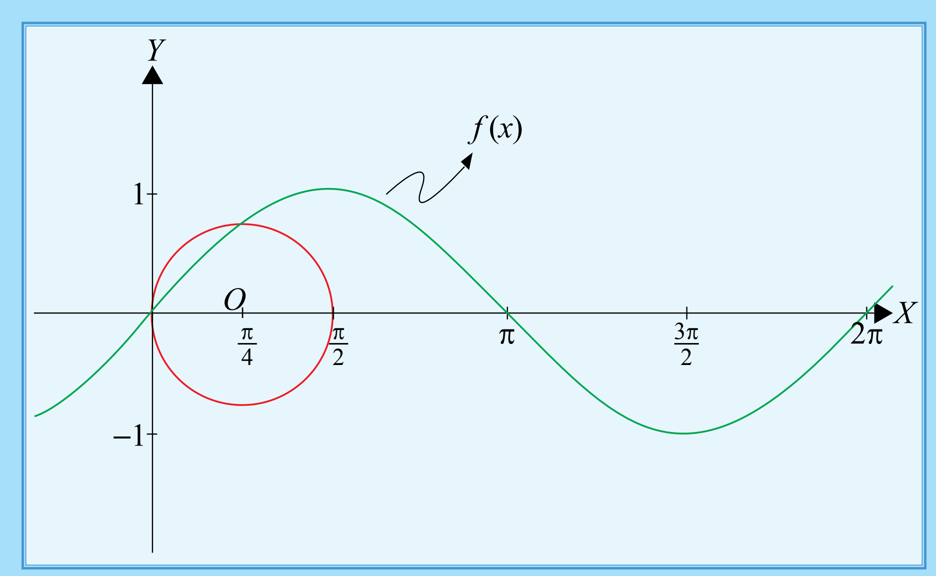
Luego, calculando el área de la superficie del triángulo ABO, tenemos:

$$A_\Delta = \frac{(2)(\sqrt{21})}{2}$$

$$A_\Delta = \sqrt{21}\ u^2$$

Ejemplo 10.22 Circunferencia y funciones trigonométricas.

Dada la gráfica que se presenta a continuación, y si además $f(x) = sen\,(x)$, determine la ecuación de la circunferencia mostrada:



Solución:

De la gráfica se puede concluir que:

$O\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ y $r = \frac{\pi}{4}$.

Con lo cual se puede determinar la ecuación de la circunferencia solicitada, así:

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16}$$

Ejemplo 10.23 Inecuaciones que incluyen circunferencia y números complejos.

Grafique en el plano complejo la región determinada por la desigualdad: $4 - z\bar{z} \geq 0$.

Solución:

Si tomamos el complejo $z = x + yi$, su conjugado $\bar{z} = x - yi$, y los reemplazamos en la desigualdad, tenemos:

$$4 - (x + yi)(x - yi) \geq 0$$

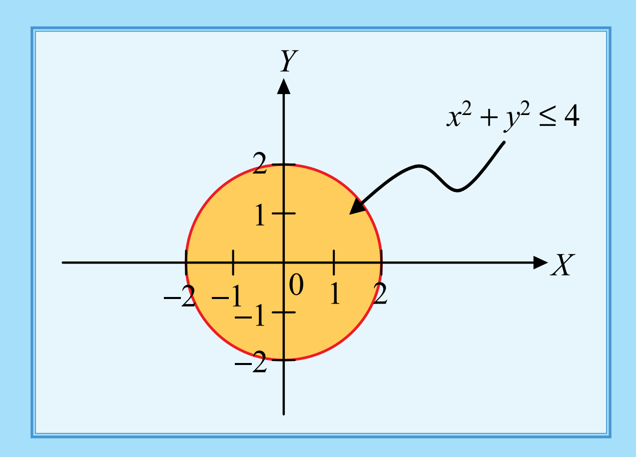
$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

De donde:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Esta región representa un círculo centrado en el origen, cuyo radio mide $2u$.

Gráficamente tenemos:



Ejemplo 10.24 Lugares geométricos.

Determine el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, tales que sus distancias a los puntos $A(8, 0)$ y $B(0, 6)$ están en la razón: $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2}$.

Solución:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2} \qquad \overline{PB} = \sqrt{x^2 + (y-6)^2}$$

Por hipótesis:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 16x + 64 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 12y + 36}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4(x^2 - 16x + 64 + y^2) = x^2 + y^2 - 12y + 36$$

$$3x^2 + 3y^2 - 64x + 12y + 220 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{64}{3}x + 4y + \frac{220}{3} = 0$$

Luego:

Ya que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, podría tratarse de una circunferencia donde:

$D = -\frac{64}{3}$, $E = 4$ y $F = \frac{220}{3}$

Luego:

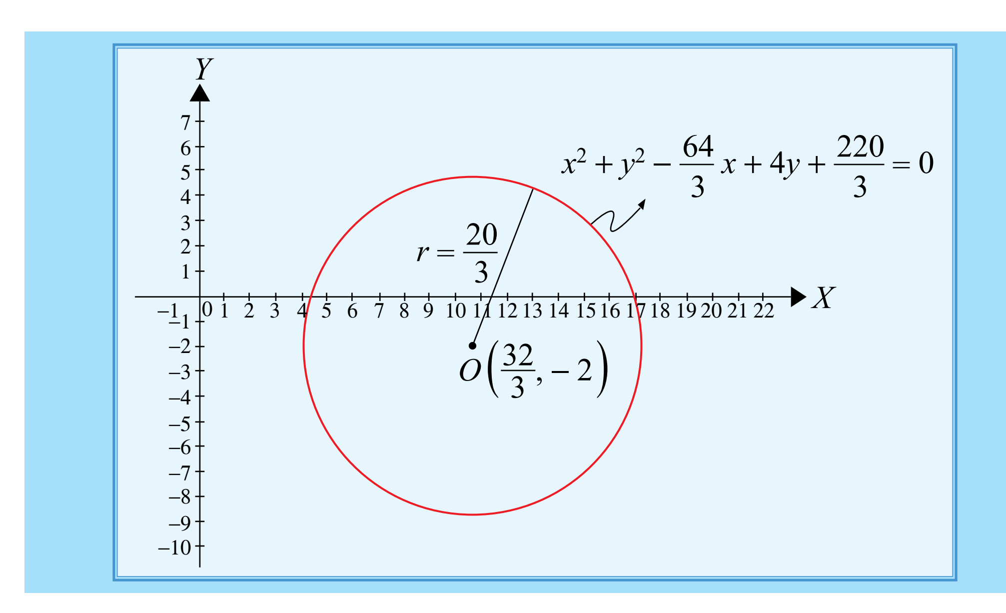
$$h = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

$$k = -\frac{4}{2} = -2$$

$$r = \sqrt{\frac{\left(-\frac{64}{3}\right)^2 + (4)^2 - 4\left(\frac{220}{3}\right)}{4}}$$

$$r = \frac{20}{3}$$

La gráfica de esta circunferencia se muestra a continuación:



Ejemplo 10.25 Circunferencia y volumen de un sólido de revolución.

Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región limitada por la mitad del círculo definido por la inecuación $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \leq 0$, alrededor de la recta $y = x + 1$.

Solución:

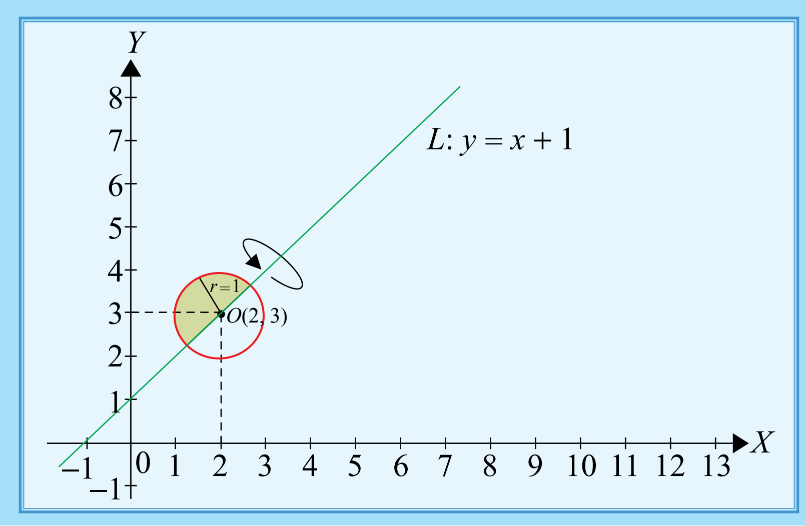
A partir de la inecuación, tenemos:

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \leq 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) \leq 13 - 12$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 1$

La región limitada por el semicírculo y la recta se presenta a continuación:



El volumen de la esfera generada sería:

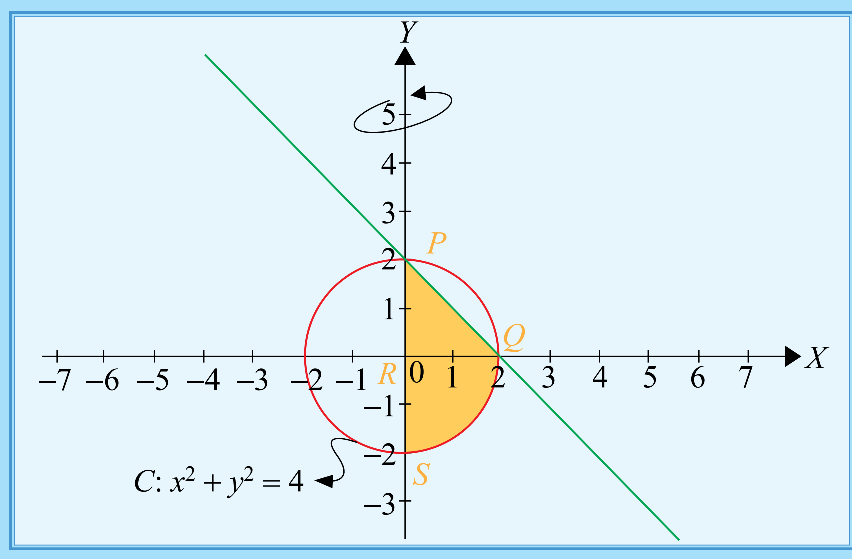
$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi (1)^3$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi u^3$$

Ejemplo 10.26 Circunferencia y volumen de un sólido de revolución.

En el gráfico se muestra una circunferencia C. Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar la región sombreada alrededor del eje Y.



Solución:

El volumen del sólido generado se obtendrá al sumar el volumen del cono más el de la semiesfera, generados al rotar el triángulo rectángulo PQR y el cuarto de círculo, alrededor del eje Y.

$$V = V_{CO} + V_{SE}$$

$$= \frac{1}{3}\pi (2)^2(2) + \frac{2}{3}\pi (2)^3$$

$$= \frac{8\pi}{3} + \frac{16\pi}{3}$$

$$V = \frac{24\pi}{3} u^3.$$

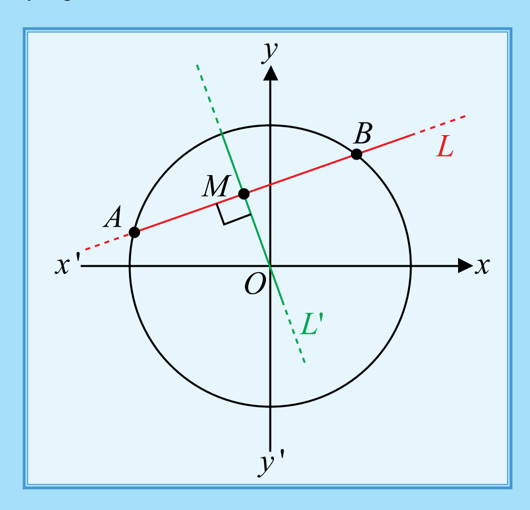
Ejemplo 10.27 Demostración de Teorema.

Demuestre el siguiente Teorema:

"El segmento de recta que une el centro de una circunferencia con el punto medio de cualquier cuerda de dicha circunferencia, es perpendicular a la cuerda."

Solución:

Hacemos un bosquejo de los elementos definidos en el teorema.



Demostración:

Sin pérdida de generalidad se ha ubicado el centro de la circunferencia en el origen de coordenadas rectangulares, es decir $O(0, 0)$.

Supongamos que r es la longitud del radio de la circunferencia.

Entonces, la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$.

Como los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ pertenecen a la circunferencia, tenemos:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

Combinando ambas ecuaciones:

$(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 0$

$(y_2^2 - y_1^2) + (x_2^2 - x_1^2) = 0$

$\Rightarrow (y_2^2 - y_1^2) = -(x_2^2 - x_1^2) \quad (1)$

Debemos demostrar que las rectas L y L' son perpendiculares.

Sea m la pendiente de la recta L, entonces su valor es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Debido a que M es el punto medio de la cuerda, sus coordenadas son:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Sea m' la pendiente de la recta L', entonces su valor es:

$$m' = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} - 0}{\frac{x_1 + x_2}{2} - 0} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$$

Las rectas L y L' son perpendiculares si y sólo si $mm' = -1$.

$$mm' = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}\right)$$

$$mm' = \left(\frac{{y_2}^2 - {y_1}^2}{{x_2}^2 - {x_1}^2}\right)$$

Reemplazando el resultado de la ecuación (1) en el numerador, tenemos:

$$mm' = \frac{{y_2}^2 - {y_1}^2}{{x_2}^2 - {x_1}^2} = \frac{-({x_2}^2 - {x_1}^2)}{({x_2}^2 - {x_1}^2)} = -1$$

$$\therefore\ mm' = -1$$

Con lo cual se demuestra que el segmento $\overline{OM}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$.

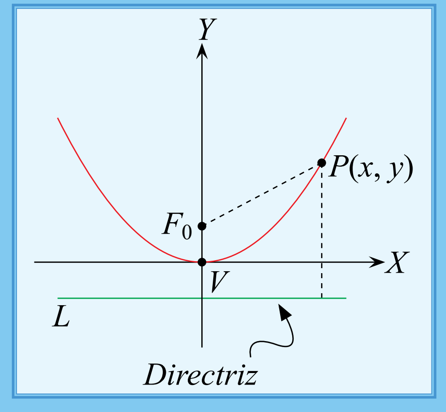
10.2.2 Parábola

En el capítulo de funciones de variable real, se presentó la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ como una parábola, cuyo vértice y eje de simetría pueden obtenerse de la ecuación en forma canónica de f. Las parábolas estudiadas en ese capítulo tenían eje de simetría vertical, no obstante, la parábola también puede tener eje de simetría horizontal, en cuyo caso no representa una función de y en x, pero sí una relación entre estas dos variables. En esta sección se estudiarán las parábolas con ejes de simetría vertical y horizontal de una forma más amplia, de acuerdo a la definición que se dará a continuación.

Definición 10.4 (Parábola)

Conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo F_0 y de una recta fija L. El punto F_0 es denominado foco de la parábola; la recta L es la directriz de la parábola.

$$\text{Parábola} = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ d(P, F_0) = d(P, L)\}$$



Dada una parábola, se denomina **eje de simetría** a la recta que contiene al foco y es perpendicular a la recta directriz. Se denomina **vértice** de la parábola al punto donde ésta cambia su monotonía.

La distancia entre el vértice y el foco de una parábola recibe el nombre de **parámetro** de la parábola (suele denotarse por p). El segmento de recta perpendicular al eje de simetría que une dos puntos de la parábola y que incluye al foco, se denomina **lado recto** y su longitud es $4p$.

Forma canónica de la ecuación de una parábola

Se supondrá que el vértice es el origen de coordenadas y que el foco se encuentra en el semieje positivo de las ordenadas.

En este caso, la directriz es una recta horizontal L de ecuación $y = -p$, o sea, $y + p = 0$.

Dado un punto $P(x, y)$ del plano, su distancia al foco $F_0\,(0, p)$ es $d(P, F_0) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$.

La distancia del punto P a la recta directriz es $d(P, L) = |\,y + p\,|$.

La condición para que el punto P pertenezca a la parábola, es que ambas distancias coincidan:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |\,y + p\,|$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 - 2py = 2py$$

La ecuación de esta parábola, con vértice en el origen de coordenadas $V(0, 0)$ y foco en el punto $F_0\,(0, p)$, es:

$$x^2 = 4py$$

Basándose en la deducción realizada, existen otros tres casos elementales de parábolas:

- Si el eje de simetría es vertical y el foco está en el semieje negativo de las ordenadas $F_0\,(0, -p)$, la ecuación es:

$$x^2 = -4py$$

- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje positivo de las abcisas $F_0\,(p, 0)$, la ecuación es:

$$y^2 = 4px$$

- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje negativo de las abcisas $F_0\,(-p, 0)$, la ecuación es:

$$y^2 = -4px$$

Si el vértice de una parábola se encuentra en un punto $V(h, k)$, considere:

Coordenadas del foco	Recta directriz	Forma canónica	Gráfica
$F_0(h, k+p)$	$L: y = k - p$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Y $F_0(h, k+p)$ $V(h, k)$ $L: y=k-p$ 0 X
$F_0(h, k-p)$	$L: y = k + p$	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	Y $L: y=k+p$ $V(h, k)$ $F_0(h, k-p)$ 0 X
$F_0(h+p, k)$	$L: x = h - p$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$L: x=h-p$ Y $F_0(h+p, k)$ $V(h, k)$ 0 X
$F_0(h-p, k)$	$L: x = h + p$	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	Y $L: x=h+p$ $F_0(h-p, k)$ $V(h, k)$ 0 X

Se puede resumir que la variable con término cuadrático determina la dirección del eje de simetría de la parábola, y el signo del término lineal determina la dirección de la concavidad.

pág. 836

Forma general de la ecuación de una parábola

Dada una ecuación de los tipos $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ o $By^2 + Dx + Ey + F = 0$; donde $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$ y además A, E y B, D deben ser diferentes de cero respectivamente, siempre es posible reducirla a la forma canónica de una parábola. Para ello, se completa un trinomio cuadrado perfecto en la variable con término cuadrático y se manipula adecuadamente el otro miembro de la ecuación.

Ejemplo 10.28 Ecuación de una parábola.

Determine la forma canónica de la ecuación de la parábola $2x^2+8x+3y-5=0$. Encuentre su vértice, su foco y la ecuación de su recta directriz.

Solución:

Puesto que la ecuación dada tiene un término en x^2, habrá que transformarla en una del tipo $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$

$$2x^2 + 8x + 3y - 5 = 0$$

$$\begin{aligned}
2x^2 + 8x &= -3y + 5 \\
2(x^2 + 4x) &= -3y + 5 \\
(x^2 + 4x) &= -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \\
(x+2)^2 &= -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} + 4 \\
(x+2)^2 &= -\frac{3}{2}y + \frac{13}{2} \\
(x+2)^2 &= -\frac{3}{2}\left(y - \frac{13}{3}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V(h, k) = V\left(-2, \frac{13}{3}\right) \text{ y } p = \frac{3}{8}$$

Se trata de una parábola con eje de simetría vertical y cóncava hacia abajo.

Para hallar las coordenadas del foco se le resta el parámetro p a la ordenada del vértice:

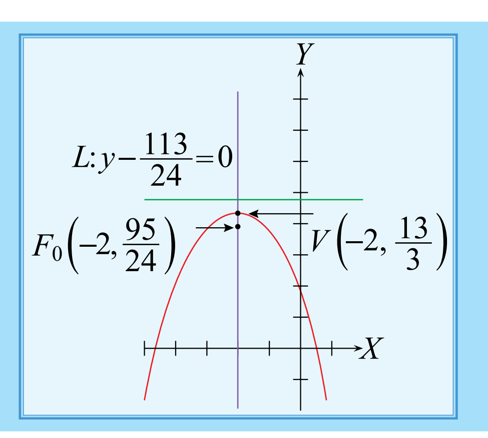
$$F_0\left(-2, \frac{13}{3} - \frac{3}{8}\right) = F_0\left(-2, \frac{95}{24}\right)$$

Puesto que el eje de simetría es vertical, la recta directriz es horizontal, y su ordenada se obtiene sumándole el parámetro p a la ordenada del vértice:

$$y=\frac{13}{3}+\frac{3}{8}=\frac{113}{24}$$

La ecuación de la recta directriz es:

$$L: y-\frac{113}{24}=0$$



Ejemplo 10.29 Ecuación de una parábola.

Encuentre los elementos de la parábola $y^2-4x+6y+13=0$.

Solución:

Se procede como en el caso anterior, teniendo en cuenta que ahora la variable que aparece elevada al cuadrado es y:

$$y^2+6y=4x-13$$
$$(y+3)^2=4x-13+9$$
$$(y+3)^2=4x-4$$
$$(y+3)^2=4(x-1)$$

Es una parábola con vértice en el punto $V(1,-3)$.

Su parámetro $p=1$, el eje de simetría es horizontal y el foco está localizado a la derecha del vértice.

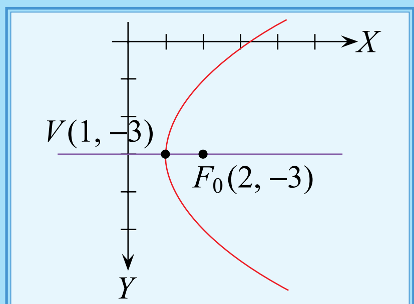
Para hallar las coordenadas del foco se le suma el parámetro p a la abscisa del vértice:

$$F_0(1+1,-3)$$
$$F_0(2,-3)$$

La ecuación de la recta directriz se obtiene restándole el valor del parámetro p a la abscisa del vértice:

$$L: x=1-1=0$$

Con lo cual se concluye que la recta directriz es el eje de las ordenadas.



Ejemplo 10.30 Ecuación de una parábola.

Determine la ecuación de la parábola con eje de simetría horizontal que tiene su vértice en el punto $V(2, 2)$ y que contiene al punto $P(1, 1)$.

Solución:

Dado que el eje de simetría de la parábola es horizontal y por la ubicación de los puntos V y P, la forma de su ecuación será:

$(y - k)^2 = -4p\,(x - h)$

Reemplazando las coordenadas del vértice, tenemos:

$(y - 2)^2 = -4p\,(x - 2)$

Puesto que el punto $(1, 1)$ pertenece a la parábola, debe satisfacer su ecuación:

$(1 - 2)^2 = -4p\,(1 - 2)$

De donde:

$4p = 1$

$p = \frac{1}{4}$

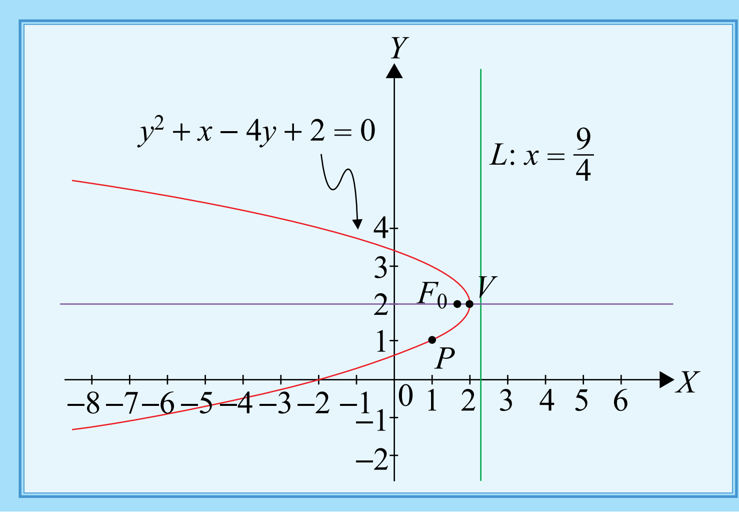
En base a lo anotado, la ecuación de la parábola sería:

$(y - 2)^2 = -(x - 2)$

$y^2 - 4y + 4 = -x + 2$

$y^2 + x - 4y + 2 = 0$ siendo $V(2, 2)$ y $F_0\left(\frac{7}{4}, 2\right)$.

Su gráfica se presenta a continuación:



Ejemplo 10.31 Ecuación de una parábola.

Determine las coordenadas del vértice y el foco de la parábola cuya ecuación es: $y = \frac{1}{2}(1 - 2x - x^2)$.

Solución:

Trabajamos en primer lugar con la ecuación dada:

$$y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -y$$

$$x^2 + 2x - 1 = -2y$$

Completando el trinomio como cuadrado perfecto:

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 1 = -2y$$

$$(x + 1)^2 = -2y + 2$$

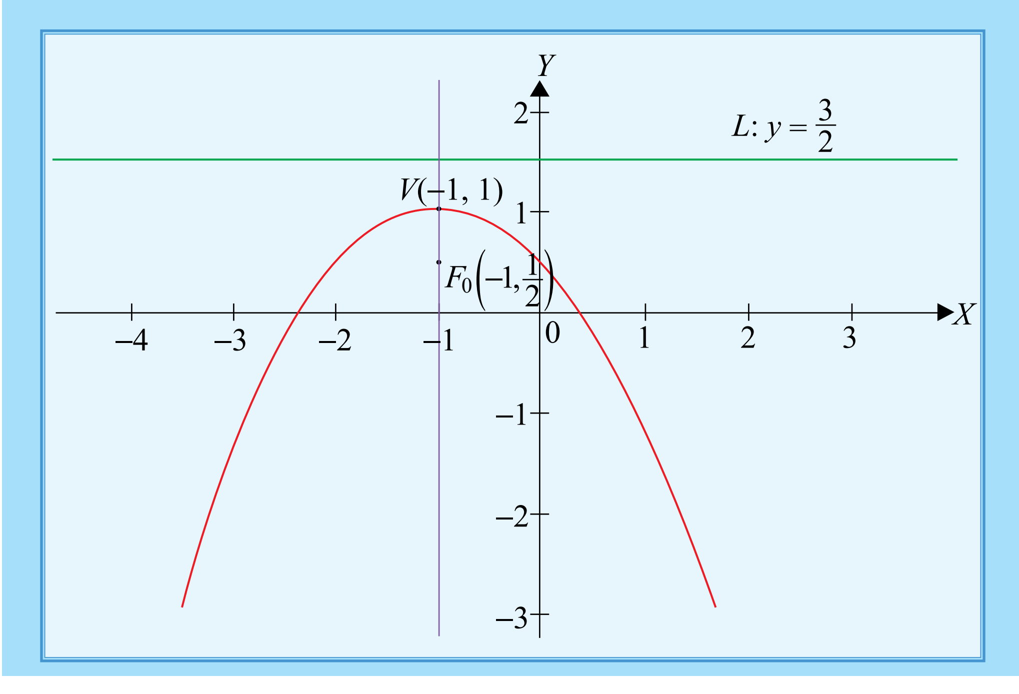
$$(x + 1)^2 = -2(y - 1)$$

Comparando esta ecuación con la de una parábola de la forma: $(x - h)^2 = -4p(y - k)$, tenemos que:

$$V(-1, 1)$$

$$4p = 2 \quad \therefore \quad p = \frac{1}{2}$$

$$F_0\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 10.32 Ecuación de una parábola.

Los extremos del lado recto de una parábola son los puntos $(5, k)$ y $(-5, k)$. Si el vértice de esta parábola está en el origen y la parábola es cóncava hacia abajo, determine la ecuación de la cónica.

Solución:

Por hipótesis:

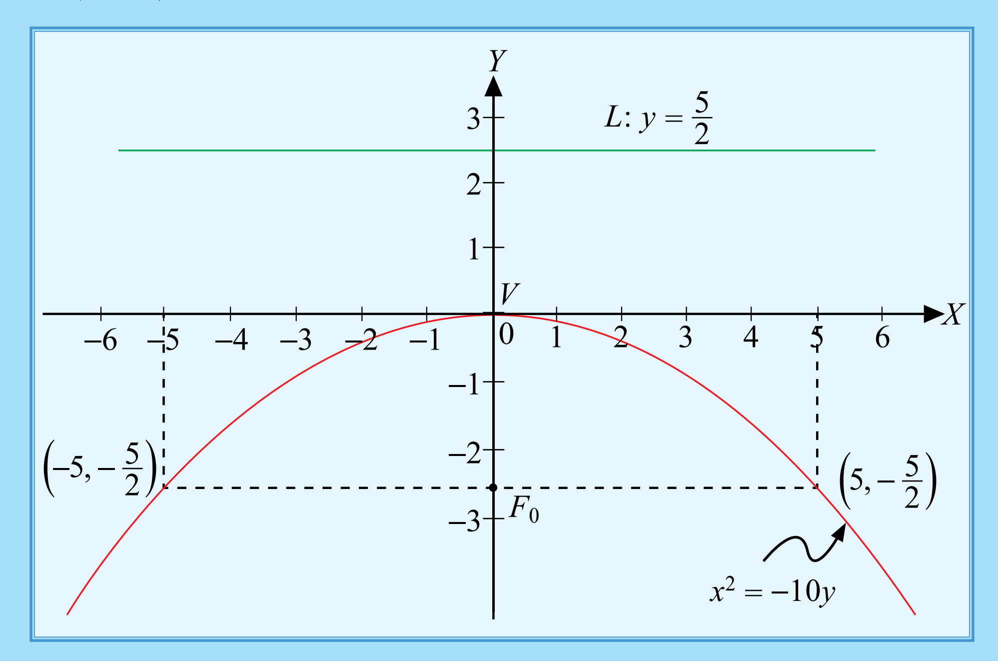
$$x^2 = -4py$$
$$k = -p$$

Por definición del lado recto:

$$|4p| = \sqrt{(5+5)^2 + (k-k)^2} \Rightarrow 4p = 10$$

$$p = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad k = -\frac{5}{2}$$

Entonces la ecuación de la parábola sería: $x^2 = -10y$, donde $V(0, 0)$, $F_0\left(0, -\frac{5}{2}\right)$, $L: y = \frac{5}{2}$, y su gráfica sería:



Ejemplo 10.33 Sistema de inecuaciones no lineales.

Dado el siguiente sistema de inecuaciones no lineales, determine su solución:

$$\begin{cases} y^2 - 4x \geq 0 \\ y^2 + 4x - 16 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Trabajamos con la primera inecuación tomándola como ecuación, así:

$$y^2 - 4x = 0$$

Del análisis de esta expresión, observamos que se la puede comparar con la ecuación de una parábola de la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

En base a las comparaciones realizadas, tenemos:

$$y^2 = 4x$$

$$V(0, 0) \text{ y } p = 1$$

Luego, trabajamos con la segunda inecuación tomándola también como ecuación y comparándola con la parábola de la forma $(y-k)^2 = -4p(x-h)$, tenemos:

$$y^2 = -4x + 16$$

$$y^2 = -4(x - 4)$$

Por lo tanto, $V(4, 0)$, $p = 1$ y será cóncava hacia la izquierda.

Se determina la región definida por la primera desigualdad despejando x:

$$4x \leq y^2$$

$$x \leq \frac{1}{4}y^2$$

Se determina la región definida por la segunda desigualdad, despejando así mismo x.

$$4x \leq -y^2 + 16$$

$$x \leq \frac{-y^2 + 16}{4}$$

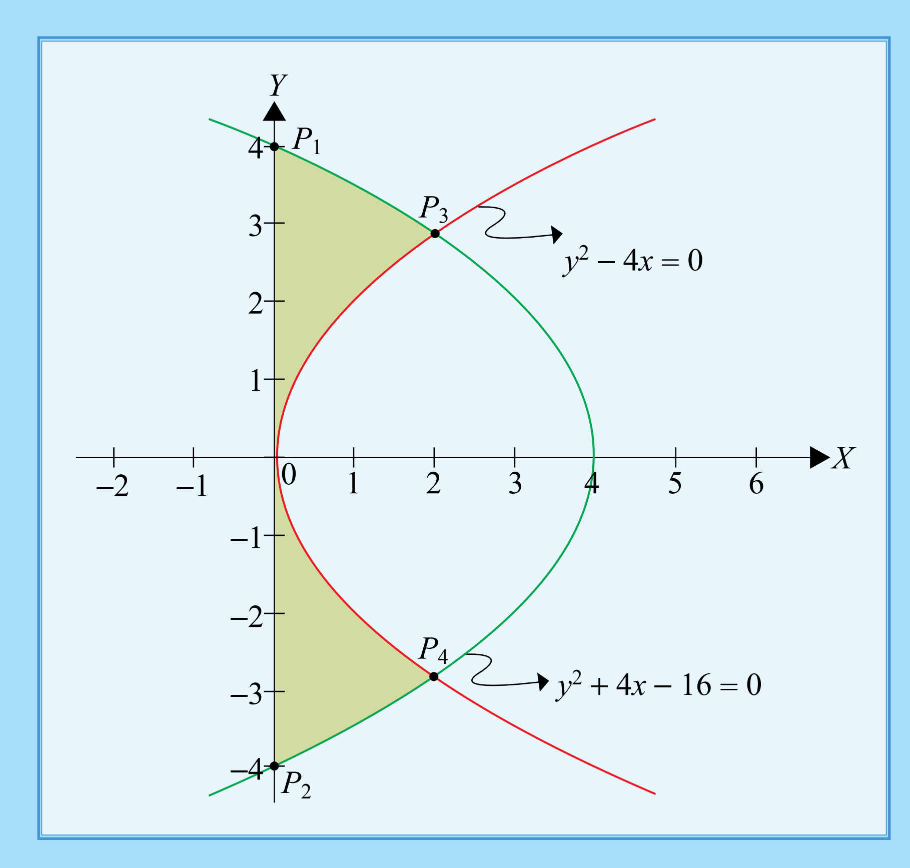
Con este análisis, procedemos a graficar las curvas y a sombrear las regiones dadas por las inecuaciones. Así:

Como $4x \leq y^2$, $x \leq \frac{y^2}{4}$, sombrearemos la región que incluye a la cónica y a toda la región a la izquierda de ella.

Como $4x \leq -y^2 + 16$, $x \leq \frac{-y^2 + 16}{4}$, sombrearemos la región que incluye a la cónica y a toda la región a la izquierda de ella.

La última desigualdad, $x \geq 0$, comprenderá todos los puntos del plano localizados en el I y IV cuadrante.

En base a nuestro estudio, procedemos a graficar las regiones referidas para obtener la solución del sistema. Así:



Con lo que se puede observar la región común a las inecuaciones dadas, es decir, la solución del S.I.N.L.

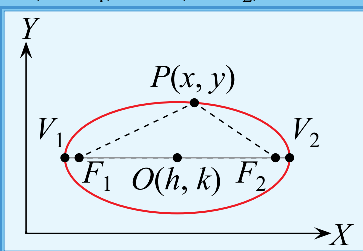
El lector puede confirmar las coordenadas de los puntos $P_1(4, 0)$, $P_2(-4, 0)$, $P_3(2, \sqrt{2})$ y $P_4(2, -\sqrt{2})$, resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales respectivo.

10.2.3 Elipse

Definición 10.5 (Elipse)

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos F_1 y F_2, es una constante.

Elipse $= \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constante}\}$



El valor constante al cual se hace referencia en la definición es $2a$ y corresponde a la longitud del **eje mayor** de la elipse, y la distancia entre los focos es $2c$. Los valores a y c se denominan **semieje mayor** y **semidistancia focal**, respectivamente. El punto medio entre los dos focos se denomina **centro** de la elipse de coordenadas $O(h, k)$.

Se denominan **vértices** de la elipse a los puntos V_1 y V_2 que se encuentran a una distancia a del centro de la elipse. Estos puntos pertenecen a la elipse y geométricamente se puede apreciar que son los puntos más distantes de su centro.

El segmento de recta perpendicular al eje mayor, que une dos puntos de la elipse y que incluye a uno de los focos, se denomina **lado recto** y su longitud es $\dfrac{2b^2}{a}$, siendo b la longitud del **semieje menor** de la elipse.

El valor $e = \dfrac{c}{a}$, que está comprendido entre 0 y 1, se denomina **excentricidad** de la elipse.

Cálculo de la longitud del eje menor

Denominando $2b$ a la longitud del eje menor, P al vértice superior ubicado sobre el centro de la elipse, F_1 y F_2 a los focos de la elipse, por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Por definición de elipse,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}=2a \Rightarrow 2\sqrt{b^2+c^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2+c^2}=a \Rightarrow b^2+c^2=a^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

Esta es la distancia b denominada longitud del **semieje menor.**

Forma canónica de la ecuación de una elipse

La ecuación de una elipse centrada en el origen y con focos en $F_1(-c, 0)$ y $F_2\,(c, 0)$, se puede obtener aplicando la definición:

$$d(P, F_1)+d(P, F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}=2a \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}=f \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando las expresiones (I) y (II):

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)^2=2af$$

$$(x^2+2xc+c^2+y^2)-(x^2-2xc+c^2+y^2)=2af$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2-x^2+2xc-c^2-y^2=2af$$

$$4xc=2af$$

$$f=\frac{2xc}{a}$$

Reemplazando f en (II) y sumando las expresiones (I) y (II):

$$2\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}=2a+\frac{2xc}{a}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2-\frac{x^2c^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2$$

$$x^2\left[1-\frac{c^2}{a^2}\right]+y^2=a^2-c^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión por $a^2 - c^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Reemplazando $a^2 - c^2$ por b^2, tenemos:

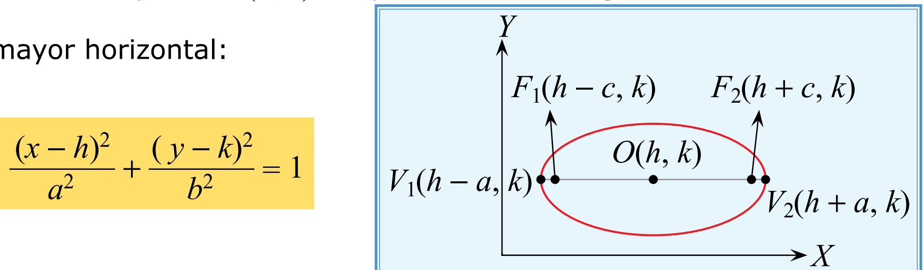
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Si una elipse tiene sus ejes mayor y menor paralelos a los ejes de coordenadas, y su centro en el punto $O(h, k)$, se pueden dar los siguientes casos:

- Eje mayor horizontal:

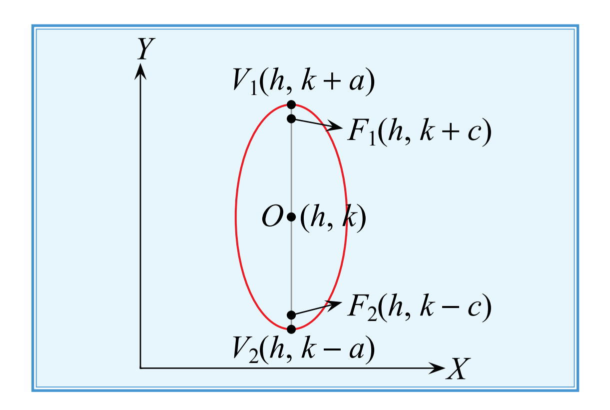
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h \pm a, k)$ y los focos son de la forma $(h \pm c, k)$.

- Eje mayor vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h, k \pm a)$ y los focos son de la forma $(h, k \pm c)$.

Forma general de la ecuación de una elipse

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y B tienen el mismo signo, además $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$, siendo $A \neq 0$, $B \neq 0$, ésta puede transformarse en otra del tipo $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \pm 1$.

Así, la condición necesaria para que la ecuación cuadrática represente a una elipse, es que los coeficientes A y B tengan igual signo, pero diferente valor.

Si el segundo miembro fuese positivo, se tendría una elipse centrada en (h, k). En el caso que resultare negativo, como una suma de cuadrados es siempre positiva, se tendría que ningún punto la verifica y se habla de una elipse imaginaria. Así mismo, si el segundo miembro es cero, la ecuación representa un punto en (h, k).

Ejemplo 10.34 Ecuación de una elipse.

Determine la forma canónica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$. Si se trata de una elipse, encuentre su centro, sus focos y sus vértices.

Solución:

Se agrupan los términos en x^2 con los términos en x, y los términos en y^2 con los términos en y:

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 18y) - 23 = 0$$

Se saca el factor común, en cada paréntesis, dado por el coeficiente del término de segundo grado:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 2y) - 23 = 0$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos:

$$4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y+1)^2 - 1] - 23 = 0$$
$$4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

Se divide entre 36:

$$\frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Centro de la elipse: $O(1, -1)$; $a = 3$ y $b = 2$.

Por la forma de la ecuación, se concluye que se trata de una elipse con eje mayor horizontal; y para hallar los focos hay que sumar y restar c a la abscisa del centro.

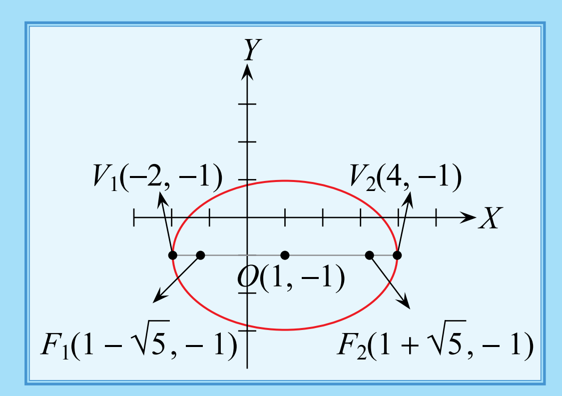
$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Las coordenadas de los focos son:

$$F_1(1 - \sqrt{5}, -1)$$
$$F_2(1 + \sqrt{5}, -1)$$

Las coordenadas de los vértices se obtienen restando y sumando a la abscisa del centro O el valor de la longitud del semieje mayor a, con lo que se obtiene:

$V_1(-2, -1)$
$V_2(4, -1)$



Ejemplo 10.35 Ecuación de una elipse.

De ser posible, determine los elementos de la cónica cuya ecuación es $x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$.

Solución:

$$(x^2 - 8x) + (3y^2 - 12y) + 32 = 0$$
$$(x^2 - 8x) + 3(y^2 - 4y) + 32 = 0$$
$$(x - 4)^2 + 3(y - 2)^2 - 16 - 12 + 32 = 0$$
$$(x - 4)^2 + 3(y - 2)^2 = -4$$

Como el primer miembro es la suma de números positivos y el segundo miembro es un número negativo, la ecuación no tiene solución y se trata de una elipse imaginaria.

Ejemplo 10.36 Ecuación de una elipse.

Encuentre los elementos de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 311 = 0$.

Solución:

$$(25x^2 - 50x) + (16y^2 + 64y) - 311 = 0$$
$$25(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) - 311 = 0$$
$$x^2 - 2x = x^2 - (2)(1)x + 1^2 - 1^2 = (x - 1)^2 - 1$$
$$y^2 + 4y = y^2 + (2)(2)y + 2^2 - 2^2 = (y + 2)^2 - 4$$

Sustituyendo, la ecuación es:

$$25(x-1)^2 - 25 + 16(y+2)^2 - 64 - 311 = 0$$
$$25(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 25 + 64 + 311 = 400$$

$$\frac{25(x-1)^2}{400} + \frac{16(y+2)^2}{400} = 1$$

$\dfrac{(x-1)^2}{400/25} + \dfrac{(y+2)^2}{400/16} = 1$, es decir, $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$

Como el denominador de la segunda fracción es mayor que el de la primera, $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, lo cual significa que la elipse tiene su eje mayor vertical.

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$$
$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} = 4$$

Además $c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = \sqrt{9} = 3$.

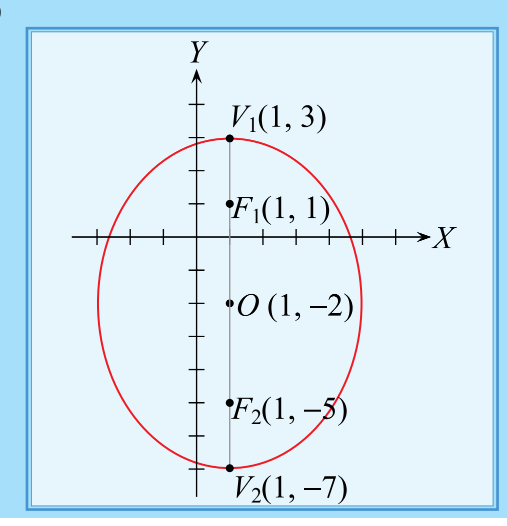
Las coordenadas del centro son $O\,(1, -2)$.

Las coordenadas de los vértices son:

$V_1(1, 3)$
$V_2(1, -7)$

Las coordenadas de los focos son:

$F_1(1, 1)$
$F_2(1, -5)$



Ejemplo 10.37 Elipse y circunferencia.

Una elipse concéntrica con una circunferencia tiene por eje menor el diámetro de dicha circunferencia. El eje mayor de la elipse mide $6u$, y es paralelo al eje X. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-8x-6y+21=0$, determine la ecuación de la elipse y las coordenadas de sus vertices y focos.

Solución:

Trabajamos en primer lugar, con la ecuación de la circunferencia dada:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

Completando los valores para obtener trinomios cuadrados perfectos:

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 25 - 21$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$

A partir de esta ecuación, se tiene que:

$O(4, 3);\ r = 2$

De acuerdo a los datos del problema, la ecuación de la elipse solicitada tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$ (semieje mayor de la elipse).

$d = 2r = 4 = 2b \Rightarrow b = 2$ (semieje menor de la elipse).

Luego, la ecuación de la elipse requerida es:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

A partir de esta ecuación, se obtiene:

$b^2 = a^2 - c^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 9 - 4$

$c = \sqrt{5}$

$V_1\,(1, 3) \qquad F_1(4 - \sqrt{5}, 3)$

$V_2\,(7, 3) \qquad F_2(4 + \sqrt{5}, 3)$

Llevando la ecuación a la forma general:

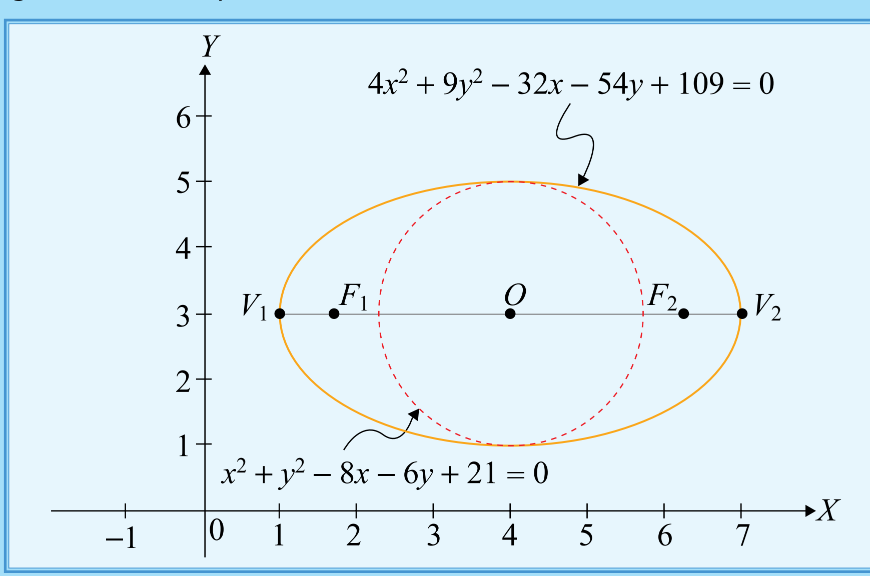
$4(x - 4)^2 + 9(y - 3)^2 = 36$

$4(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 36$

$4x^2 - 32x + 64 + 9y^2 - 54y + 81 = 36$

$4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$

La gráfica de la elipse sería:

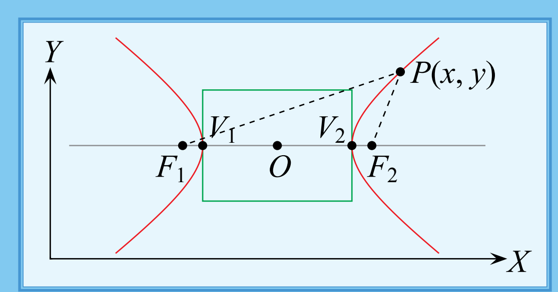


10.2.4 Hipérbola

Definición 10.6 (Hipérbola)

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos F_1 y F_2, es una constante.

Hipérbola $= \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; |d\,(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{constante}\}$



El valor constante al cual se hace referencia en la definición es $2a$ y corresponde a la longitud del **eje transverso** de la hipérbola. La mediatriz de este eje se denomina **eje conjugado** de la hipérbola.

El punto donde se intersecan ambos ejes (que es, evidentemente, el punto medio de los focos) se denomina **centro** de la hipérbola O.

Los puntos donde la hipérbola interseca al eje transverso se denominan **vértices** de la hipérbola V_1 y V_2.

Al igual que en la elipse, se conoce como **distancia focal** a la distancia entre los dos focos $2c$. La distancia entre los vértices es $2a$. A diferencia de la elipse, aquí se tiene $2c > 2a$ (por tanto $c > a$) y se puede considerar $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Este valor se denomina longitud del **semieje conjugado** de la hipérbola.

El segmento de recta perpendicular al eje transverso, que une dos puntos de la hipérbola y que incluye a uno de los focos, se denomina **lado recto** y su longitud es $\frac{2b^2}{a}$.

El cociente $e = \frac{c}{a}$, que es un número mayor que 1, se denomina **excentricidad** de la hipérbola.

Al igual que en la elipse, se considerarán en primer lugar las hipérbolas centradas en el origen de coordenadas y con focos en el eje de abscisas.

Forma canónica de la ecuación de una hipérbola

La ecuación de una hipérbola centrada en el origen, y con focos en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, se puede obtener aplicando la definición:

$|d\,(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ (se supondrá que $d(P, F_1) > d(P, F_2)$)

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a \quad \text{(I)}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = f \quad \text{(II)}$$

Multiplicando las expresiones (I) y (II):

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right)^2 = 2af$$

$$(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) - (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 2af$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = 2af$$

$$4xc = 2af$$

$$f = \frac{2xc}{a}$$

Reemplazando f en (II) y sumando las expresiones (I) y (II):

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\frac{2xc}{a}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$c^2-a^2=\frac{x^2c^2}{a^2}-x^2-y^2$$

$$c^2-a^2=x^2\left[\frac{c^2}{a^2}-1\right]-y^2$$

$$x^2\left[\frac{c^2-a^2}{a^2}\right]-y^2=c^2-a^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión por c^2-a^2:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

Reemplazando c^2-a^2 por b^2, tenemos:

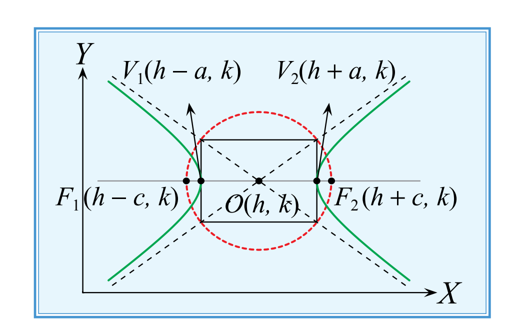
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ecuación de una hipérbola con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Si una hipérbola tiene sus ejes transverso y conjugado paralelos a los ejes de coordenadas, y su centro en el punto $O(h, k)$, se pueden dar los siguientes casos:

- Eje transverso horizontal:

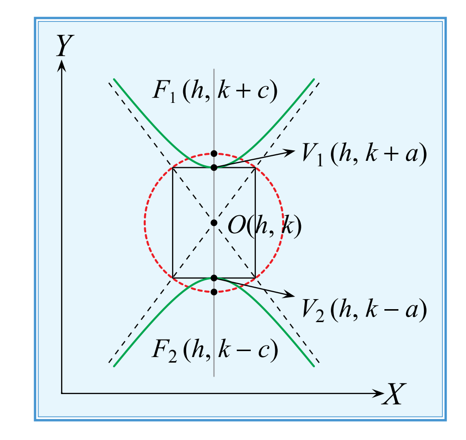
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h \pm a, k)$, y los focos son de la forma $(h \pm c, k)$.

- Eje transverso vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h, k \pm a)$, y los focos son de la forma $(h, k \pm c)$.

En ambos casos, los focos están en la intersección del círculo centrado en $O(h, k)$, y de longitud de radio c, con el eje transverso.

Asíntotas oblicuas de una hipérbola

Para el caso de una hipérbola con eje transverso horizontal, cuyo centro es el origen de coordenadas, la ecuación sería:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando y en la ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to +\infty$, el término $\frac{a^2}{x^2}$ se aproxima a cero, de modo que la expresión radical se aproxima a uno. La gráfica de la hipérbola se aproxima a las asíntotas oblicuas, cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Para el caso de una hipérbola con eje transverso vertical, cuyo centro es el origen de coordenadas, la ecuación sería:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Realizando un procedimiento algebraico similar, esta hipérbola tiene dos asíntotas oblicuas, cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

Si el centro de la hipérbola es $O(h, k)$, considere:

Eje transverso horizontal
Las asíntotas oblicuas tienen las ecuaciones:

$$(y - k) = \frac{b}{a}(x - h) \quad \text{y} \quad (y - k) = -\frac{b}{a}(x - h)$$

Eje transverso vertical
Las asíntotas oblicuas tienen las ecuaciones:

$$(y - k) = \frac{a}{b}(x - h) \quad \text{y} \quad (y - k) = -\frac{a}{b}(x - h)$$

Dos hipérbolas que tienen el mismo conjunto de asíntotas son denominadas **conjugadas**, como es el caso de las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$ y $y^2 - x^2 = 1$.

Rectángulo auxiliar

Las dimensiones de este rectángulo son $2a$ y $2b$; geométricamente, las diagonales de esta figura plana forman parte de las asíntotas oblicuas a las cuales se ha hecho referencia. El área de la superficie de este rectángulo es $4ab$ unidades cuadradas.

Si el rectángulo auxiliar es un cuadrado, esto es $a = b$, a este tipo de hipérbolas que tienen iguales las longitudes de sus semiejes se denominan **hipérbolas equiláteras.**

Forma general de la ecuación de una hipérbola

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$; $A \neq 0$, $B \neq 0$, ésta puede transformarse en otra del tipo $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ó $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, la cual representa la ecuación de una hipérbola con eje transverso horizontal o vertical, respectivamente.

Así, la condición necesaria para que la ecuación cuadrática represente a una hipérbola, es que los coeficientes A y B tengan signos diferentes.

Ejemplo 10.38 Ecuación de una hipérbola.

Encuentre la forma canónica de la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$.

Determine su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas.

Solución:

$$(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 12 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 - (y-2)^2 + 4 - 12 = 0$$

$$(x+1)^2 - (y-2)^2 = 1 - 4 + 12 = 9$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Se trata de una hipérbola con el eje transverso horizontal, con centro en $O(-1, 2)$ y sus semiejes $a = 3$, $b = 3$.

Los vértices son los puntos $V_1(-4, 2)$ y $V_2(2, 2)$.

La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

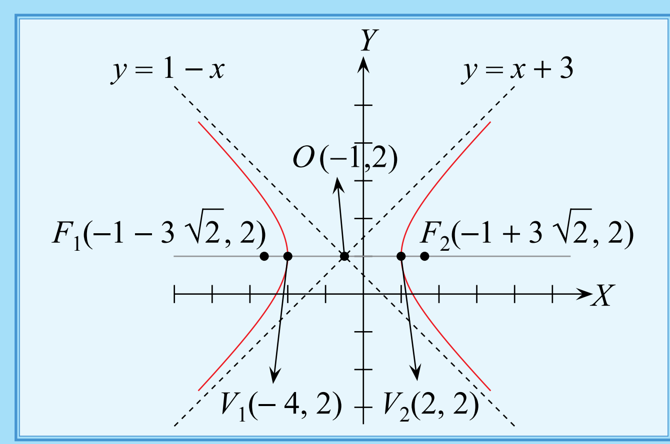
Los focos son $F_1(-1 - 3\sqrt{2}, 2)$ y $F_2(-1 + 3\sqrt{2}, 2)$.

Para hallar las asíntotas se iguala a cero el primer miembro de la ecuación reducida:

$$x + 1 = y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = x + 3$$

$$x + 1 = -y + 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$$

Su gráfica sería:



Ejemplo 10.39 Ecuación de una hipérbola.

Encuentre la forma canónica de la ecuación de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.

Determine su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas.

Solución:

Se asocian los términos que tengan la misma incógnita y se sacan como factores comúnes, el coeficiente del término cuadrático:

$$(4x^2 - 8x) - (9y^2 - 36y) + 4 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

Se completa trinomio cuadrado perfecto en x y y:

$$4(x - 1)^2 - 4 - 9(y - 2)^2 + 36 + 4 = 0$$

Se divide entre -36:

$$\frac{4(x-1)^2}{-36} - \frac{9(y-2)^2}{-36} = 1$$

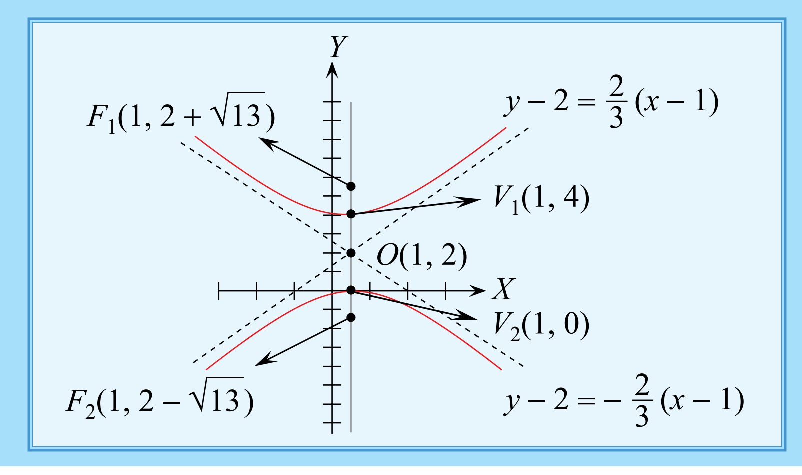
$$\frac{(x-1)^2}{-36/4} - \frac{(y-2)^2}{-36/9} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{-9} - \frac{(y-2)^2}{-4} = 1 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

- Se trata de una hipérbola con el eje transverso vertical, con centro en $O(1, 2)$ y sus semiejes son $a = \sqrt{4} = 2$ y $b = \sqrt{9} = 3$.

- Los vértices son los puntos $(1, 2 \pm 2)$, es decir, $V_1(1, 4)$ y $V_2(1, 0)$.
- La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.
- Los focos son los puntos $F_1(1, 2 + \sqrt{13})$ y $F_2(1, 2 - \sqrt{13})$.
- Asíntotas:

$$\Rightarrow y - 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1): \begin{cases} y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \\ y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1) \end{cases}$$

Su gráfica sería:



Ejemplo 10.40 Circunferencia e hipérbola.

Si los vértices de la hipérbola $9x^2 - 6y^2 - 72x + 24y + 66 = 0$ son los extremos de uno de los diámetros de una circunferencia, determine la ecuación de la circunferencia.

Solución:

Analizamos la ecuación de la hipérbola, a fin de obtener la información necesaria:

$$9x^2 - 6y^2 - 72x + 24y + 66 = 0$$
$$9(x^2 - 8x + 16) - 6(y^2 - 4y + 4) = -66 + 144 - 24$$
$$9(x - 4)^2 - 6(y - 2)^2 = 54$$
$$\frac{(x - 4)^2}{6} - \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

De donde se obtiene que:

$$a^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{6}$$
$$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

$c^2 = b^2 + a^2$
$c^2 = 6 + 9$
$c^2 = 15$
$c = \sqrt{15}$

Las coordenadas de los vértices de la hipérbola cuyo eje transverso es paralelo al eje X son:

$V_1(4 - \sqrt{6}, 2)$ $\qquad$ $V_2(4 + \sqrt{6}, 2)$

A partir de V_1 y V_2 podemos obtener la longitud del diámetro de la circunferencia solicitada determinando la distancia entre V_1 y V_2:

$$d(V_1, V_2) = \sqrt{(4 - \sqrt{6} - 4 - \sqrt{6})^2 + (2 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{24}$$
$$d(V_1, V_2) = 2\sqrt{6}$$

Luego, la longitud del radio es $r = \sqrt{6}$.

Ahora sólo necesitamos las coordenadas del centro de la circunferencia, las mismas que podemos determinar encontrando las del punto medio entre V_1 y V_2, y así:

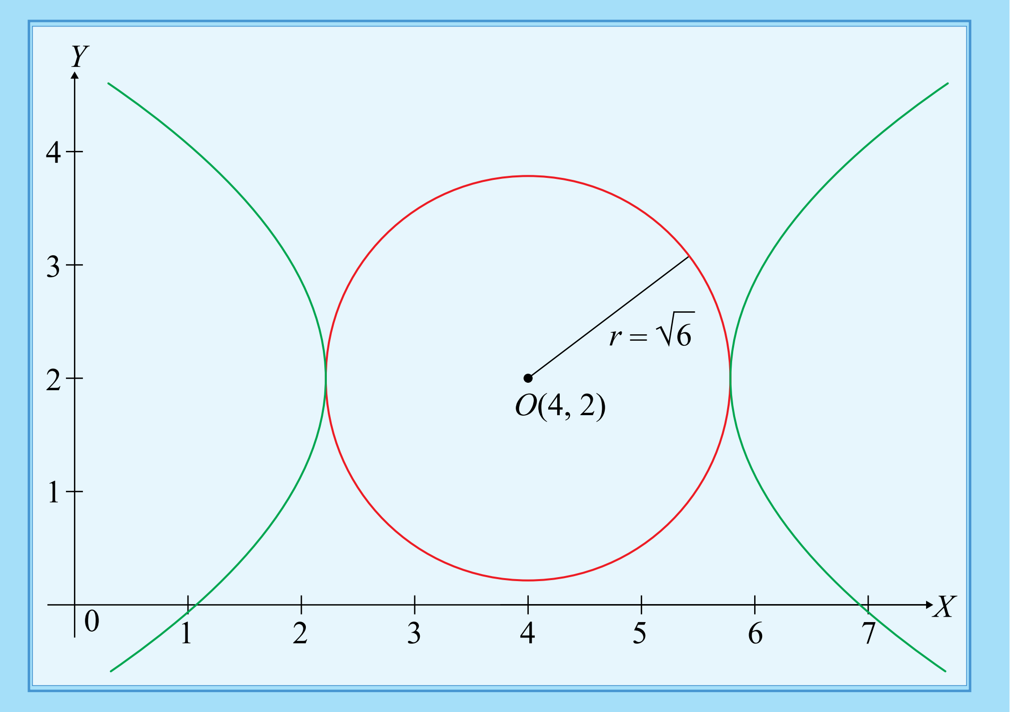
$$h = \frac{4 - \sqrt{6} + 4 + \sqrt{6}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$k = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Luego, el centro de la circunferencia es $O(4, 2)$, con lo cual su ecuación sería:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{6})^2$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 6$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 14 = 0$$

Su gráfica sería:



Ejemplo 10.41 Elipse e hipérbola.

Si se tiene la hipérbola $3x^2 - y^2 - 12x - 2y + 8 = 0$, determine la ecuación de una elipse, tal que sus focos son los vértices de la hipérbola y tal que sus vértices son los focos de la hipérbola.

Solución:

De la ecuación de la hipérbola y completando trinomios cuadrado perfecto, se tiene:

$$3(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) + 8 - 12 + 1 = 0$$

$$3(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = -8 + 12 - 1$$

$$3(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = 3$$

$$\frac{(x - 2)^2}{1} - \frac{(y + 1)^2}{3} = 1$$

Luego:

$a = 1$

$b = \sqrt{3}$

$c = 2$

Por hipótesis:

$c_{\text{HIPÉRBOLA}} = a_{\text{ELIPSE}} = 2$

$a_{\text{HIPÉRBOLA}} = c_{\text{ELIPSE}} = 1$

Luego, en la elipse:

$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$ y su ecuación sería:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

Llevando a la forma general esta ecuación, tenemos:

$3\,(x^2 - 4x + 4) + 4\,(y^2 + 2y + 1) = 12$

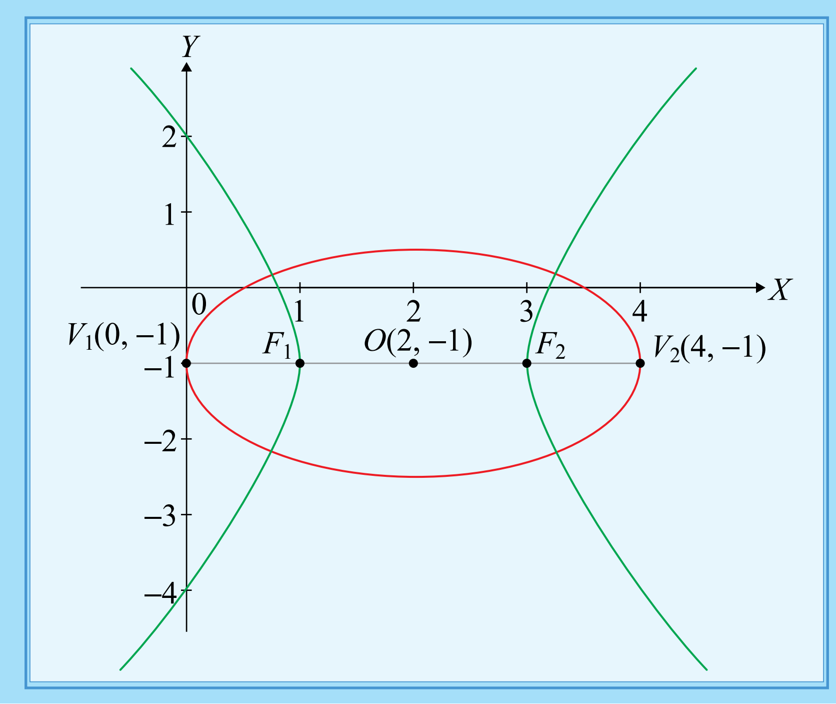
$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$

$a = 2$ $\qquad b = \sqrt{3}$ $\qquad c = 1$

$O(2, -1)$ $\qquad V_1(0, -1)$ $\qquad V_2(4, -1)$

$F_1(1, -1)$ $\qquad F_2(3, -1)$

La gráfica de la elipse sería:



10.2.5 Lugares geométricos

Las definiciones de las cónicas han sido estructuradas a partir de propiedades geométricas relacionadas con las distancias entre puntos, lo cual significa que las cónicas son "lugares geométricos", cuyas ecuaciones pueden ser deducidas tomando como referencia ciertas condiciones, tal como se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.42 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que su distancia al punto $P_1(1, 2)$ es tres veces su distancia al punto $P_2(2, -3)$.

Solución:

Aplicando el teorema de la distancia entre puntos, se debe cumplir que:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 3\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 9(x-2)^2+9(y+3)^2$$

Desarrollando los binomios y agrupando términos semejantes:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4 = 9x^2-36x+36+9y^2+54y+81$$

$$8x^2 + 8y^2 - 34x + 58y + 112 = 0$$

Reduciendo a una forma canónica que sea conocida:

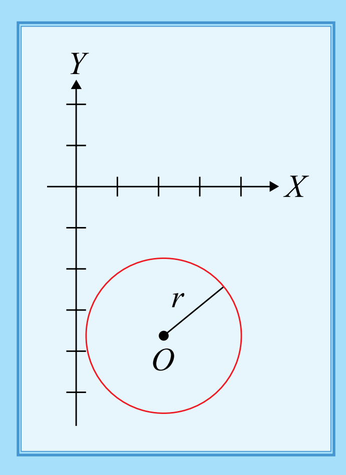
$$8\left(x^2-\frac{34}{8}x\right)+8\left(y^2+\frac{58}{8}y\right) = -112$$

$$8\left(x^2-\frac{34}{8}x+\frac{289}{64}\right)+8\left(y^2+\frac{58}{8}y+\frac{841}{64}\right) = -112+\frac{289}{8}+\frac{841}{8}$$

$$8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+8\left(y+\frac{29}{8}\right)^2 = \frac{117}{4}$$

$$\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+\left(y+\frac{29}{8}\right)^2 = \frac{117}{32}$$

Se trata de una circunferencia con centro en $O\left(\frac{17}{8}, -\frac{29}{8}\right)$ y longitud de radio $r = \sqrt{\frac{117}{32}}$.



Ejemplo 10.43 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico dado por el conjunto de puntos $P(x, y)$ que cumplen con la condición de que su distancia al eje Y es el doble de su distancia al punto $P_1(2, -3)$.

Solución:

Tomamos un punto $P(x, y)$, determinamos su distancia al punto $P_1(2, -3)$ y al eje Y para cumplir con la condición del problema, obteniendo:

$$2\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = |x|$$

Resolviendo la expresión y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$4(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = x^2$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) = x^2$$

$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 + 24y + 36 = x^2$

$3x^2 - 16x + 4y^2 + 24y + 52 = 0$

Completando trinomios cuadrados perfectos tenemos:

$$3\left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}\right) + 4(y^2 + 6y + 9) = -52 + \frac{64}{3} + 36$$

$$3\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + 4(y + 3)^2 = \frac{16}{3}$$

Dividiendo toda la expresión por $\frac{16}{3}$, se obtiene:

$$\frac{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{(y+3)^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Con lo que se puede observar que se trata de una elipse cuyo eje mayor es horizontal con las siguientes características:

$a^2 = \frac{16}{9}$ $\quad b^2 = \frac{4}{3}$ $\quad c^2 = a^2 - b^2$

$a = \frac{4}{3}$ $\quad b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad c^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{3}$

$c^2 = \frac{4}{9}$

$c = \frac{2}{3}$

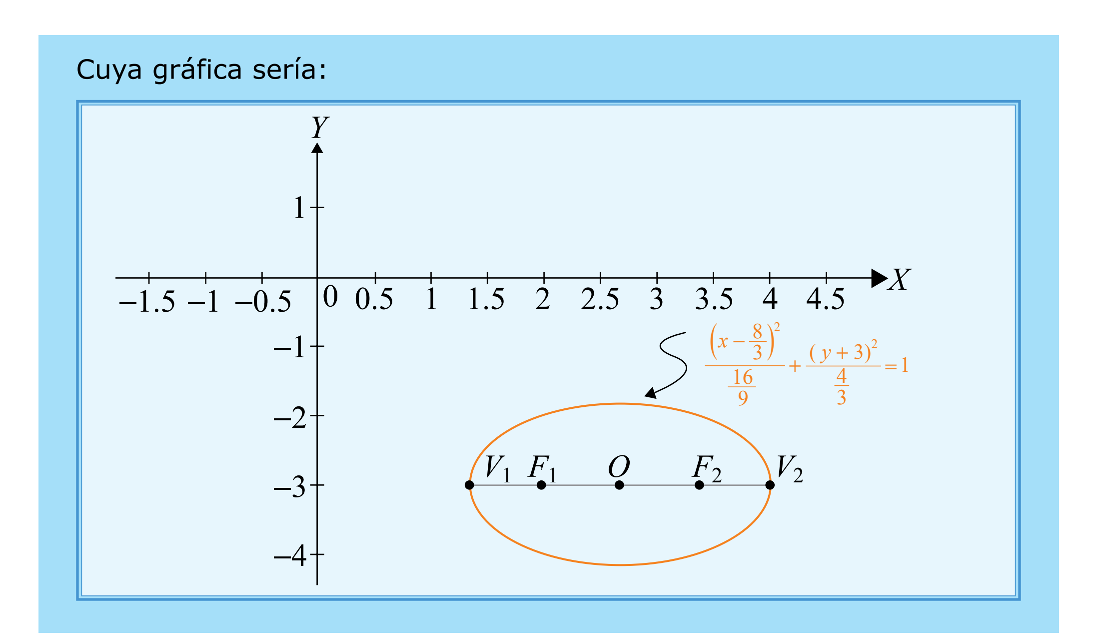
Además:

$O\left(\frac{8}{3}, -3\right)$

$V_1\left(\frac{4}{3}, -3\right)$ $\quad V_2\,(4, -3)$

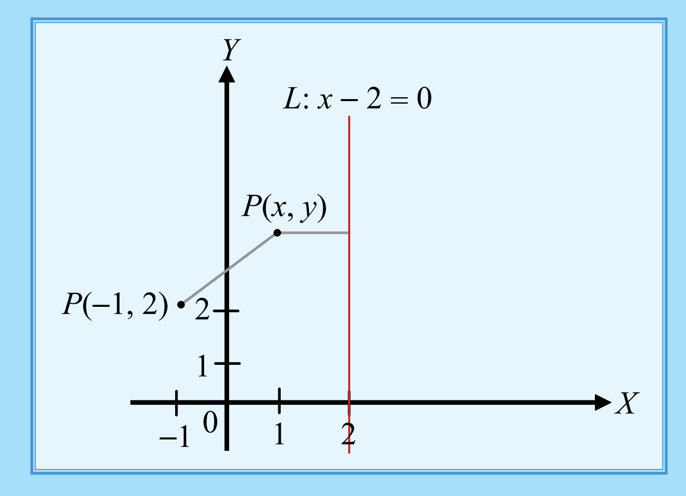
$F_1\,(2, -3)$ $\quad F_2\left(\frac{10}{3}, -3\right)$

Cuya gráfica sería:



Ejemplo 10.44 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos en el plano, tales que su distancia al punto $(-1, 2)$ sea el doble de la distancia a la recta $L: x - 2 = 0$.



Solución:

Determinamos la distancia de los puntos del plano $P(x, y)$ al punto $P(-1, 2)$ y a la recta $x = 2$, para luego igualarlas con la condición dada:

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 2\,|x-2|$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4(x-2)^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4(x^2 - 4x + 4)$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4x^2 - 16x + 16$

$3x^2 - 18x - y^2 + 4y + 11 = 0$

Completando trinomios cuadrados perfectos y analizando esta ecuación, tenemos:

$3(x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) + 11 - 27 + 4 = 0$

$3(x-3)^2 - (y-2)^2 = 12$

$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

Con lo que se puede concluir que esta ecuación representa una hipérbola cuyo eje transverso es horizontal y que tiene las siguientes características:

$O(3, 2)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

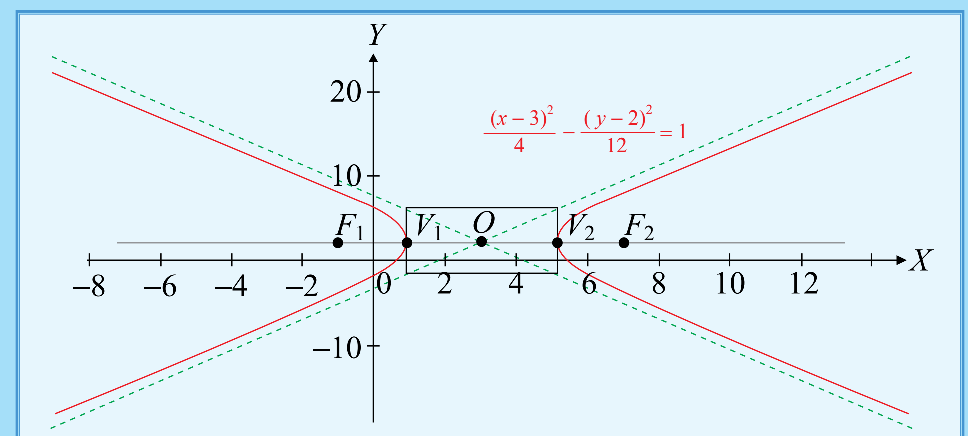
$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4$

$V_1(1, 2)$ $\quad V_2(5, 2)$

$F_1(-1, 2)$ $\quad F_2(7, 2)$

La siguiente gráfica resume las características anotadas:



Ejemplo 10.45 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos $P_1(2, 2)$ y $P_2(10, 2)$ es 6.

Solución:

De la información proporcionada, se puede deducir que este lugar geométrico corresponde a una hipérbola.

Los puntos P_1 y P_2 serían sus focos, por lo tanto su centro es $O(6, 2)$ y su eje transverso es horizontal.

$$|\overline{PP_1} - \overline{PP_2}| = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$c = \overline{OP_1} = \overline{OP_2} = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

La ecuación de la hipérbola sería:

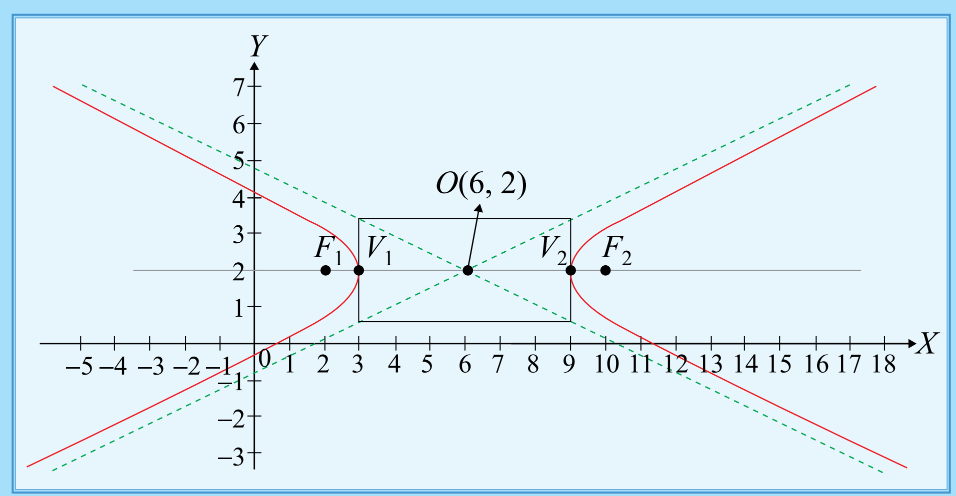
$$\frac{(x-6)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

Cuyos elementos son:

$V_1(3, 2)$ $V_2(9, 2)$

$F_1(2, 2)$ $F_2(10, 2)$

Su gráfica sería:



10.2.6 Excentricidad

El conjunto de los puntos $P(x, y)$, tales que la distancia entre P y el foco F, dividida para la distancia entre P y la recta directriz L, es una constante positiva e denominada excentricidad, satisfacen la siguiente ecuación:

$$|d(P, F)| = e\,|d(P, L)|$$

La cual representa un lugar geométrico en el plano denominado cónica, de acuerdo a los siguientes casos:

Si $e = 0$, se trata de una circunferencia.
Si $e = 1$, se trata de una parábola.
Si $0 < e < 1$, se trata de una elipse.
Si $e > 1$, se trata de una hipérbola.

10.1 Rectas en el plano

1. Determine la distancia y el punto medio entre los siguientes pares de puntos:

   a. $(1, 2)$; $(-2, 3)$
   b. $(0, 3)$; $(1, 5)$
   c. $(-2, -1)$; $(-3, 4)$
   d. $(2, 4)$; $(3, 4)$
   e. $(-4, 6)$; $(-7, 6)$
   f. $(a, 1)$; $(2a, 1)$; $a \in \mathbb{R}$
   g. $(5a, 2a)$; $(a, 3a)$; $a \in \mathbb{R}$

2. Encuentre las ecuaciones paramétricas, Punto–Pendiente y general de la recta que contiene los siguiente pares de puntos:

   a. $(-2, 3)$; $(-3, 1)$
   b. $(2, 0)$; $(4, 5)$
   c. $(-1, 1)$; $(1, 1)$
   d. $(-2, 4)$; $(1, 4)$
   e. $(-4, 5)$; $(-4, 2)$

3. Halle la ecuación de una recta si se conoce que contiene el punto $(1, 3)$ y tiene pendiente 9.

4. Halle la ecuación de una recta que contiene el punto $(0, 6)$ y es:

   a. Paralela al eje X.
   b. Paralela al eje Y.
   c. Paralela a la recta $3x - 2y = 6$.
   d. Perpendicular a la recta $-2x + y - 1 = 0$.

5. Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA. En caso de ser VERDADERA, DEMUÉSTRELA; y en caso de ser FALSA, justifique su respuesta con un CONTRAEJEMPLO.

   a. El vector (a, b) es paralelo a la recta definida por la ecuación $ax+by+c=0$.
   b. El vector $(2a, 2b)$ es perpendicular a la recta definida por la ecuación $ax+by+c=0$.
   c. Si se tienen las rectas L_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, tales que $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces para algún k real se cumple que $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$ y $C_1 \neq kC_2$.
   d. Si L es una recta que tiene ecuación $y=kx+b$, entonces la pendiente de la recta L es k.
   e. Si $W = \{(x, y) \,/\, x = x_0 + at \wedge y = y_0 + bt,\ t \in \mathbb{R}\}$, entonces W es una recta paralela al vector (a, b) que contiene al punto (x_0, y_0).

6. Determine la ecuación de la recta vertical cuya intersección con el eje X es el punto $P(-1/2, 0)$.

7. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $(5, -1)$ y que es paralela a la recta $2x + y - 1 = 0$.

8. Se definen los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el plano, tales que $\mathbf{v}_1=(2, -3)$ y $\mathbf{v}_2=(4,1)$. Determine la ecuación de la recta L que es paralela al vector $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ y contiene al punto $P(1,2)$.

9. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $(3, -5)$ y es paralela al vector $(-4, 2)$.

10. Si se tiene una recta L que contiene al punto $P_0(1, 2)$ y que es perpendicular al vector $\mathbf{v}=(-2, -4)$ entonces es VERDAD que:

    a) $P(-1, -2) \in L$

    b) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y - 5 = 0\}$

    c) La pendiente de L es -2.

    d) L es perpendicular a la recta $2x + 5y - 1 = 0$.

11. Una recta contiene los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$, entonces su intersección con el eje X es:

    a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 2 e) 3

12. La ecuación de la recta que tiene la misma intersección con el eje X que la recta $2x - 5y + 6 = 0$, y que es paralela a la recta $4x - 2y - 5 = 0$, es:

    a) $2x - y - 6 = 0$ b) $x - 2y + 3 = 0$ c) $2x + y + 6 = 0$

    d) $2x - y + 6 = 0$ e) $2y - x - 3 = 0$

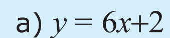
13. Dada la ecuación que define a la recta L: $3x + 2y - 5 = 0$, entonces es verdad que:

    a) L tiene pendiente $3/2$.
    b) L interseca al eje Y en el punto $(0, -5)$.
    c) L es perpendicular a la recta $2x - 3y - 15 = 0$.
    d) L es paralela a la recta $3x - 2y + 5 = 0$.
    e) El punto $(3, 2) \in L$.

14. Sea f una función de variable real con regla de correspondencia $f(x) = ax + b$, entonces es verdad que:

    a) Si $a = 0$, entonces f es estrictamente creciente.
    b) Si $b = 0$, entonces f es par.
    c) Si $a < 0$, entonces f es decreciente.
    d) $f(a)$ es igual a $a^2 + b^2$.

15. El gráfico adjunto representa a una recta cuya ecuación es:



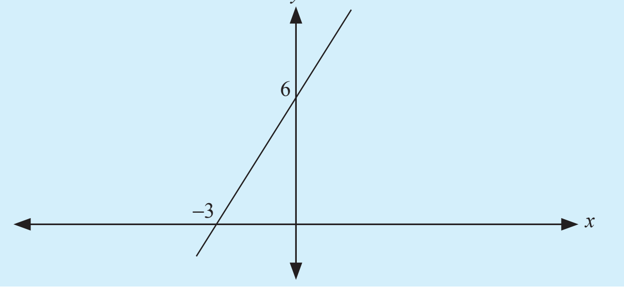
a) $y = 6x+2$

b) $y = -3x+6$

c) $y = 2x+6$

d) $y = 6x-3$

e) $y = 4x+6$



16. Hace 6 años se compró una casa por $59 000. Este año fue avaluada en $95 000. Suponiendo que el valor de la casa está relacionado linealmente con el tiempo, determine cuál de las siguientes expresiones relaciona el valor de la casa y($) para cualquier tiempo t(años) después de la fecha de compra:

a) $y = 6000t + 59000$
b) $y = 6000t - 59000$
c) $y = 5000t - 59000$
d) $y = 5900t + 59000$

17. Una maquinaria agrícola, cuyo valor inicial era de $80 000, se deprecia sobre su tiempo de vida útil de 10 años. Al final de los 10 años, el equipo tiene un valor de $2 000. Exprese y($) como una función de x(años).

18. En el problema anterior, el valor de la maquinaria para cuando el tiempo de vida útil sea de 5 años, es:

a) $40 000
b) $41 000
c) $52 000
d) $35 000
e) $21 000

19. Calcule la distancia entre la recta L: $3x-4y+12=0$ y el punto $P(4,-1)$.

20. Si una recta tiene como su punto más cercano al origen a $P_1(1, 3)$ entonces, una de las siguientes proposiciones es FALSA, identifíquela.

a) La pendiente de la recta es $-1/3$.
b) Un vector normal a L es $\mathbf{n}=(1, 3)$.
c) El punto $P(2, 3) \in L$.
d) La ecuación de L es $x + 3y - 10 = 0$.
e) La distancia de la recta al origen es igual a $\sqrt{10}$.

21. Si el punto $P(3/2, 1/2)$ pertenece a la recta cuya distancia desde su punto de intersección con el eje X al origen es 2 veces su distancia desde su punto de intersección con el eje Y al origen, entonces determine la ecuación de dicha recta.

22. Calcule la distancia entre las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 4y = 1$ y $3x - 4y = 10$.

23. Determine las ecuaciones de las rectas que tienen pendientes de -2 y equidistan 4 unidades del punto $(-2, 3)$.

24. Considere la recta cuya ecuación es $x+2y+k=0$. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la recta forme con los ejes coordenados un triángulo cuya área sea de 16 unidades cuadradas.

25. Considere la recta cuya ecuación es L: $3x+ky-2=0$. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la distancia del punto $(1, 1)$ a L sea:

    a. Igual a 2 unidades.
    b. Menor que 5 unidades.
    c. Mayor que 1 unidad.

10.2 Secciones cónicas

26. La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ representa en el plano $\mathbb{R}^2$:

    a) Un punto con coordenadas $(2, -3)$.
    b) Una circunferencia con centro en $(-2, 3)$ y radio 2.
    c) Una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 16.
    d) Una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 4.
    e) Un conjunto vacío.

27. Se conoce que una circunferencia tiene como extremos de uno de sus diámetros, los puntos $(5, -2)$ y $(-3, -2)$. Determine su radio y su ecuación canónica.

28. Dadas dos circunferencias cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, entonces es verdad que:

    a) La distancia mínima entre ellas es 1.
    b) La distancia máxima entre ellas es $\sqrt{26} + 5$.
    c) Las dos circunferencias son tangentes al eje Y.
    d) El diámetro de una de ellas tiene longitud 1.
    e) Las dos circunferencias son tangentes entre sí.

29. Determine la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia $(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 3$ y que es perpendicular a la recta $3x - 6y + 1 = 0$.

30. Una circunferencia se ubica en el I Cuadrante, de tal forma que es tangente a los ejes coordenados. Su centro es el punto $(2, 2)$. Determine su ecuación canónica.

31. De acuerdo a la posición de la recta $2x - y + 3 = 0$ respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3 = 0$, se puede afirmar que:
    a. La recta es secante a la circunferencia.
    b. La recta es tangente a la circunferencia.
    c. La recta es externa a la circunferencia.
    d. La intersección entre la recta y la circunferencia tiene tres puntos.

32. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(4, 1)$ y que es tangente a la recta L: $2x - 3y = 15$.

33. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ y que contiene al origen de coordenadas.

34. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

35. Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto $(1, 1)$.

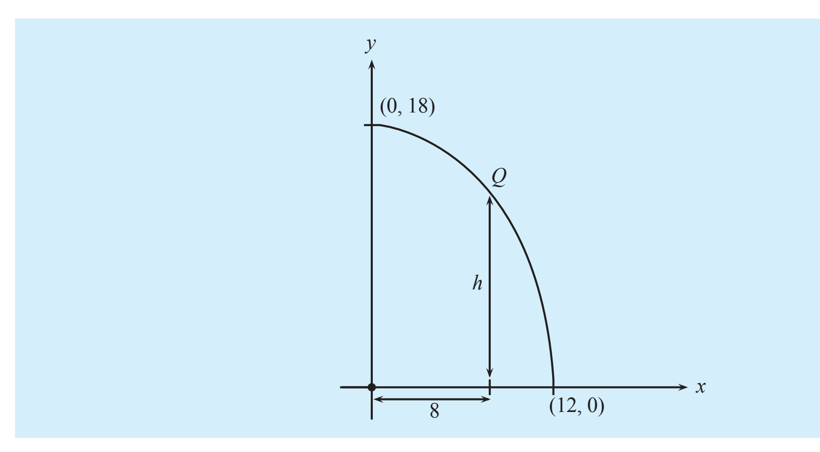
36. Calcule la menor distancia que hay entre la recta $4x+3y=15$ y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

37. Encuentre la ecuación canónica y general de una parábola que tiene foco en $(2, 3)$ y su directriz es $y = -1$.

38. Determine la ecuación de la parábola de eje vertical, que tiene su vértice en el punto $(1, 0)$ y que contiene al punto $(-3, 2)$.

39. La altura h de un punto Q que pertenece a un arco parábolico de $18m$ de altura máxima y $24m$ de base, situado a una distancia de $8m$ del centro de la base del arco, es:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 26 e) 14



40. Determine las coordenadas del foco de la parábola de ecuación $2x^2 - 4x + y + 4 = 0$.

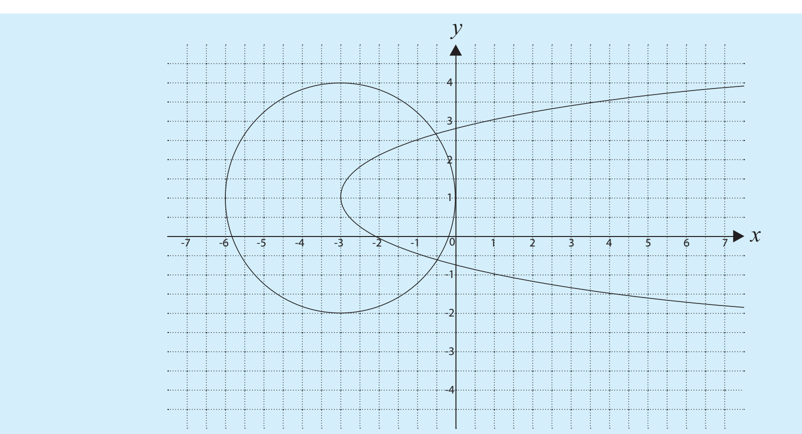
41. Una circunferencia C tiene por ecuación general $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0$. Una parábola tiene como vértice el centro de C y su directriz es paralela al eje X. Si la parábola contiene al punto $(1, 2)$, entonces las coordenadas de su foco son:

a) $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ b) $\left(1, \frac{9}{2}\right)$ c) $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ d) $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$ e) $\left(-1, -\frac{7}{2}\right)$

42. Encuentre, de ser posible, la intersección entre la recta $y = -x - 1$ y la cónica:

a) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ b) $(x - 2)^2 = y - 1$ c) $-(y + 1)^2 = x$

43. Escriba la ecuación canónica y la ecuación general para las cónicas cuyas gráficas se muestran en la siguiente figura, respectivamente:



44. Determine la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $V_1(0, 2)$, $V_2(4, 2)$ y cuyo eje menor tiene longitud 2.

45. Si una elipse tiene centro en el punto $(2, 3)$, su eje mayor es paralelo al eje X, la longitud del eje menor es 4 y la distancia desde uno de los vértices al centro es $\sqrt{13}$ entonces es VERDAD que uno de los siguientes puntos pertenece a la elipse:

a) $(4, 5)$ b) $(3, 0)$ c) $(2, 1)$ d) $(5, 3)$ e) $(4, \sqrt{10})$

46. La ecuación $3x^2 - 4y^2 + 16y - 18 = 0$ representa:
a) Una elipse con centro en $(0, -2)$.
b) Una hipérbola con centro en $(0, 2)$.
c) Ningún lugar geométrico real.
d) Un punto en el plano.
e) Una parábola con vértice en el punto $(-1/2, 2)$.

47. Determine los vértices, los focos, asíntotas, excentricidad, dimensiones del rectángulo auxiliar y centro de la hipérbola $6y^2-4x^2+12y+16x-34=0$. Dibuje la hipérbola con todos los elementos encontrados.

48. El conjunto de puntos del plano, tales que su distancia al punto $(1, 1)$ es el doble de su distancia al eje X, corresponde a:
a) Una elipse con centro en el punto $(1, 1)$.
b) Una hipérbola con centro en el punto $(1, -1/3)$.
c) Una parábola cuya recta directriz es $y = 1$.
d) Una circunferencia de radio 2.
e) Una elipse cuyo eje mayor tiene una longitud de 4.

49. Determine el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x, y)$, tales que su distancia al eje X es el triple que su distancia al punto $P(2, -1)$.

50. Determine la ecuación que describe los puntos en el plano, tales que su distancia al punto $(2, 1)$ es igual al doble de la distancia a la recta L: $y + 1 = 0$.

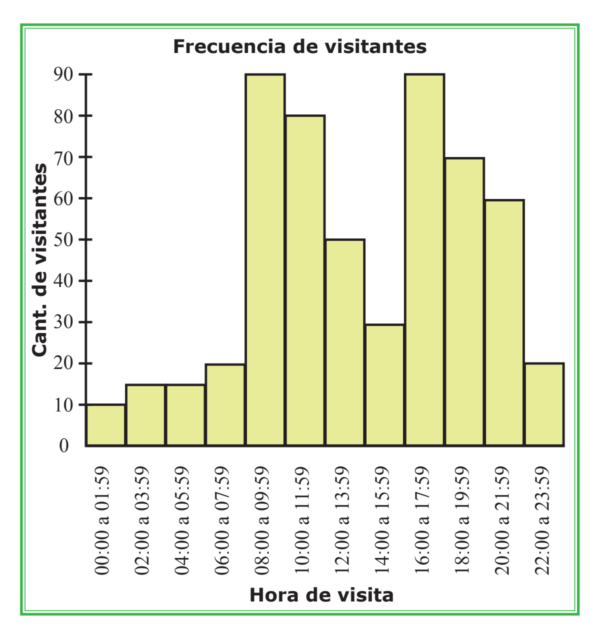


Capítulo 11

Estadística y Probabilidades

Introducción

Generalmente la estadística se asocia a un conjunto de datos organizados en tablas o en gráficos, referentes a geografía, demografía, economía, mercados, salud, entre otros temas. Pero la estadística es mucho más amplia de lo que parece. Es una ciencia tan antigua como la matemática, y por su utilidad, es apoyo de todas las demás ciencias. La estadística ayuda a que los administradores tomen las mejores decisiones en tiempos de incertidumbre.



La historia de la estadística se resume en tres grandes etapas, a saber:

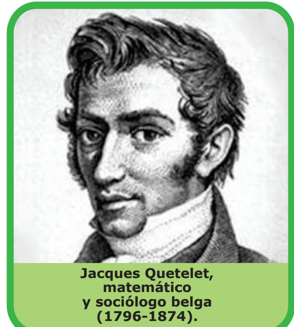
Primera Etapa (Los Censos): La necesidad de llevar un control de la población y las riquezas existentes en un reino o país es una de las primeras aplicaciones de la estadística. De acuerdo al historiador griego Herodoto, los faraones lograron recopilar hacia el año 3050 a.C. datos relativos a la población y la riqueza de Egipto. Esta etapa se caracterizó por ser netamente descriptiva de la información.

Segunda Etapa (De la descripción de los conjuntos a la aritmética política): Luego de superar la etapa descriptiva, surgieron obras como las de Graunt, Petty y Halley. El penúltimo es autor de la famosa obra *"Aritmética Política"*. Chaptal, ministro francés del interior, publicó en 1801 el primer censo general de población y desarrolló estudios industriales sobre producción, haciéndose sistemáticos durante las dos terceras partes del siglo XIX.

Tercera Etapa (Cálculo de Probabilidades): El cálculo de probabilidades surge como una poderosa herramienta de análisis para estudiar fenómenos económicos y sociales, y otros cuyas causas son difíciles de controlar.

Durante cierto tiempo, la teoría de las probabilidades limitó su aplicación a los juegos de azar, y hasta el siglo XVIII no comenzó a aplicarse a los grandes problemas científicos.

La estadística que conocemos hoy en día, debe gran parte de su realización a los trabajos matemáticos de aquellos hombres que desarrollaron la teoría de las probabilidades, con la cual se adhirió la estadística a las ciencias formales.


Jacques Quetelet, matemático y sociólogo belga (1796-1874).

De aquí, que la estadística es la ciencia que recolecta, organiza, describe e infiere información para el análisis e interpretación de los fenómenos que nos rodean.

11.1 Estadística descriptiva

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar el rol de la estadística en la sociedad y su aplicación en el análisis de información.
* Distinguir entre estadística descriptiva y estadística inferencial.
* Identificar los errores más comunes cuando se analiza información estadística.
* Definir los términos estadísticos, los tipos de variables y escalas de medición frecuentemente más empleados.

La estadística es la ciencia cuyo objetivo es reunir información cuantitativa concerniente a individuos, grupos, series de hechos, etc., para deducir de su análisis, conclusiones precisas o previsiones para el futuro.

Algunos confunden comúnmente los términos asociados con la estadística, debido a que esta palabra etimológicamente tiene tres significados: en primer término se usa para referirse a la información estadística; también se utiliza para referirse al conjunto de técnicas y métodos que se utilizan para analizar la información estadística; y el término estadístico, en singular y en masculino, se refiere a una medida derivada de una muestra.

Capítulo 11

Estadística y Probabilidades

Para su mejor estudio, la estadística se ha dividido en dos grandes ramas: la estadística descriptiva y la estadística inferencial.

La **estadística descriptiva** consiste en la presentación de datos en forma de tablas y gráficas. Ésta comprende cualquier actividad relacionada con los datos y está diseñada para resumir o describir los mismos sin factores pertinentes adicionales; esto es, sin intentar inferir nada que vaya más allá de los datos como tales.

Los métodos estadísticos tradicionalmente se utilizan para propósitos descriptivos, para organizar y resumir datos numéricos. La estadística descriptiva trata de la tabulación de datos, su presentación en forma gráfica o ilustrativa y el cálculo de medidas descriptivas.

Estas técnicas estadísticas se aplican de manera amplia en control de calidad, contabilidad, mercadotecnia, estudios de mercado, análisis deportivos, administración de instituciones, educación, política, medicina, y por aquellas personas que intervienen en la toma de decisiones.

La **estadística inferencial** se deriva de muestras, que son subconjuntos de una población con alguna característica de interés. A partir de las observaciones hechas a una parte de un conjunto numeroso de elementos, se infiere acerca de las características que posee la población. Esto implica que su análisis requiere de generalizaciones que van más allá de los datos.

Como consecuencia, la característica más importante del reciente crecimiento de la estadística ha sido un cambio en el énfasis de los métodos que sirven para hacer generalizaciones. La estadística inferencial investiga o analiza una población partiendo de una muestra tomada.

El **método estadístico** es el conjunto de los procedimientos que se utilizan para medir las características de los datos, para resumir los valores individuales y para analizarlos, a fin de extraerles el máximo de información; es lo que se conoce como método estadístico.

Un método estadístico contempla las siguientes seis etapas:

1. Definición del problema.
2. Recopilación de la información existente.
3. Clasificación y control de calidad de los datos.
4. Codificación y digitación.
5. Análisis.
6. Presentación.

Errores estadísticos comunes. Existe la posibilidad de cometer errores al momento de recopilar los datos que serán procesados, así como durante el cómputo de los mismos. No obstante, hay otros errores que no tienen que ver con la digitación y no son tan fáciles de identificar.

Algunos de estos errores son:

- **Sesgo:** Hay que ser completamente objetivo y no tener ideas preconcebidas antes de comenzar a estudiar un problema, evitando que puedan influir en la recopilación y en el análisis de la información. En estos casos se dice que hay un sesgo cuando el individuo da mayor peso a los datos que apoyan su opinión, que a aquellos que la contradicen. Un caso extremo de sesgo sería la situación donde primero se toma una decisión y después se utiliza el análisis estadístico para justificar la decisión ya tomada.
- **Datos no comparables:** Establecer comparaciones es una de las partes más importantes del análisis estadístico, pero es extremadamente importante que tales comparaciones se hagan entre datos que se presten a ello.
- **Proyección descuidada de tendencias:** La proyección simplista de tendencias pasadas hacia el futuro, es uno de los errores que más ha desacreditado el uso del análisis estadístico. Hay que tener en cuenta que cualquier estadística que se realice es una fotografía instantánea, por lo cual deben emplearse los históricos de otras estadísticas previamente realizadas antes de emitir cualquier resultado concluyente sobre el fenómeno o hecho que se está estudiando.
- **Muestreo incorrecto:** En la mayoría de los estudios, la información disponible es tan extensa que se hace necesario inferir a partir de muestras, para derivar conclusiones acerca de la población a la que pertenece la muestra. Si la muestra se selecciona correctamente, tendrá básicamente las mismas propiedades que la población de la cual fue extraída; pero si el muestreo se realiza incorrectamente, entonces puede suceder que los resultados no sean representativos de la realidad poblacional.

Cabe anotar que en este texto nos limitaremos a tratar la estadística descriptiva, para lo cual definiremos algunos conceptos básicos asociados a esta rama.

Conceptos básicos

Elemento o ente: Cualquier elemento que aporte información sobre la característica que se estudia. Así, si estudiamos la altura de los niños de una clase, cada alumno es un ente; si estudiamos el precio de la vivienda, cada vivienda es un ente.

Estadística y Probabilidades

Población: Conjunto o colección de los entes de interés. Cada ente presenta características determinadas, observables y medibles. Por ejemplo, en el elemento persona: nombre, edad, género, peso, nacionalidad, etc. Por lo tanto, la estadística se preocupa de estudiar las características de los elementos constituyentes de la población, y estudia las posibles relaciones y las regularidades que presenta la población a partir de estas características.

La población se puede clasificar, según su tamaño, en dos tipos:

- **Población finita:** El número de elementos es finito. Por ejemplo: la cantidad de alumnos de una escuela.
- **Población infinita:** El número de elementos es infinito o tan grande que pueden considerarse en cantidad infinita. Por ejemplo: las estrellas de la Vía Láctea.

Muestra: La mayoría de los estudios estadísticos, no se realizan sobre la población por los altos costos en tiempo y dinero, sino sobre un subconjunto o una parte de ella denominada **muestra**, partiendo del supuesto de que este subconjunto presenta el mismo comportamiento y características de la población. Por ejemplo, para la población "estudiantes de las escuelas de Guayaquil", una muestra podría ser "el conjunto de niños de una escuela en particular".

Variable: Es una característica que se asocia a los elementos de una muestra o población. Tiene la propiedad de poder ser medida u observada. Su expresión numérica es el **dato**. Las variables se pueden clasificar en dos tipos:

Variables cuantitativas: Se expresan por medio de números y pueden ser:

- **Discretas:** Sólo se miden por medio de valores puntuales. Por ejemplo: número de materias, cantidad de médicos en un hospital; y,
- **Continuas:** Pueden tomar cualquier valor intermedio entre dos números, es decir, intervalos. Por ejemplo: el peso y la estatura de una persona.

Variables cualitativas o atributos: No se pueden expresar numéricamente, sino por medio del nombre de la característica en estudio; se pueden clasificar en:

- **Ordinales:** Aquellas que sugieren una ordenación. Por ejemplo: nivel de estudio, posición de los ganadores de un concurso; y,

- **Nominales:** Aquellas que sólo admiten una mera ordenación alfabética, pero no establecen orden por su contenido. Por ejemplo: género, estado civil, color de cabello.

Las variables también se pueden clasificar en:

- **Variables unidimensionales:** Sólo recogen información sobre una característica. Por ejemplo: edad de los alumnos de una clase.
- **Variables bidimensionales:** Recogen información sobre dos características de la población. Por ejemplo: edad y estatura de los alumnos de una clase.
- **Variables multidimensionales:** Recogen información sobre tres o más características. Por ejemplo: edad, estatura y peso de los alumnos de una clase.

Existen otros tipos de variables que se emplean en estadística, como son las variables independientes, variables dependientes, variables explicativas, variables de respuesta, entre otras, que no forman parte del estudio de este capítulo, pero que se pueden analizar con más detenimiento en un curso formal de estadística.

Antes de realizar un estudio estadístico, es importante tener claridad respecto de aspectos tales como: ¿qué se está midiendo?, ¿cómo se está midiendo?, ¿para qué se está midiendo?, ¿por qué se está midiendo?, ¿quién está midiendo?, ¿en qué momento se realizarán las mediciones? En síntesis, el proceso de medición genera el tipo de variable y no su característica o propiedad por la cual está siendo estudiada.

Escala de medición de variables

Entenderemos por **medir**, el proceso que se realiza al asignar números a objetos, fenómenos o características, según ciertas reglas de cuantificación. Se asocia un número y sólo uno (correspondencia biunívoca) al objeto o fenómeno que se quiere medir.

Toda **medida** de una variable está referida a una escala, que es una regla o patrón que permite asociar números a los objetos o fenómenos. Los tipos de medida están representados en el siguiente cuadro:

ESCALA	DEFINICIÓN OPERACIONAL	EJEMPLO
Nominal	Las observaciones del atributo de la variable son clasificadas en categorías, solamente se puede verificar la igualdad entre las categorías. Nombran, pero no miden la variable.	Género: masculino/femenino. Estado civil: casado/soltero/divorciado/viudo/unión libre.

Ordinal	Se pueden establecer relaciones de orden entre los datos de la variable: mayor, menor o igual. Contiene a la escala nominal.	Nivel socio económico: alto/medio/bajo. Rendimiento académico: excelente/regular/ deficiente.
De intervalo	Ordenan las medidas y permiten realizar comparaciones entre dos medidas. Usan un cero relativo.	Temperatura: 10 ºC, 12 ºF. El rendimiento en una prueba puede estar en el intervalo $[0, 20]$.
De razón	Se pueden establecer razones entre los datos. Posee cero absoluto.	Peso, estatura.

11.2 Organización de los datos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un conjunto de datos, organizar la información empleando tablas de frecuencia.
* Interpretar información estadística en forma tabular a nivel de frecuencia relativa y frecuencia acumulada.

Una vez que las variables han sido medidas, estos valores pasan a constituir el conjunto de datos estadísticos, que deberán ser procesados y analizados por el investigador. Para el efecto, existen algunas técnicas que serán estudiadas en esta sección.

Tablas de frecuencias

Según el número de observaciones y el rango de la variable, podemos clasificar las tablas de la siguiente manera:

Tablas de tipo I: El tamaño de la población o muestra es pequeño. Por ejemplo, las edades de 6 personas: $15, 18, 19, 21, 24, 28$. Sólo se ordenan de manera creciente o decreciente.
Tablas de tipo II: El tamaño de la población o muestra es grande y el rango de la variable es pequeño.

Ejemplo 11.1 Tabla de tipo II.

El número diario de llamadas telefónicas realizadas en una casa durante 30 días, se encuentra tabulado así:

2	4	1	3	2	5
3	1	3	4	1	1
1	5	3	1	2	3
2	1	5	3	4	2
3	4	1	2	5	5

Sea la variable el número diario de llamadas telefónicas, podemos observar que el rango de la variable está entre 1 y 5 llamadas, y que el total de datos es 30 llamadas. Por lo tanto, la tabla de frecuencia se estructura siguiendo los pasos 1 y 2:

1. Ordene los datos en forma decreciente o creciente por cada columna y realice el conteo:

1	1	2	3	3	5
1	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
1	2	2	3	4	5
1	2	3	3	4	5

→

Nº. de llamadas	Conteo
1	||||||||
2	||||||
3	|||||||
4	||||
5	|||||

2. Estructure la tabla de frecuencia relacionando el conteo con un número (frecuencia):

Nº. de llamadas	Frecuencia
1	8
2	6
3	7
4	4
5	5
Total	30

Tablas de tipo III (Tabla de intervalos): El tamaño de la población o muestra es grande y el rango de la variable es grande.

Ejemplo 11.2 Tabla de tipo III.

La edad de un grupo de 30 personas se encuentra tabulada así:

22	23	44	10	28	40
15	43	38	7	24	31
28	12	5	20	18	47
50	27	14	16	30	26
55	27	42	50	27	36

Sea la variable, la edad de las personas, observamos que los valores están dispersos y que el rango de la variable está entre 5 y 55, por lo cual, si se quiere elaborar una tabla, ésta debe ser de intervalos. Ahora, los pasos que se deben seguir son:

1. Determine el total de datos. En este caso $N = 30$.

2. Calcule el rango R de la variable con la expresión $R = X_{máx} - X_{mín}$, en los cuales están considerados el valor máximo y mínimo de dicha variable. Para el ejemplo, $R = 55 - 5 = 50$.

3. Determine el número de intervalos, entre 10 y 15. En este ejemplo, se tomarán 13 intervalos.

4. Calcule la amplitud de los intervalos $i = \frac{R}{\text{Nº. Intervalos}}$, aproximando al entero más cercano. Para el ejemplo, $i = \frac{50}{13} \approx 4$.

5. Construya la tabla considerando que los intervalos serán siempre cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha $[L_{i-1}, L_i)$. Para el primer intervalo $[L_1, L_2)$, L_1 es el mínimo valor de los datos y L_2 es igual a $L_1 + i$. Para el segundo intervalo $[L_2, L_3)$, L_2 ya se determinó en el paso anterior y L_3 es igual a $L_2 + i$. Este procedimiento se sigue realizando para los nuevos intervalos.

Para el ejemplo, la tabla sería:

Intervalos de edades	Frecuencia
$[5, 9)$	2
$[9, 13)$	2
$[13, 17)$	3
$[17, 21)$	2
$[21, 25)$	3
$[25, 29)$	6
$[29, 33)$	2
$[33, 37)$	1
$[37, 41)$	2
$[41, 45)$	3
$[45, 49)$	1
$[49, 53)$	2
$[53, 57]$	1
Total	30

Tablas de distribución de frecuencias: Generalmente, las tablas de tipo II y III se completan con distintos tipos de frecuencias, tales como:

a) Frecuencia absoluta: Es el número de veces que aparece dicho valor, como resultado de la medición de la variable. Se denota por f_i.

b) Frecuencia absoluta acumulada: Es el resultado de sumar a la frecuencia absoluta del valor correspondiente la frecuencia absoluta del valor anterior. Se denota por F_i.

c) Frecuencia relativa: Es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra o población: $h_i = \frac{f_i}{N}$, donde $N =$ Tamaño de la muestra o población. Se denota por h_i.

d) Frecuencia relativa acumulada: Es el resultado de sumar a la frecuencia relativa del valor correspondiente la frecuencia relativa del valor anterior. Se denota por H_i.

Modelos de tablas estadísticas

Tablas de tipo II (Variable cuantitativa discreta)

Variable	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia relativa acumulada (H_i)
X_1	f_1	$F_1 = f_1$	$h_1 = \frac{f_1}{N}$	$H_1 = h_1$
X_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$h_2 = \frac{f_2}{N}$	$H_2 = h_1 + h_2$
X_3	f_3	$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$	$h_3 = \frac{f_3}{N}$	$H_3 = h_1 + h_2 + h_3$
...	...	...	...	...
X_i	f_i	$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$	$h_i = \frac{f_i}{N}$	$H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$
...	...	...	...	...
X_k	f_k	$F_k = \sum_{j=1}^{k} f_j = N$	$h_k = \frac{f_k}{N}$	$H_k = \sum_{j=1}^{k} h_j = 1$
Total	N		**1**	

Ejemplo 11.3 Tabla de frecuencias.

Se agrega a la tabla del ejemplo 11.1 las columnas de frecuencias absoluta acumulada (F_i), relativa (h_i) y relativa acumulada (H_i).

Nº. de llamadas	Frec. abs. (f_i)	Frec. abs. acumulada (F_i)	Frec. rel. (h_i)	Frec. rel. acumulada (H_i)
1	8	8	$\frac{8}{30} = \frac{4}{15} = 0.27$	0.27
2	6	14	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0.2$	0.47
3	7	21	$\frac{7}{30} = 0.23$	0.70
4	4	25	$\frac{4}{30} = \frac{2}{15} = 0.13$	0.83
5	5	30	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0.17$	1.00
Total	**30**		**1.00**	

La interpretación de la cuarta fila de esta tabla sería: que respecto al número de llamadas diarias en el mes, en 4 días en particular del mes que se está analizando se hicieron 4 llamadas diarias; durante 25 días se hicieron menos de 5 llamadas diarias; en un 13.3% de los días se realizaron 4 llamadas diarias y durante un 83.3% de los 30 días en total se realizaron menos de 5 llamadas diarias.

Tablas de tipo III (Variable cuantitativa continua)

Intervalos de la Variable	Marca de clase X_{MC}	Frec. abs. (f_i)	Frec. abs. acumulada (F_i)	Frec. rel. (h_i)	Frec. rel. acumulada (H_i)
$[a_0, a_1)$	$X_1 = \frac{(a_0 + a_1)}{2}$	f_1	$F_1 = f_1$	$h_1 = \frac{f_1}{N}$	$H_1 = h_1$
$[a_1, a_2)$	$X_2 = \frac{(a_1 + a_2)}{2}$	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$h_2 = \frac{f_2}{N}$	$H_2 = h_1 + h_2$
$[a_2, a_3)$	$X_3 = \frac{(a_2 + a_3)}{2}$	f_3	$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$	$h_3 = \frac{f_3}{N}$	$H_3 = h_1 + h_2 + h_3$
...	...	...	...	...	...
$[a_{i-1}, a_i)$	$X_i = \frac{(a_{i-1} + a_i)}{2}$	f_i	$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$	$h_i = \frac{f_i}{N}$	$H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$
...	...	...	...	...	...
$[a_{k-1}, a_k]$	$X_k = \frac{(a_{k-1} + a_k)}{2}$	f_k	$F_k = \sum_{j=1}^{k} f_j = N$	$h_k = \frac{f_k}{N}$	$H_k = \sum_{j=1}^{k} h_j = 1$
Total		N		**1**	

La marca de clase (X_{MC}) representa los datos que se agrupan en ese intervalo (clase). Es el valor promedio entre los dos límites del intervalo. A diferencia de la tabla anterior, la tabla de intervalo es menos precisa en la determinación de los datos que pertenecen a una clase o intervalo.

Ejemplo 11.4 Tabla de frecuencias.

A la tabla original del ejemplo 11.2 se le agregan tres columnas: frecuencia absoluta acumulada (F_i), frecuencia relativa (h_i) y frecuencia relativa acumulada (H_i).

Intervalos de edades	X_{MC}	f_i	F_i	h_i	H_i
[5, 9)	7	2	2	0.067	0.067
[9, 13)	11	2	4	0.067	0.134
[13, 17)	15	3	7	0.100	0.234
[17, 21)	19	3	10	0.100	0.334
[21, 25)	23	2	12	0.067	0.401
[25, 29)	27	6	18	0.200	0.601
[29, 33)	31	2	20	0.067	0.668
[33, 37)	35	1	21	0.033	0.701
[37, 41)	39	2	23	0.067	0.768
[41, 45)	43	3	26	0.100	0.868
[45, 49)	47	1	27	0.033	0.901
[49, 53)	51	2	29	0.067	0.967
[53, 57]	55	1	30	0.033	1.000
Total		**30**		**1.00**	

La interpretación de la cuarta fila de esta tabla sería:

$F_4 = 10$, significa que existen 10 personas con edades comprendidas entre 5 y 21 (de edades mayores o iguales que 5 años y menores que 21 años).

$h_4 = 0.100$, significa que las tres personas cuyas edades están comprendida en el intervalo [17, 21) representan el 10% del total.

$H_4 = 0.334$, significa que el 33.4% de las personas tienen edades comprendidas entre 5 y 21 años.

Ejemplo 11.5 Tabla de frecuencias.

En un estudio realizado a 40 personas acerca del nivel de cotinina, se obtuvieron los siguientes resultados:

1	210	35	103	130	253	123	86
0	44	112	222	234	87	167	284
131	277	477	149	164	121	250	1
173	32	289	313	198	266	245	208
265	3	227	491	17	290	48	173

Construya una tabla de frecuencias.

Solución:

El total de datos con el que se va a trabajar es $N = 40$. El rango $R = 491 - 0 = 491$.

Trabajaremos con 5 intervalos. Por lo cual, la amplitud de los intervalos:

$$i = \frac{491}{5} = 98.2 \approx 100$$

Vamos a redondear a 100 la amplitud de los intervalos por ser un valor conveniente.

Intervalos de la Variable	**Marca de clase** X_{MC}	**Frec. abs.** (f_i)	**Frec. abs. acumulada** (F_i)	**Frec. rel.** (h_i)	**Frec. rel. acumulada** (H_i)
[0, 100)	50	11	11	0.275	0.275
[100, 200)	150	12	23	0.300	0.575
[200, 300)	250	14	37	0.350	0.925
[300, 400)	350	1	38	0.025	0.950
[400, 500]	450	2	40	0.050	1
		40		**1.00**	

Ejemplo 11.6 Tabla de frecuencias.

Determine los valores que hacen falta para completar la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalos de la Variable	Frec. abs. (f_i)	Frec. abs. acumulada (F_i)	Frec. relativa (h_i)
[0, 10)	60	60	h_1
[10, 20)	f_2	F_2	0.4
[20, 30)	30	170	h_3
[30, 40)	f_4	F_4	0.1
[40, 50]	f_5	200	h_5
	N		

Solución:

Primero determinemos F_2. Para esto, se conoce que: $F_3 = f_3 + F_2$, luego: $F_2 = 170 - 30 = 140$.

Para calcular f_2, tenemos que $60 + f_2 = F_2$, por lo que $f_2 = 140 - 60 = 80$.

Como $N = 200$, para calcular f_4, partimos de la definición de h_4:

$$h_4 = \frac{f_4}{N} \Rightarrow f_4 = h_4 * N = 0.1 * 200 = 20$$

El valor de F_4 lo determinamos sumando $F_3 + f_4$, así:

$$\begin{aligned} F_4 &= F_3 + f_4 \\ &= 170 + 20 \\ F_4 &= 190 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, determinamos f_5:

$$\begin{aligned} f_5 &= F_5 - F_4 \\ &= 200 - 190 \\ f_5 &= 10 \end{aligned}$$

Al haber calculado todas las frecuencias absolutas, podemos obtener las frecuencias relativas, dividiéndolas para N:

$$h_1 = \frac{60}{200} = 0.3$$

$$h_3 = \frac{30}{200} = 0.15$$

$$h_5 = \frac{10}{200} = 0.05$$

Escribimos entonces la tabla completa:

Intervalos de la Variable	**Frec. abs.** (f_i)	**Frec. abs. acumulada** (F_i)	**Frec. relativa** (h_i)
[0, 10)	60	60	**0.30**
[10, 20)	**80**	**140**	0.40
[20, 30)	30	170	**0.15**
[30, 40)	**20**	**190**	0.10
[40, 50]	**10**	200	**0.05**
	200		**1.00**

11.3 Gráficos de representación

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada un conjunto de datos, representar la información utilizando histogramas de frecuencias, poligonales de frecuencias y diagramas de tallo y hojas.

* Interpretar información estadística en forma gráfica.

Al leer un diario o alguna revista, es común encontrarnos con algún tipo de estudio o reportaje cuyos resultados se muestren en tablas y/o gráficos. Es importante, saber representar, leer e interpretar la información que se nos proporciona de esta forma, reconociendo las variables consideradas, tanto lo que se representa en los ejes como el significado de los cambios en los valores de las variables.

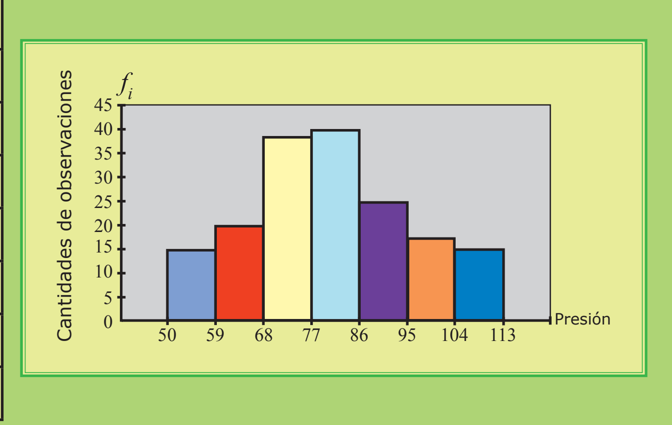
Los gráficos permiten formarnos una impresión inmediata acerca del comportamiento de las variables estudiadas, destacando sus características más relevantes.

Histograma: Es un gráfico de barras (sin espacios entre ellas), formado por rectángulos, cuya base está dada por la amplitud de cada intervalo y cuyas alturas corresponden a las frecuencias (frecuencias absolutas o relativas) alcanzadas por dichos intervalos.

Ejemplo 11.7 Histograma de frecuencias.

Con los datos organizados en la tabla adjunta, se construye un histograma de frecuencias como se muestra a continuación:

Presión	f_i
[50, 59)	15
[59, 68)	20
[68, 77)	37
[77, 86)	40
[86, 95)	26
[95, 104)	18
[104, 113]	15



Poligonal de frecuencias: Se obtiene al unir las marcas de clases con las frecuencias respectivas, formando un par ordenado. La poligonal formada uniendo estos puntos, se cierra juntando los extremos con las marcas de clase del intervalo anterior al primero y del siguiente al último.

Ejemplo 11.8 Poligonal de frecuencias.

Respecto al ejemplo anterior, la marca de clase de cada intervalo se muestra a continuación:

Presión	f_i	X_{MC}
[50, 59)	15	54.5
[59, 68)	20	63.5
[68, 77)	37	72.5
[77, 86)	40	81.5
[86, 95)	26	90.5
[95, 104)	18	99.5
[104, 113]	15	108.5

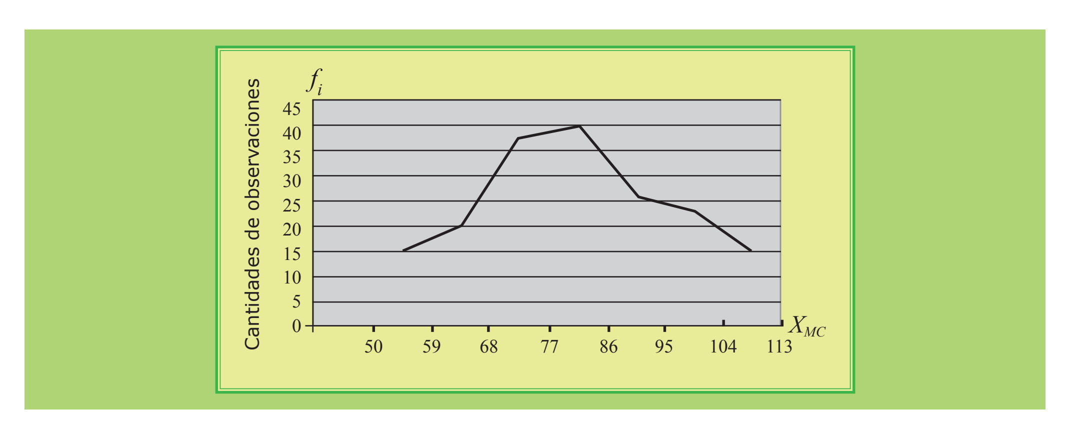


Diagrama de tallo y hojas: Este diagrama permite apreciar la variabilidad o dispersión de los datos.

Ejemplo 11.9 Diagrama de tallo y hojas.

Notas I semestre			**Notas II semestre**		
2.3	2.0	1.0	5.3	2.0	1.0
4.5	4.6	1.6	4.5	4.6	3.6
2.0	3.0	1.3	6.5	3.0	1.3
5.0	2.7	4.4	5.0	4.7	4.4
1.5	5.5	5.5	4.5	5.5	5.5

Para este caso, la parte entera de la nota constituye el tallo, y las hojas son las cifras decimales de cada nota. En el lado izquierdo están las notas del primer semestre y en el lado derecho están las notas del segundo semestre. En el ejemplo, el gráfico permite la comparación visual de la distribución de las notas por semestre. El diagrama de tallo y hoja es el siguiente:

I Semestre (Hojas)	**Tallo**	II Semestre (Hojas)
	6	5
0 5 5	**5**	5 5 3 0
4 5 6	**4**	7 6 5 5 4
0	**3**	6 0
0 0 3 7	**2**	0
0 3 5 6	**1**	3 0

Ejemplo 11.10 Diagrama de tallo y hojas.

En la tabla a continuación se describe el peso en kg. de 36 personas.

10.5	8.9	8.7	10.9	15.7	11.1
9.7	15.4	12.3	13.1	15.1	14.5
18.8	12.2	7.6	10.8	17.5	17.6
16.3	13.1	14.3	19.9	14.7	14.9
15.5	18.0	13.5	16.0	18.3	9.4
13.4	17.8	14.6	19.6	15.3	11.5

Construya el diagrama de tallo y hojas.

Solución:

Si seleccionamos como valores del tallo los números 7, 8, 9, …, 18, 19, el diagrama de tallo y hojas resultante si leemos los datos por filas, sería:

Tallo	Hojas	Frecuencias
7	6	1
8	9, 7	2
9	7, 4	2
10	5, 9, 8	3
11	1, 5	2
12	3, 2	2
13	1, 1, 5, 4	4
14	5, 3, 7, 9, 6	5
15	7, 4, 1, 5, 3	5
16	3, 0	2
17	5, 6, 8	3
18	8, 0, 3	3
19	9, 6	2

11.4 Medidas de tendencia central y no central

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada un conjunto de datos, calcular e interpretar medidas de tendencia central y no central.

Una medida de tendencia central es un número (estadígrafo) que se considera representativo de todos los números en un conjunto de datos.

Media aritmética ($\overline{x}$)

Se define como el cuociente entre la suma de los valores que toma la variable (datos) y el total de observaciones: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$; siendo n el total de observaciones, también se puede expresar como $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$;

generalmente esta definición se ocupa para datos no tabulados. Para datos tabulados en tablas tipo II la media aritmética se obtiene por medio de: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i \cdot f_i)}{n}$ y en tablas de tipo III se obtiene mediante $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_{MC_i} \cdot f_i)}{n}$.

Dentro de las propiedades de la media aritmética se tiene que si se dividen o multiplican todos los datos por una constante, la media aritmética queda dividida o multiplicada, respectivamente, por esa constante; lo mismo que sucede si se le suma o resta una constante.

Sin embargo, la media aritmética presenta el problema de que su valor se puede ver influenciado por valores extremos, que se aparten en exceso del resto de la serie. Estos valores anómalos podrían condicionar en gran medida el valor de la media aritmética, haciéndole perder representatividad.

Ejemplo 11.11 Media aritmética para datos no tabulados.

Se tiene el sueldo de cinco empleados de una empresa: $567, $683, $725, $675, $576.

La media aritmética es $\bar{x} = \dfrac{567+683+725+675+576}{5} = \dfrac{3226}{5} = 645.2$

En este caso, se puede decir que el sueldo promedio que paga la empresa a sus cinco empleados es de $\$645.2$.

Ejemplo 11.12 Media aritmética para datos tabulados.

X_{MC} corresponde a la marca de clase del intervalo y se encuentra como la media aritmética de los límites superior e inferior de cada intervalo.

Por ejemplo, la marca de clase para el primer intervalo de la tabla adjunta se encuentra como: $\dfrac{400+450}{2} = 425$

Sueldos	f_i	X_{MC}	$f_i \cdot X_{MC}$
[400, 450)	10	425	4250
[450, 500)	20	475	9500
[500, 550)	30	525	15750
[550, 600)	40	575	23000
[600, 650)	15	625	9375
[650, 700)	10	675	6750
[750, 800]	5	775	3875
	130		72500

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{(10)(425)+(20)(475)+(30)(525)+(40)(575)+(15)(625)+(10)(675)+(5)(775)}{130}$$

$$\bar{x} = \frac{4250+9500+15750+23000+9375+6750+3875}{130}$$

$$\bar{x} = \frac{72500}{130} \approx 557.7$$

Mediana $(\tilde{x})$

Se define como el valor central de una distribución que tiene un número impar de datos, una vez ordenados los datos de manera creciente o decreciente. El dato que representa la mediana divide la distribución en dos grupos, un 50% de valores son inferiores y otro 50% son superiores.

Si el número de datos (N) de la distribución es par, la mediana está dada por el promedio de los dos datos centrales.

La mediana no presenta el problema de estar influenciada por los valores extremos, pero en cambio no utiliza en su cálculo toda la información de la serie de datos (no pondera cada valor por el número de veces que se ha repetido).

Si N es impar, el término central es el dato que ocupa ese lugar:

$$\tilde{x} = x_{\frac{(N+1)}{2}}$$

Ejemplo 11.13 Mediana.

Considere los siguientes datos: 2, 4, 5, 9, 10.

Como N es igual a 5, $\tilde{x} = x_{\frac{(N+1)}{2}} = x_{\frac{(5+1)}{2}} = x_{\frac{6}{2}} = x_3 = 5$.

Si N es par, existen dos datos centrales: $x_{\frac{N}{2}}$ y $x_{\frac{N}{2}+1}$:

$$\tilde{x} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

Ejemplo 11.14 Mediana.

Considere los siguientes datos: 2, 4, 5, 9, 10, 12

Aquí $N = 6$

$x_{\frac{N}{2}} = x_{\frac{6}{2}} = x_3 = 5$; y,

$x_{\frac{N}{2}+1} = x_{3+1} = x_4 = 9$

$\tilde{x} = \frac{5+9}{2} = 7$

Moda (Mo)

Se define como el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta, o el valor que más se repite. Puede haber más de una moda; para el caso que existan dos, se tiene una distribución bimodal; para más de dos, polimodal.

Ejemplo 11.15 Moda.

Si 60, 75, 75, 80, 90, 90, 100 representan las notas de un estudiante, tenemos 2 modas: 75 y 90. La distribución de estos datos es bimodal.

Ejemplo 11.16 Medidas de tendencia central.

De acuerdo a los datos que se presentan en el ejemplo 11.10, determine las medidas de tendencia central.

Solución:

Como primer paso, ordenemos los 36 datos por columna, lo cual se presenta en la siguiente tabla:

7.6	10.8	13.1	14.6	15.5	17.8
8.7	10.9	13.1	14.7	15.7	78.0
8.9	11.1	13.4	14.9	16.0	18.3
9.4	11.5	13.5	15.1	16.3	18.8
9.7	12.2	14.3	15.3	17.5	19.6
10.5	12.3	14.5	15.4	17.6	19.9

Media aritmética $\bar{x} = \dfrac{7.6 + 8.7 + 8.9 + ... + 19.6 + 19.9}{36} = 14.069$

La mediana $\tilde{x} = \dfrac{14.5 + 1.46}{2} = 14.55$

La moda, el valor de mayor frecuencia, es 13.1 .

Ejemplo 11.17 Media aritmética para datos tabulados.

En la siguiente tabla se describe los resultados agrupados de un estudio a 40 personas sobre el nivel de cotinina:

Nivel de cotinina	f_i	X_{MC}	$f_i \cdot X_{MC}$
[0, 100)	11	50	550
[100, 200)	12	150	1800
[200, 300)	14	250	3500
[300, 400)	1	350	350
[400, 500)	2	450	900
	40		7100

La media aritmética es:

$$x = \frac{(11)(50) + (12)(150) + (14)(250) + (1)(350) + (2)(450)}{40}$$

$$x = \frac{550 + 1800 + 3500 + 350 + 900}{40} = 177.5$$

Ejemplo 11.18 Mediana.

Considere los siguientes datos: $10, 15, 16, x, 20, 22$. Si se conoce que la mediana es igual a 17.5, entonces determine el valor del dato x.

Solución:

Como N es igual a 6, una cantidad par, entonces la mediana es:

$$\tilde{x} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2} = \frac{16 + x}{2} = 17.5$$

$$16 + x = 35$$

$$x = 19$$

Medidas de tendencia no centrales

También denominadas medidas de localización, permiten conocer otros puntos característicos de la distribución que no son los valores centrales. Entre otros indicadores, se suelen utilizar una serie de valores que dividen la muestra en tramos iguales:

Cuartiles: Son 3 valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en cuatro tramos, en los que cada uno de ellos concentra el 25% de los datos.

Deciles: Son 9 valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en diez tramos, en los que cada uno de ellos concentra el 10% de los datos.

Percentiles: Son 99 valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en cien tramos, en los que cada uno de ellos concentra el 1% de los datos.

Ejemplo 11.19 Medidas de tendencia no centrales.

Vamos a calcular los cuartiles de la serie de datos referidos a la estatura en metros de un grupo de alumnos. Los deciles y percentiles se calculan de igual manera, aunque harían falta distribuciones con mayor número de datos.

Variable (Valor en m)	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas	
	Simple	Acumulada	Simple	Acumulada
1.20	1	1	1/30	1/30
1.21	4	5	4/30	5/30
1.22	4	9	4/30	9/30
1.23	2	11	2/30	11/30
1.24	1	12	1/30	12/30
1.25	2	14	2/30	14/30
1.26	3	17	3/30	17/30
1.27	3	20	3/30	20/30
1.28	4	24	4/30	24/30
1.29	3	27	3/30	27/30
1.30	3	30	3/30	1

1º cuartil: Es el valor $1.22m$, ya que por debajo suyo se sitúa el 25% de la frecuencia acumulada (tal como se puede ver en la columna de la frecuencia relativa acumulada).

2º cuartil: Es el valor $1.26m$, ya que entre este valor y el 1º cuartil se sitúa otro 25% de la frecuencia acumulada.

3º cuartil: Es el valor $1.28m$, ya que entre este valor y el 2º cuartil se sitúa otro 25% de la frecuencia acumulada. Además, por encima suyo queda el restante 25% de esta frecuencia.

Observación: Cuando un cuartil recae en un valor que se ha repetido más de una vez, como ocurre en este ejemplo, la medida de posición no central sería realmente una de las repeticiones.

11.5 Medidas de dispersión

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada un conjunto de datos, calcular e interpretar medidas de dispersión.

Las **medidas de dispersión** estudian la distribución de los valores de la serie, analizando si éstos se encuentran más o menos concentrados, o más o menos dispersos.

Existen diversas medidas de dispersión, entre las más utilizadas podemos destacar las siguientes:

Rango: Mide la amplitud de los valores de la muestra y se calcula por la diferencia entre el mayor valor y el menor.

Varianza: Mide la distancia existente entre los valores de la serie y la media aritmética. Se calcula como la sumatoria de las diferencias al cuadrado entre cada valor y la media, multiplicadas por el número de veces que se ha repetido cada valor. La sumatoria obtenida se divide por el tamaño de la muestra.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 * n_i}{n}$$

Si el número de datos es pequeño, es recomendable utilizar $(n-1)$ en vez de n en el denominador de la expresión anterior.

La varianza siempre será mayor que cero. Mientras más se aproxima a cero, más concentrados están los valores de la serie alrededor de la media. Por el contrario, mientras mayor sea la varianza, más dispersos están.

Desviación típica o estándar: Se calcula como la raíz cuadrada de la varianza.

Ejemplo 11.20 Medidas de dispersión.

Se tiene una serie de datos de la estatura en metros de los alumnos de una clase y vamos a calcular sus medidas de dispersión.

Variable (Valor en m)	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas	
	Simple	Acumulada	Simple	Acumulada
1.20	1	1	1/30	1/30
1.21	4	5	4/30	5/30
1.22	4	9	4/30	9/30
1.23	2	11	2/30	11/30
1.24	1	12	1/30	12/30
1.25	2	14	2/30	14/30
1.26	3	17	3/30	17/30
1.27	3	20	3/30	20/30
1.28	4	24	4/30	24/30
1.29	3	27	3/30	27/30
1.30	3	30	3/30	1

Rango: Diferencia entre el mayor valor de la muestra (1.30) y el menor valor (1.20). Luego el rango de esta muestra es $0.1m$ o $10cm$.

Varianza: La media aritmética de esta muestra es $1.253m$. Luego, aplicamos la expresión:

$$S^2 = \frac{((1.20-1.253)^2*1)+((1.21-1.253)^2*4)+((1.22-1.253)^2*4)+...+((1.30-1.253)^2*3)}{30}$$

Por lo tanto, la varianza es 0.0010 .

Desviación típica: Es la raíz cuadrada de la varianza.

$$S = \sqrt{S^2}$$

Luego:

$$S = \sqrt{0.010} = 0.0320$$

11.6 Probabilidades

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar los elementos que definen un espacio muestral.

* Dadas las condiciones de un experimento aleatorio, describir su espacio muestral.

* Dadas las condiciones de un experimento aleatorio, calcular la probabilidad clásica de que ocurra un evento requerido.

La rama de la matemática conocida actualmente como probabilidad consiste en el estudio de ciertos experimentos llamados aleatorios, es decir, libres de determinación previa. La probabilidad surgió a comienzos del siglo XVI, en relación con los diversos juegos de azar que se practicaban en la época, más aún, desde civilizaciones tan antiguas como las de los sumerios y egipcios. Hoy en día, los juegos de azar están presentes en aquellos como loterías, juegos de casino y de naipes, muy populares en nuestra sociedad actual. Así, el cálculo de probabilidades determina las posibilidades de ganar o perder en un evento específico. En general, el estudio de las probabilidades permite el análisis de resultados relacionados con fenómenos de carácter social, político y económico, entre otros.

Un **experimento aleatorio** es aquel que está regido por el azar, es decir, se conocen todos los resultados posibles, pero no es posible tener certeza de cuál será en particular el resultado del experimento.

Ejemplo 11.21 Experimentos aleatorios.

- Lanzamiento de un dado.
- Lanzamiento de una moneda.
- Lanzamiento de dos monedas.
- Extracción de una carta de un mazo de naipes.

Se denomina **espacio muestral** (Ω) asociado a un experimento aleatorio, al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento.

Ejemplo 11.22 Espacios muestrales.

- Al lanzar un dado, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Al lanzar una moneda, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{c, s\}$$

Donde: c: cara
s: sello

- Al lanzar dos monedas, el espacio muestral es:

  $\Omega = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$

  Observe que el resultado $(c, s) \neq (s, c)$, es decir, es importante el orden.

- Al extraer una carta de un mazo de naipes, el espacio muestral consta de 52 elementos.

Se denomina **evento** o **suceso** a todo subconjunto de un espacio muestral.

Ejemplo 11.23 Eventos o sucesos.

En el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, relacionado con el lanzamiento de un dado, los siguientes son eventos:

- Obtener un número primo:
  $A = \{2, 3, 5\}$

- Obtener un número primo y par:
  $B = \{2\}$

- Obtener un número mayor o igual que 5:
  $C = \{5, 6\}$

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir en forma simultánea, es decir, si y sólo si su intersección es vacía.

Ejemplo 11.24 Eventos mutuamente excluyentes.

- En el lanzamiento de un dado, los eventos:

  A: obtener un número par.
  B: obtener el número 3.

  A y B son mutuamente excluyentes.

  El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y los eventos son:
  $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3\}$.

  Como $A \cap B = \varnothing$, A y B son mutuamente excluyentes.

- En el lanzamiento de una moneda, los eventos:

  A: obtener cara.
  B: obtener sello.

  A y B son mutuamente excluyentes.

  El espacio muestral es $\Omega = \{c, s\}$, y los eventos son $A = \{c\}$ y $B = \{s\}$.

  Como $A \cap B = \varnothing$, A y B son mutuamente excluyentes.

  En este último caso, además $A \cup B = \Omega$, por lo que A y B se denominarán **eventos complementarios**, es decir, un evento es el complemento del otro:

$$A^C = B \text{ y } B^C = A$$

Probabilidad clásica

Si en un experimento aleatorio todos los resultados son equiprobables (igual probabilidad), es decir, la ocurrencia de uno es igualmente posible que la ocurrencia de cualquiera de los demás, entonces la **probabilidad de un evento** A es la razón:

$$P(A) = \frac{\text{Números de casos favorables para } A}{\text{Números total de casos posibles}}$$

Ésta es la **probabilidad clásica o de Laplace**. A partir de ella, las probabilidades de los posibles resultados del experimento se pueden determinar **a priori**, es decir, sin realizar la experiencia.

Ejemplo 11.25 Cálculo de probabilidades.

Un experimento consiste en lanzar dos dados. Se pide realizar lo siguiente:

a) Elaborar el espacio muestral del experimento.
b) Hallar la probabilidad de que al lanzar los dos dados, la suma de las caras de los dados sea igual a 10.
c) Hallar la probabilidad de que al lanzar los dos dados, la suma se encuentre entre 7 y 9, inclusive.

Solución:

a)

$$\Omega = \begin{cases} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), \end{cases}$$

b) Sea A: El evento que la suma de las caras de los dados sea igual a 10.

Las combinaciones que cumplen con esta condición son:
$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$.

$P(A) = \frac{3}{36} \Leftrightarrow 8.33\ \%$

c) Sea B: El evento que la suma de las caras de los dados se encuentre entre 7 y 9 inclusive.

Las combinaciones que cumplen con esta condición son: $B = \{(1, 6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3)\}$.

$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 41.67\ \%$

Ejemplo 11.26 Cálculo de probabilidades.

Una comisión ecuatoriana está formada por 20 personas: 8 representantes de la Sierra, 5 de la Costa, 4 del Oriente y 3 de la región Insular. Hallar la probabilidad de seleccionar una persona y que ésta sea:

a) De la Sierra.
b) De la Costa.
c) Del Oriente o de la región Insular.

Solución:

a) Sea A: El evento de seleccionar una persona de la Sierra entre los miembros de la comisión.

$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 40\ \%$

b) Sea B: El evento de seleccionar una persona de la Costa entre los miembros de la comisión.

$$P(\mathrm{B}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 25\ \%$$

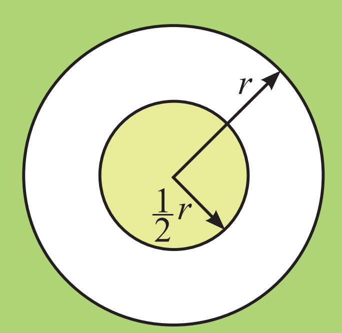
c) Sea C: El evento de seleccionar una persona del Oriente o de la región Insular.

Como existen 4 personas del Oriente y 3 de la región Insular, por el principio aditivo, existen 7 formas diferentes de seleccionar una persona entre éstas.

$$P(\mathrm{C}) = \frac{4+3}{20} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow 35\ \%$$

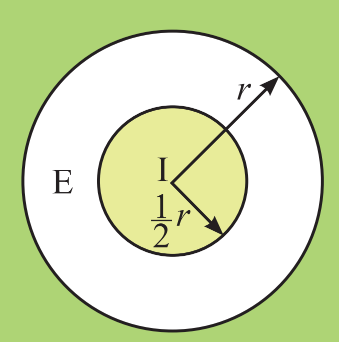
Ejemplo 11.27 Cálculo de probabilidades.

Dada la siguiente figura, hallar la probabilidad de seleccionar un punto al azar que se encuentre en la región sombreada.



Solución:

Si denotamos por E al conjunto de los puntos interiores al círculo de longitud de radio r y denotamos por I al conjunto de los puntos interiores al círculo concéntrico de longitud de radio $\frac{1}{2}r$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Sea A: El evento de seleccionar un punto al azar que se encuentre en I.

$$P(\text{A}) = \frac{\text{área de I}}{\text{área de E}} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 25\ \%$$

11.7 Conjuntos y probabilidades

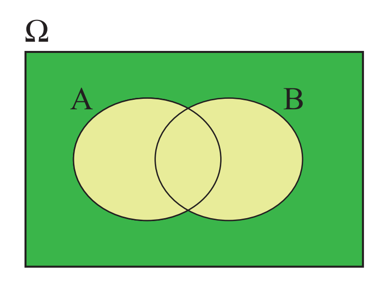
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

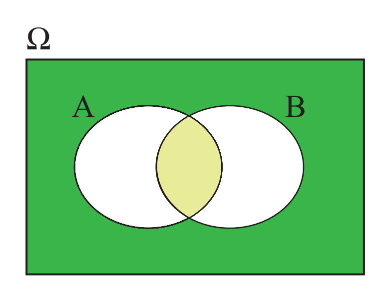
* Aplicar la teoría de conjuntos al cálculo de probabilidades.
* Calcular probabilidades de eventos dependientes e independientes.
* Dadas las condiciones de un experimento aleatorio, calcular la probabilidad de un evento requerido mediante un diagrama de árbol o un triángulo de Pascal.

Conociendo que Ω constituye un espacio muestral, se pueden describir los resultados posibles de un experimento aleatorio en términos de conjuntos, de la siguiente manera:

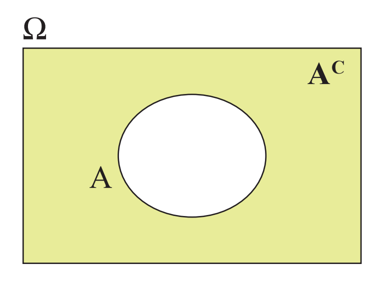
- **$\text{A}\cup\text{B}$:** Al menos uno de los eventos A o B ocurre.



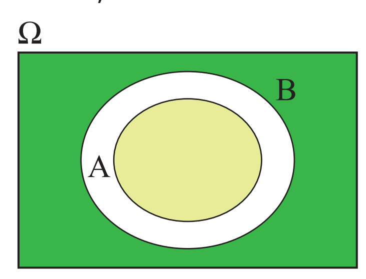
- **$\text{A}\cap\text{B}$:** Ambos eventos ocurren.



- $\mathbf{A^C}$: El evento A no ocurre.



- $\mathbf{A \subset B}$: Si el evento A ocurre, entonces el evento B también ocurre.



Ejemplo 11.28 Probabilidad.

En el experimento del lanzamiento de un dado, sean:

Evento A: Obtener un número par.

Evento B: Obtener un número primo.

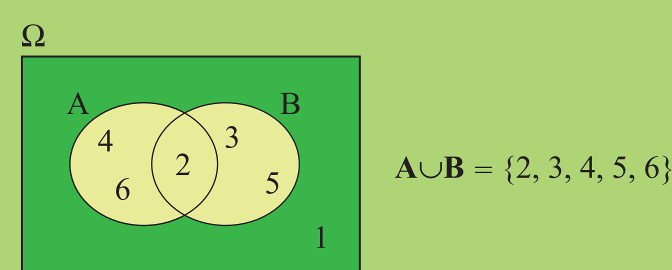
Evento C: Obtener un número distinto de 3 ó 5.

El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

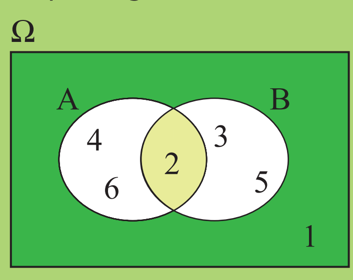
Ω

1 2 6 3 4 5

Obtener un número par o un número primo; se puede representar mediante el conjunto $\mathbf{A \cup B}$, cuyo diagrama de Venn es:

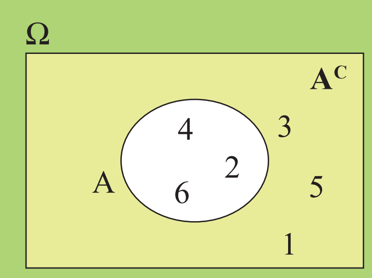


Obtener un número par y primo; se puede representar mediante el conjunto $\mathbf{A \cap B}$, cuyo diagrama de Venn es:



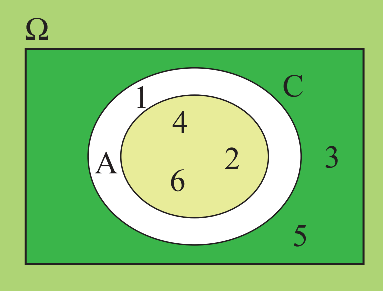
$\mathbf{A \cap B} = \{2\}$

No obtener un número par; se puede representar mediante el conjunto $\mathbf{A^C}$, cuyo diagrama de Venn es:



$\mathbf{A^C} = \{1, 3, 5\}$

Además, como $\mathbf{A \subset C}$, todos los elementos de A son también elementos de C.



$\mathbf{A \subset C}$

Si Ω es un conjunto de n elementos y A un subconjunto de k elementos, entonces la probabilidad de A es:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Propiedades

- $P(\Omega) = 1$

En el lanzamiento de un dado, para el evento A: obtener un número natural menor que 7, el conjunto es $A = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y su probabilidad es:

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1$$

- $P(\varnothing) = 0$

En el lanzamiento de un dado, para el evento B: obtener un múltiplo de 4 mayor que 6, el conjunto $B = \{\ \} = \varnothing$, y su probabilidad es:

$$P(B) = P(\varnothing) = \frac{0}{6} = 0$$

- $0 \leq P(A) \leq 1$

La probabilidad de un evento A es un número real entre 0 y 1.

- Si $A \cap B = \varnothing$ (A y B se excluyen mutuamente), entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

En el experimento de extraer una carta al azar de un mazo normal de 52 cartas, los eventos A: Obtener un 5 y B: Obtener un AS, no pueden ocurrir simultáneamente, entonces decimos que son mutuamente excluyentes. La probabilidad de que ocurra A o B, es decir, la probabilidad de que salga 5 o AS es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{13}$$

- $P(A^C) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(A^C) = 1 \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(A^C)$

En el experimento de sacar una carta, el evento no obtener un AS, es el complemento del evento A: obtener un AS, entonces resulta más simple calcular la probabilidad de A^C como $1 - P(A)$:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{4}{52}$$

$$= 1 - \frac{1}{13}$$

$$P(A^C) = \frac{12}{13}$$

Estadística y Probabilidades

- Si $A \cap B \neq 0$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

En el experimento del lanzamiento de un dado, los eventos

A: Obtener un número par, y B: Obtener un número primo,

son eventos no disjuntos, ya que $A \cap B = \{2\}$, entonces la probabilidad del evento A o B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

- Si A y B son **eventos independientes**, es decir, que la ocurrencia de A no influye en la ocurrencia de B, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Si lanzamos un dado dos veces, los eventos A: Obtener un número par en el primer lanzamiento, y B: Obtener 1 en el segundo lanzamiento, son eventos independientes, puesto que la probabilidad de un resultado en el segundo lanzamiento no cambia por lo que haya resultado en el primero, entonces, la probabilidad de: Obtener un número par en el primer lanzamiento y 1 en el segundo, es:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$= \left(\frac{3}{6}\right)\frac{1}{6}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

- Si A y B son **eventos independientes**, entonces el evento A/B se lee: Ocurre el evento A dado que ha ocurrido B, y tiene la siguiente probabilidad:

$$P(A/B) = P(A)$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra el evento A, dado que ha ocurrido B, es igual a la probabilidad de que ocurra el evento A, puesto que A y B son independientes.

Si lanzamos una moneda dos veces consecutivas, la probabilidad $P(A/B)$, sabiendo que los eventos son:

A: Obtener cara en el segundo lanzamiento, y B: Obtener sello en el primero, es:

$$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

- Si A y B son **eventos dependientes**, es decir, la ocurrencia de A influye en la ocurrencia de B, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Que representa la probabilidad del evento B, dado que ha ocurrido A.

En el experimento de la extracción de una carta: ¿cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea la reina de trébol, dado que la carta extraída es también de trébol?

Queremos calcular $P(\text{reina/trébol})$

La probabilidad de "reina y trébol" es $\frac{1}{52}$

La probabilidad de "trébol" es $\frac{13}{52}$

Así pues, $P(\text{reina/trébol}) = \frac{P(\text{reina/trébol})}{P(\text{trébol})}$

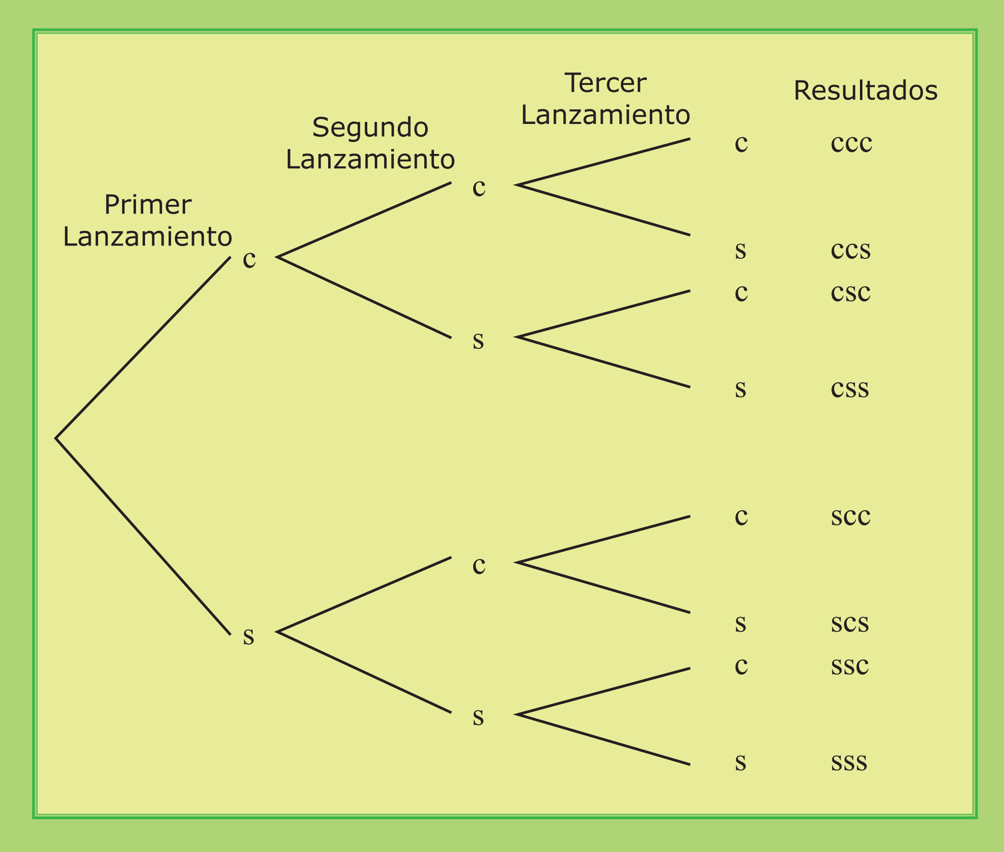
$$= \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}}$$

$$P(\text{reina/trébol}) = \frac{1}{13}$$

Para ciertos experimentos aleatorios, se pueden representar de manera gráfica todos los resultados posibles del experimento, que consiste en la iteración de un experimento sencillo, mediante un **diagrama de árbol**. Este tipo de representación permite obtener una técnica de conteo.

Ejemplo 11.29 Diagrama de árbol.

Calcular la probabilidad de obtener dos veces cara y una vez sello, al lanzar tres veces seguidas una moneda.



Los resultados posibles son 8:

ccc – ccs – csc – css – scc – scs – ssc – sss.

Los casos favorables son 3: ccs – csc – scc.

Entonces, la probabilidad buscada es: $\frac{3}{8}$.

Ejemplo 11.30 Cálculo de probabilidades.

Se seleccionan al azar dos cartas entre diez cartas numeradas del 1 a 10. Hallar la probabilidad de que la suma sea impar si:

a) Se sacan una tras otra sin sustitución.

b) Las dos cartas se sacan una después de la otra con sustitución.

Solución:

a) Sea A: El evento en el que la suma sea impar si las dos cartas se sacan una tras otra sin sustitución.

De acuerdo al principio multiplicativo, hay $(10)(9) = 90$ maneras diferentes de sacar dos cartas, una primero que la otra sin sustitución. Como existen $(5)(5) = 25$ maneras de escoger primero un número par y luego uno impar, también existe 25 maneras de escoger primero un número impar y luego uno par; tenemos:

$$P(A) = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} \Leftrightarrow 56\%$$

b) Sea B: El evento en el que la suma sea impar si las dos cartas se sacan una tras otra con sustitución.

Hay $(10)(10) = 100$ maneras diferentes de seleccionar dos cartas, una después de la otra con sustitución. Según lo mencionado en el literal (b) existen $(5)(5) = 25$ maneras de sacar un número par y luego uno impar, y $(5)(5) = 25$ maneras de sacar un número impar y luego uno par; entonces $P(B) = \frac{25+25}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 50\%$.

Ejemplo 11.31 Cálculo de probabilidades.

Para inventario se asignan códigos numéricos de productos de cuatro cifras a cada artículo existente en una bodega. Suponiendo que todos los números son agotados en la numeración, y si se escogiera un artículo al azar, determine:

a) La probabilidad de que los dos últimos dígitos asignados a ese artículo sean pares.

b) La probabilidad de que los dígitos asignados a dicho artículo sean diferentes.

c) La probabilidad de que los dígitos asignados a dicho artículo sean impares.

Solución:

El números de códigos diferentes para los artículos $(10)(10)(10)(10)=10000$.

a) Sea A: El evento en el que los dos últimos dígitos asignados a ese artículo sean pares.

El número posible de códigos con los dos últimos dígitos pares, aplicando el principio multiplicativo, es: $(10)(10)(5)(5)=2500$.

$$P(A)=\frac{2500}{10000}=0.25 \Leftrightarrow 25\%$$

b) Sea B: El evento en el que los dígitos asignados a dicho artículo sean diferentes.

El número posible de códigos con dígitos diferentes, aplicando el principio multiplicativo es $(10)(9)(8)(7)=5040$.

$$P(A)=\frac{5040}{10000}=0.504 \Leftrightarrow 50.4\%$$

c) Sea C: El evento en el que el código de los artículos tenga asignado sólo dígitos impares.

El número posible de códigos con dígitos impares aplicando el principio multiplicativo, es $(5)(5)(5)(5)=625$.

$$P(C)=\frac{625}{10000}=0.0625 \Leftrightarrow 6.25\%$$

Ejemplo 11.32 Cálculo de probabilidades.

Se tienen 15 calculadoras, de las cuales 5 son defectuosas. Si se escogen 3 al azar, hallar la probabilidad de que:

a) Ninguna sea defectuosa.
b) Una exactamente sea defectuosa.
c) Una por lo menos sea defectuosa.

Solución:

Existen $C_3^{15} = \binom{15}{3} = 455$ maneras diferentes de escoger 3 calculadoras entre las 15 existentes.

a) Sea A: El evento de no escoger calculadoras defectuosas.

Puesto que hay $15 - 5 = 10$ calculadoras no defectuosas, entonces hay $C_3^{10} = \binom{10}{3} = 120$ maneras diferentes de escoger 3 calculadoras no defectuosas. Así que:

$$P(A) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} \Leftrightarrow 26\%$$

b) Sea B: El evento de escoger exactamente una calculadora defectuosa.

Hay 5 calculadoras defectuosas y $C_2^{10} = \binom{10}{2} = 45$ maneras diferentes de escoger calculadoras no defectuosas; por el principio multiplicativo hay $(5)(45) = 225$ maneras de escoger 3 calculadoras, de las cuales sólo una es defectuosa. Entonces :

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{455} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91} \Leftrightarrow 49\%$$

c) El evento en que por lo menos una sea defectuosa, es el complemento del evento en que ninguna es defectuosa, entonces:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91} \Leftrightarrow 74\%$$

Ejemplo 11.33 Cálculo de probabilidades.

Seis parejas de casados se encuentran en un cuarto. Si se escogen 2 personas al azar, hallar la probabilidad de que:

a) Sean esposos
b) Una sea hombre y otra sea mujer.

Solución:

Existen $C_2^{12} = \binom{12}{2} = 66$ maneras diferentes de escoger 2 personas de las 12.

a) Sea A: El evento de seleccionar una pareja de casados.

Hay 6 parejas de casados, entonces existen $C_1^6 = \binom{6}{1} = 6$ maneras diferentes de escoger a una pareja de casados; por lo tanto:

$$P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} \Leftrightarrow 9\%.$$

b) Sea B: El evento de seleccionar dos personas, tal que una sea hombre y la otra sea mujer.

Como hay 12 personas, 6 hombres y 6 mujeres, hay 6 maneras diferentes de escoger un hombre y 6 maneras diferentes de escoger una mujer; por consiguiente:

$$P(B) = \frac{(6)(6)}{66} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow 55\%.$$

Ejemplo 11.34 Cálculo de probabilidades.

En un concurso de belleza conformado por 10 participantes, 3 tienen ojos azules. Si se escogen dos participantes al azar, hallar la probabilidad de que:

a) Las dos tengan ojos azules.

b) Una tenga ojos azules.

Solución:

a) Sea A: El evento en el que las participantes seleccionadas tengan ojos azules.

Como existen 10 participantes, existen $C_2^{10} = \binom{10}{2} = 45$ maneras de seleccionar a dos de ellas. Debido a que el evento es que las dos participantes seleccionadas tengas ojos azules, su probabilidad sería:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow 6.67\%.$$

b) Sea B: El evento en el que una de las participantes tenga ojos azules.

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow 46.6\%.$$

Ejemplo 11.35 Cálculo de probabilidades.

Un grupo de amigos, tres hombres y tres mujeres, deciden ir a ver una película; una vez en la sala de cine, consideran sentarse todos en una sola fila. Hallar la probabilidad de que:

a) Las tres mujeres se sienten juntas.

b) Los hombres y las mujeres se sienten alternados.

Solución:

a) Sea A: El evento en el que las mujeres se sienten juntas.

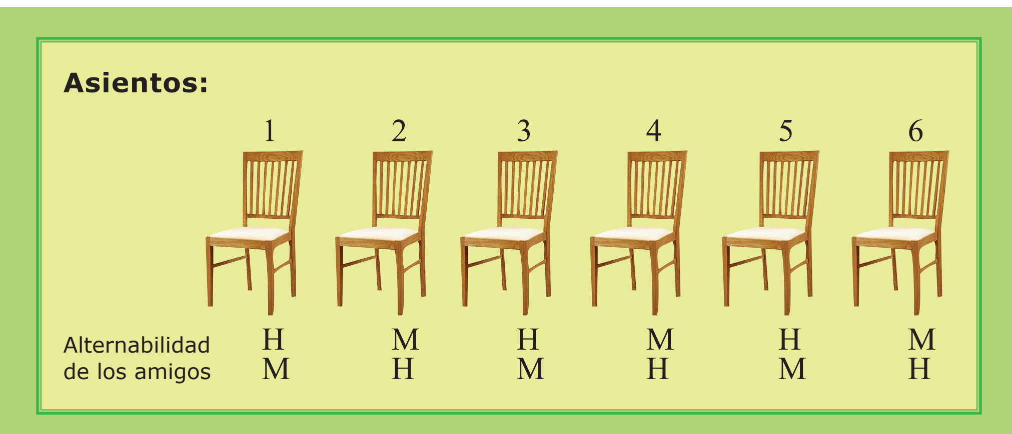
Existen 6 personas en general, lo cual quiere decir que se necesita una fila con 6 asientos disponibles.

Existen 4 posibilidades de tres asientos consecutivos: $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 5, 6)$, que serían los asientos ocupados por las mujeres. Como hay 720, es decir $6!$, maneras diferentes de que se sienten los 6 amigos, y existen $3!$ maneras de que se sienten las 3 mujeres en cada posibilidad de tres asientos consecutivos, y a su vez los 3 hombres tienen $3!$ maneras de sentarse en los tres asientos restantes, entonces:

$$P(A) = \frac{(4)(3!)(3!)}{6!} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 20\%.$$

b) Sea B: El evento en el que las mujeres y los hombres se sienten de forma alternada.

Hay $6! = 720$ maneras de sentarse los seis amigos en los asientos disponibles. De acuerdo al orden alternado y a la ubicación, podemos plantear la situación en la siguiente figura.



Como se puede observar en la figura, existen 2 formas distintas de alternar a los amigos, en las cuales les corresponde 3 asientos a los hombres y 3 a las mujeres; entonces existen $3!$ maneras diferentes de sentarse, tanto para las mujeres como para los hombres, por lo tanto:

$$P(B) = \frac{(2)(3!)(3!)}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10\%.$$

Ejemplo 11.36 Probabilidad Condicional.

En cierto curso, 25% de los estudiantes reprobaron matemáticas, 15% reprobaron física y 10% reprobaron ambas materias. Se selecciona un estudiante al azar:

a) Si reprobó física, ¿cuál es la probabilidad de que reprobó matemáticas?
b) Si reprobó matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que reprobó física?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que reprobó matemáticas o física?

Solución:

Sea $M = \{$estudiantes que reprobaron matemáticas$\}$ y
$F = \{$estudiantes que reprobaron física$\}$; entonces:

$$P(M) = 0.25 \qquad P(F) = 0.15 \qquad P(M \cap F) = 0.10$$

a) La probabilidad de que el estudiante reprobara matemáticas, dado que haya reprobado física, es:

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 67\%.$$

b) La probabilidad de que el estudiante reprobara física, dado que haya reprobado matemáticas, es:

$$P(F/M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 40\%.$$

c) $P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30 = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 30\%.$

Triángulo de Pascal

Es un triángulo que representa una regularidad numérica de la siguiente forma:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

.
.
.

¿Se da cuenta de cómo se forman los números en cada fila?

Es posible relacionar los números que se obtienen en cada línea del triángulo de Pascal con el número de veces de la ocurrencia de un evento determinado, en un experimento aleatorio sencillo que consiste en dos sucesos equiprobables, tales como el lanzamiento de una moneda (cara/sello), género de un hijo (masculino/femenino), entre otros.

Ejemplo 11.37 Triángulo de Pascal.

Calcular el número de casos en que se obtiene tres caras y un sello al lanzar cuatro veces una moneda.

Solución:

Se puede calcular mediante el triángulo de Pascal. Observe la siguiente sucesión de potencias del binomio $(c + s)$:

$(c+s)^1 =$	$c + s$
$(c+s)^2 =$	$c^2 + 2cs + s^2$
$(c+s)^3 =$	$c^3 + 3c^2s + 3cs^2 + s^3$
$(c+s)^4 =$	$c^4 + 4c^3s + 6c^2s^2 + 4cs^3 + s^4$
.	.
.	.
.	.

Los coeficientes de los términos en el desarrollo de cada una de estas potencias, son los números del triángulo de Pascal. ¿Podría usted desarrollar la siguiente potencia y generalizar sus conclusiones para $(c+s)^n$?

En el desarrollo de $(c+s)^4$, el término $4c^3s$ representa 4 casos favorables para el resultado de tres veces cara (c^3) y una vez sello (s): cccs - ccsc - cscc - sccc.

Análogamente, $6c^2s^2$ representa 6 casos favorables para el resultado de dos veces cara (c^2) y dos veces sello (s^2).

Ejemplo 11.38 Cálculo de probabilidades.

Considere el siguiente experimento aleatorio: lanzar un dado tres veces. ¿Es conveniente apostar a favor o en contra de obtener al menos una vez el 5?

Solución:

Como el experimento consta de tres eventos que son independientes entre sí, el número de casos posibles es $(6)(6)(6) = 216$.

Sea A: ninguna vez se obtiene el 5, el número de casos favorables para este evento es $(5)(5)(5) = 125$

$$P(A) = \frac{125}{216} \approx 0.58 \Leftrightarrow 58\%.$$

Para el evento A^C: Alguna vez se obtiene el 5, su probabilidad es:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.58 = 0.42 \Leftrightarrow 42\%.$$

Por lo tanto, no conviene apostar a favor debido a que la probabilidad de ganar es menor a la de perder.

Ejemplo 11.39 Cálculo de probabilidades.

Consideremos una caja de dos bolitas blancas y tres bolitas negras. Extraemos una de ellas al azar y después otra. Calcule la probabilidad de obtener una bolita blanca y una bolita negra, si:

a) Después de sacar la primera bolita, ésta se devuelve a la caja.

b) Después de sacar la primera bolita, ésta no se devuelve a la caja.

Solución:

a) En este caso, los eventos son independientes.

Número de casos posibles $= (5)(5) = 25$.

Número de casos favorables $= (2)(3) + (3)(2) = 12$.

(una blanca y una negra o una negra y una blanca).

$$P(A) = \frac{12}{25} \Leftrightarrow 48\%.$$

O bien, $P(A) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{12}{25}$.

b) En este caso, los eventos son dependientes.

Número de casos posibles $= (5)(4) = 20$.

Número de casos favorables $= (2)(3) + (3)(2) = 12$.

$$P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 60\%.$$

O bien, $P(B) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{3}{5}$.

Ejemplo 11.40 Cálculo de probabilidades.

En el juego de la ruleta, una bola puede caer en cualquiera de las 37 casillas, que son sectores circulares iguales, numerados del 0 al 36. Hay 18 casillas rojas, 18 negras y una blanca (la del 0). En el juego gana el número de la casilla en que cae la bola, después de hacerla girar libremente y detenerse por sí sola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola caiga en una casilla numerada con un número par mayor que 29?

Solución:

Como la bola puede caer en cualquiera de las casillas, los casos posibles son 37.

Los números (o casillas) mayores que 29 son:

$30 - 31 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36$.

De ellos, son números pares: 30, 32, 34 y 36.

Por lo tanto, los casos favorables son 4 y la probabilidad requerida es 11%.

Ejemplo 11.41 Cálculo de probabilidades.

La probabilidad de que un alumno haya aprobado la parte teórica del examen para obtener licencia para conducir es 0.68; la probabilidad de que haya aprobado el examen práctico es 0.72; y, la probabilidad de que haya aprobado alguna de las dos partes es 0.82. Elegido un alumno al azar, encuentre la probabilidad de que haya aprobado el examen para obtener licencia.

Solución:

Para obtener la licencia, cualquier persona debe aprobar ambas partes del examen: la teórica y la práctica. Nos preguntan entonces, por la probabilidad de que una persona elegida al azar haya aprobado las dos partes del examen.

Si denominamos:

A: Aprobar la parte teórica.
B: Aprobar la parte práctica.

Debemos calcular la probabilidad de A y B, o bien: $P(A \cap B)$. Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si despejamos $P(A \cap B)$, tenemos:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Del enunciado, tenemos que:

$P(A) = 0.68$, $P(B) = 0.72$ y $P(A \cup B) = 0.82$.

Reemplazando en la ecuación anterior, se tiene:

$P(A \cap B) = 0.68 + 0.72 - 0.82$, de donde

$P(A \cap B) = 0.58$

Por lo tanto, la probabilidad que un alumno elegido al azar obtenga su licencia es 58%.

Ejemplo 11.42 Diagrama de árbol con cálculo de probabilidades.

Existen tres cajas que contienen unidades de CD-ROM, de acuerdo al siguiente detalle:

Caja I: contiene 10 CD-ROM, de los cuales 4 son defectuosos.
Caja II: contiene 6 CD-ROM, de los cuales 1 es defectuoso.
Caja III: contiene 8 CD-ROM, de los cuales 3 son defectuosos.

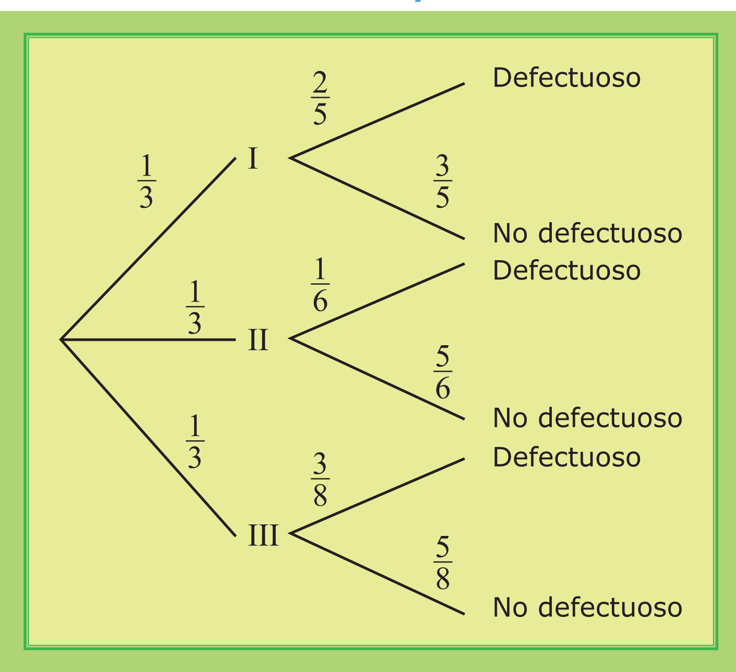
Si se escoge al azar una caja y luego sacamos al azar un CD-ROM. ¿Cuál es la probabilidad de que el CD-ROM sea defectuoso?

Solución:

Aquí realizamos una serie de dos experimentos consecutivos:

a) Escoger una de las tres cajas.
b) Escoger un CD-ROM que sea defectuoso o no defectuoso.

El siguiente diagrama de árbol describe cada experimento consecutivo, en donde cada rama es un experimento y la probabilidad de cada rama del árbol se coloca según cada caso:



La probabilidad de que una trayectoria del árbol suceda es, según el principio multiplicativo, el producto de las probabilidades de cada rama de la trayectoria, o sea, que la probabilidad de escoger la caja I y luego un CD-ROM defectuoso es $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{15}$.

Ahora, como hay tres trayectorias mutuamente exclusivas que conducen a un CD-ROM defectuoso, por el principio aditivo, la suma de las probabilidades de estas trayectorias es la probabilidad buscada, así:

$$p=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{2}{15}+\frac{1}{18}+\frac{3}{24}=\frac{48+20+45}{360}=\frac{113}{360}\Leftrightarrow 31\%.$$

Ejemplo 11.43 Diagrama de árbol con cálculo de probabilidades.

Tres empresas de comercialización, A, B y C, han solicitado a los egresados de Auditoría de la ESPOL, realizar una auditoría de sus estados contables. Se sabe que la empresa A tiene 180 estados contables, mientras que la B y la C tienen 250 y 300, respectivamente. Se sabe también que 18 estados contables de la A tiene errores, 20 de los de B tiene errores y 33 de los de C también tiene errores. Suponiendo que los estudiantes auditores hacen el trabajo correctamente, y se

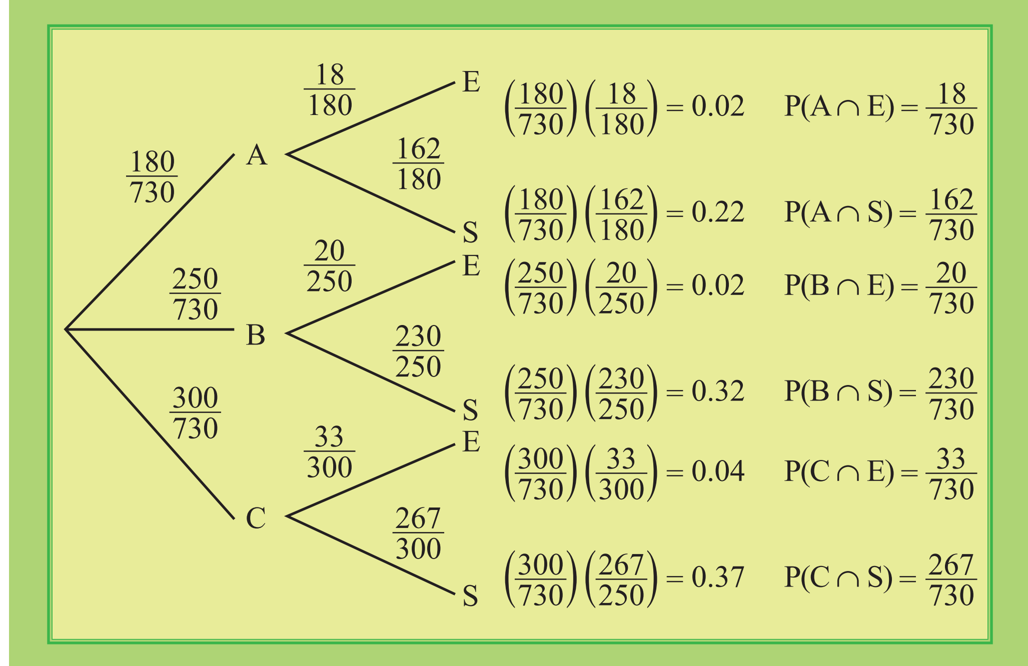
escoge al azar un estado contable: a) ¿Cuál será la probabilidad de que éste tenga errores? b) Si el estado contable escogido no contiene errores, ¿cuál será la probabilidad de que provenga de la empresa B?

Solución:

Sean los eventos:

A: Seleccionar un balance de la empresa de comercialización A.
B: Seleccionar un balance de la empresa de comercialización B.
C: Seleccionar un balance de la empresa de comercialización C.

E: En el que el estado contable seleccionado tenga errores.
S: En el que el estado contable seleccionado no tenga errores.



a) De acuerdo al evento E y por el principio aditivo:

$$P(E) = 0.02 + 0.02 + 0.04 = 0.1 \Leftrightarrow 10\%$$

b) Sea S: El evento en el que el estado contable seleccionado no tenga errores.

$$P(S) = 1 - 0.1 = 0.9 \Leftrightarrow 90\%$$

$$P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0.315}{0.9} = 0.35 \Leftrightarrow 35\%.$$

Para los ejercicios de las secciones 11.2, 11.3, 11.4 y 11.5, considere los siguientes conjuntos de datos A, B y C, respectivamente.

A. Edad en años de estudiantes en etapa colegial	B. Notas de los estudiantes de un curso de Cálculo en la ESPOL	C. Tiempo de espera en minutos de los clientes de un banco de la localidad
16	6.45	40
12	8.30	45
12	7.55	52
11	6.00	33
19	8.20	27
16	6.25	5
17	6.00	11
11	7.00	31
16	6.40	42
9	7.45	51
17	6.20	55
16	6.35	55
12	6.55	60
13	7.80	42
10	6.00	37
16	6.45	35
17	7.95	10
14	6.00	43
17	6.15	54
16	7.05	55
18	7.35	10
13	6.25	22
14	6.00	5
13	6.45	62
13	6.60	74
13	9.15	57
14	6.60	42
17	7.60	43
14	6.35	31
12	7.30	26
14	7.40	29
15	8.15	35
14	6.70	33
13	6.25	41
17	6.40	39
10	6.45	44
15	8.30	54
15	7.55	56
12	6.00	22
14	8.20	15
13	6.25	32
10	6.00	17
12	7.00	26
16	6.40	42
12	7.45	44
14	6.20	45

11.2 Organización de datos

1. Con cada uno de los conjuntos de datos dados:
   a) Construya una tabla de frecuencias estimando un número de intervalos adecuado.
   b) Complete la tabla con las frecuencias: absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada.
   c) Calcule la marca de clase para cada intervalo.
   d) Formule al menos cuatro interpretaciones expresándolas con sus propias palabras. Discútalas con sus compañeros y analice su validez.

11.3 Gráficos de representación

2. Con cada uno de los conjuntos de datos dados:
   a) Construya el histograma de frecuencias.
   b) Construya la poligonal de frecuencias.
   c) Formule al menos cuatro interpretaciones que puedan ser sustentadas con los gráficos construidos.

3. Con los datos del grupo B, construya un diagrama de tallo y hojas.

11.4 Medidas de tendencia central

4. Para cada uno de los conjuntos de datos dados:
   a) Calcule los estadísticos de tendencia central.
   b) Describa los cuartiles y deciles.
   c) Formule al menos cinco interpretaciones que puedan ser sustentadas con la información obtenida en los literales anteriores.

5. Analice la ubicación de los estadísticos obtenidos en el ejercicio anterior respecto al histograma de frecuencias.

11.5 Medidas de dispersión

6. Para cada uno de los conjuntos de datos dados:
   a) Calcule los estadísticos de dispersión.
   b) Formule al menos tres interpretaciones que puedan ser sustentadas con la información obtenida en el literal anterior.

11.6 Probabilidades

7. En el experimento de lanzar dos dados y el resultado es la multiplicación de los dos números obtenidos, determine:
   a) El espacio muestral.
   b) La probabilidad de que el resultado sea 12.
   c) La probabilidad de que el resultado sea menor que 10.
   d) Discuta si los dos eventos anteriores son equiprobables.

8. En un concurso se deben obtener aleatoriamente dos dígitos del 1 al 5, de manera independiente. Si la suma de los dos dígitos es par, el participante gana $\$100$; si la suma de los dos dígitos es impar, gana $\$10$.

   a) Escriba el espacio muestral para este concurso.
   b) Encuentre la probabilidad de que el participante gane $\$100$ en un intento.
   c) ¿Le recomendaría este juego a alguien? ¿Por qué?

9. Se pregunta a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de un determinado candidato a la Presidencia de la República.

   a) Determine el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y "n" para las negativas.
   b) Calcule la probabilidad de que al menos una persona es partidaria del candidato.
   c) Calcule la probabilidad de que ocurra el evento contrario al del literal anterior.

10. Se pregunta a cuatro personas elegidas al azar que consumen carnes, si les gusta la carne de cerdo.

   a) Determine el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y "n" para las negativas.
   b) Calcule la probabilidad de que al menos tres personas gusten de la carne de cerdo.
   c) Calcule la probabilidad de que, a lo mucho, sólo a dos personas les guste la carne de cerdo.

11. Discuta el siguiente problema: Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar, sea máxima la probabilidad de obtener una bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.

11.7 Conjuntos y Probabilidades

12. Las estadísticas de accidentes de tránsito indican que el 80% de la población ha sufrido algún tipo de accidente. El 60% ha sufrido daños en su vehículo y el 35% ha sufrido daños físicos. Determine la probabilidad de que un conductor sufra los dos tipos de daños.

13. Mediante un estudio de opinión, se estableció que las tres características preferidas por el electorado sobre un candidato a la Alcaldía son:

- Hombre (H)
- Sin afiliación política (N)
- Casado (C)

Se sabe que el 75% de los encuestados prefieren un candidato de género masculino, el 60% lo prefiere sin afiliación política, el 70% prefiere que sea casado, el 90% prefieren que sea hombre o sin afiliación política, el 85% prefiere que sea hombre o casado, el 95% prefiere que sea sin afiliación política o casado, el 99% prefiere alguna de las tres características para el candidato.

Construya un diagrama de Venn para representar las tres características.

Cuál es la probabilidad de que una persona:
a) Prefiera las tres características.
b) No prefiera alguna de las tres características.
c) Prefiera que sólo sea casado.

14. A través de una encuesta se determinó que el 80% de los habitantes se informa diariamente de las noticias viendo la televisión, el 40% se informa por el periódico y el 30% por ambos medios. Determine:

a) La probabilidad de que una persona de esa ciudad no se informa por alguno de estos medios.
b) La probabilidad de que una persona que se informó por la televisión haya leído el periódico.
c) Sabiendo que una persona leyó el periódico, ¿cuál es la probabilidad de que no vio los noticieros?

15. Mediante una encuesta, se ha determinado que el 80% de las compras diarias en cierto supermercado son realizadas por mujeres. De este grupo, el 70% compra algún producto en promoción, mientras que del grupo de los hombres, sólo el 10% compra productos en promoción.

a) Determine la probabilidad de que el almacén venda diariamente algún producto en promoción.
b) Si se selecciona una venta al azar y no contiene productos en promoción, ¿cuál es la probabilidad que la compra haya sido hecha por una mujer? ¿Y por un hombre?

16. Cierta cooperativa de ahorros ha observado que la probabilidad de que un préstamo sea cancelado es del 70% si el prestamista es de género femenino. La proporción de ahorristas hombres respecto a mujeres es de 1. Determine la probabilidad de que un ahorrista pague un préstamo y sea de género femenino.

17. Cierto concurso consiste en obtener aleatoriamente un número divisible para 10 de todos los números enteros comprendidos del 1 al 40.

Si el número obtenido es divisible para 10, el participante recibe el llavero A; en caso contrario, recibe el llavero B. A continuación, se escoge una llave. El llavero A contiene 3 llaves de un vehículo y 7 llaves que no corresponden al vehículo. El llavero B tiene 2 llaves del vehículo y 10 que no lo son.

Encuentre:

a) La probabilidad de que la llave extraída sea del vehículo.
b) La probabilidad de que la llave extraída sea del vehículo y pertenezca al llavero B.

18. Cierto empresario requiere decidir sobre la mejor opción para elevar sus ventas. Existen dos situaciones, A y B, que afectan su mercado. La situación A tiene una probabilidad de ocurrir igual a 0.4, y la B de 0.6. En ambas situaciones puede invertir en un anuncio. Si ocurre A, la probabilidad de invertir en un anuncio es de 0.8, y si ocurre B, la probabilidad es de 0.3. El empresario desea invertir en el anuncio. Determine:

a) La probabilidad de que el empresario invierta en el anuncio.
b) La probabilidad de que el empresario no invierta en el anuncio.
c) ¿Qué recomendaría usted si el evento A es una situación que favorece sus ventas?

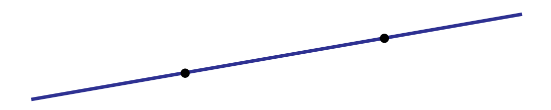
19. Considere que 0.076 es la probabilidad de que cuatro clientes diferentes compren un televisor con pantalla plana en un almacén. Determine:

a) La probabilidad de que uno de ellos compre un televisor con pantalla plana.
b) La probabilidad de que al menos dos de ellos compren un televisor con pantalla plana.

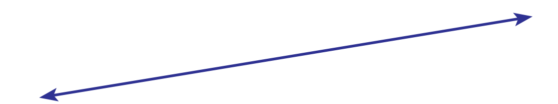
20. Un examen consta de 6 preguntas. Cada pregunta tiene cinco opciones, de las cuales sólo una es la respuesta correcta. El número mínimo de preguntas que un estudiante debe contestar correctamente para aprobar el examen es 4. Determine la probabilidad de que un estudiante apruebe el examen contestando al azar las preguntas.

POSTULADOS DE EUCLIDES

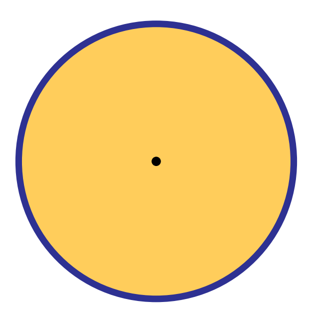
I. Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.



II. Toda recta se puede prolongar indefinidamente.



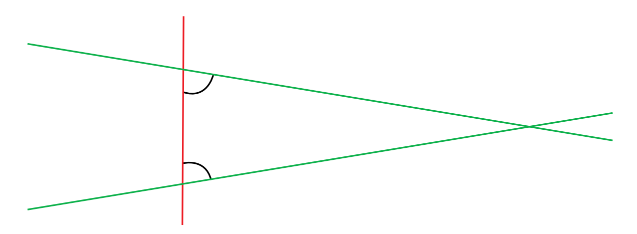
III. Con cualquier centro y cualquier longitud de radio se puede trazar una circunferencia.



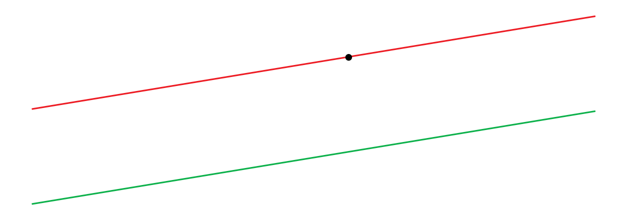
IV. Todos los ángulos rectos tienen igual medida.



V. Si una recta, al intersecar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos ángulos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán del lado en que los dos ángulos son menores que dos ángulos rectos.



VI. Por un punto exterior a una recta, existe una sola paralela a la recta dada.



Geometría del Espacio

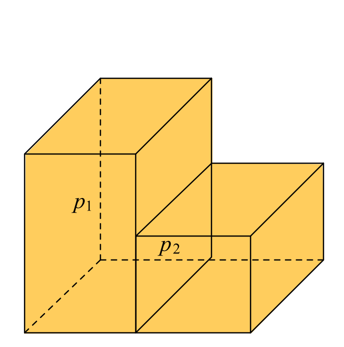
POSTULADOS

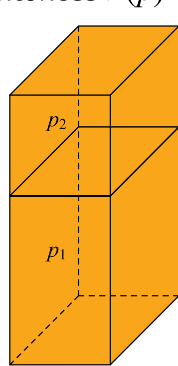
Definamos una función V, a la cual denominaremos volumen, que a todo sólido le hace corresponder un número real positivo. Si S representa un sólido, el valor que toma V en S lo denotaremos por $V(S)$ y lo denominaremos volumen de un sólido:

V es una función que debe cumplir lo siguiente:

a) Las pirámides congruentes tiene igual volumen.

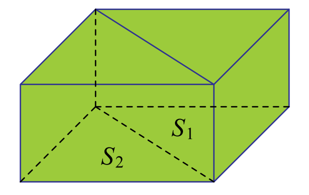
b) Si p, p_1, p_2 son prismas, tal que $p = p_1 \cup p_2$, y además p_1 no contiene puntos en el interior de p_2, y viceversa, entonces $V(p) = V(p_1) + V(p_2)$.

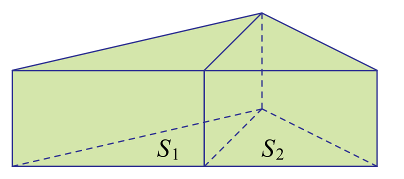




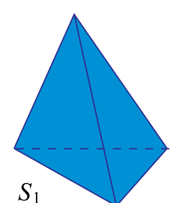
POSTULADO DE CAVALIERI

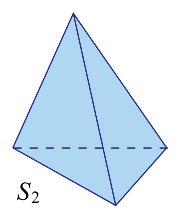
Dados los sólidos S_1 y S_2 y un plano Π, si para todo plano que interseca a S_1 y S_2, y que es paralelo a Π, las dos intersecciones tienen igual área, entonces los dos sólidos tienen igual volumen, esto es $V(S_1) = V(S_2)$.





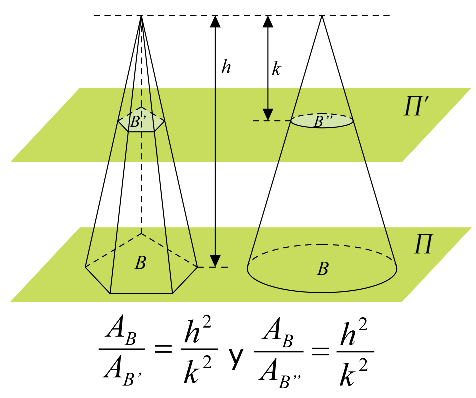
S_1 y S_2 son sólidos de igual volumen.





Geometría del Espacio

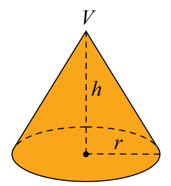
Estudiaremos ahora un cono cuya base tiene por área A_B y longitud de la altura h, así como una pirámide con igual altura que el cono y con base de área igual a A_B. Sea Π el plano en que se apoyan los dos sólidos y Π' un plano paralelo a Π que determina una sección de área $A_{B'}$ en la pirámide y área $A_{B''}$ en el cono. Sea k la distancia de Π' al vértice del cono o de la pirámide.



$$\frac{A_B}{A_{B'}} = \frac{h^2}{k^2} \text{ y } \frac{A_B}{A_{B''}} = \frac{h^2}{k^2}$$

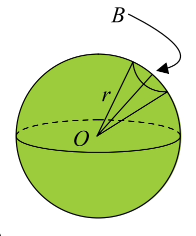
Luego, $A_{B'} = A_{B''}$

Aplicando el postulado de Cavalieri, concluimos que el cono y la pirámide tienen igual volumen, siendo así:



$$V\,(CONO) = \frac{A_B h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Teniendo en cuenta que toda esfera de radio r puede aproximadamente ser descompuesta en n conos de altura r y base B muy pequeña, el volumen de la esfera se obtiene a partir de:



$$\left(\frac{r}{3}\right)(A_{B_1} + A_{B_2} + \ldots + A_{B_n})$$

Cuando $n \to \infty$

$$A_{B_1} + A_{B_2} + \ldots + A_{B_n} \to 4\pi r^2$$

Por tanto:

$$V(ESFERA) = \left(\frac{r}{3}\right)4\pi r^2 = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$$

$$V(ESFERA) = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

1 Capítulo uno

1. a) si, b) no, c) si, d) no, e) no, f) si, g) si, h) si, i) no, j) si, k) no, l) si, **2.** (e); **3.** (e); **4.** (b); **5.** (c); **6.** (d); **9.** (b); **10.** (a); **11.** (b); **14.** a)0, b)1, c)1; **15.** (d); **16.** (b); **17.** (a); **18.** (e); **19.** (b); **20.** a) 1, b) 0, c) 0, d)1, e) 0; **21.** I.(a), II. (d), III. (b); **22.** (b); **23.** (b); **24.** (b); **25.** (b); **26.** (b); **27.** (d); **28.** (b) ; **30.** (b); **31.** (e); **32.** (e); **33.** (d); **34.** (d); **35.** (d); **36.** (a); **37.** (d); **38.** a) 1, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1; **40.** a) 1, b) 1, c) 0, d) 0, e)1; **41.** a) 1, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1; **42.** (b); **43.** (b); **44.** (b); **45.** (b); **46.** (b); **47.** (d); **48.** (d); **49.** (a); **50.** (d); **51.** (d); **52.** (c); **53.** (a); **54.** (e); **55.** contingencia; **57.** (a) contingencia, (b) contingencia, (c) contingencia, (d) contradicción, (e) tautología; **58.** (I) contingencia, (II) contradicción, (III) contingencia, (IV) tautología; **59.** (a); **60.** (a); **61.** (a); **62.** (a); **64.** (b); **65.** (a); **66.** (b); **67.** (a); **68.** (e); **69.** (d); **70.** (e); **71.** (d); **72.** (d); **73.** (c); **74.** (b); **75.** (e); **76.** (d); **77.** válido; **78.** no válido; **79.** válido; **80.** no lo hace válido; **81.** (b); **84.** (e); **85.** a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 1; **86.** (d); **87.** a) 1, b) 0, c) 0, d) 1, e) 0; **88.** b) (I) 1, (II) 0, (III) 0; **89.** b) infinito y d) unitario; **90.** (d); **91.** a) todos los seres humanos son vegetarianos y comen zanahorias, b) algunos son vegetarianos o comen zanahorias, c) todos los seres humanos son vegetarianos pero no comen zanahorias; **93.** (e); **94.** a)1, b)0, c)0, d) 1, e) 1, f) 0, g) 0; **96.** (c); **98.** (a); **99.** (d); **100.** (b); **101.** $A=\{*, ?, \#, \pi\}$, $B=\{\#, \Omega, \exists, \psi, \pi, e\}$, $C=\{\Omega, e\}$; **102.** (e); **104.** 1,0,0,0,0,0; **105.** $A=\{a,\delta,f,\theta,\pi,e\}$, $B=\{*,?,\Delta,a,\delta,f\}$, $C=\{+,f\}$; **106.**(a); **107.**(e); **108.** $A=\{\theta,\pi,e,a,f\}$, $B=\{*,?,\Delta,a,\delta,f\}$, $C=\{\alpha,e,f,\delta\}$; **109.** (e); **110.** $A=\{1,3,4\}$, $B=\{4,6,7,8\}$, $C=\{8,9\}$; **111.** $A=\{3,4,6,7,8,11,12\}$, $B=\{1,2,3,4,5,7,8,9,13,15\}$, $C=\{4,5,6,7,8,10,12,14,15\}$; **112.** $A=\{2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, $C=\{10,11,12,13\}$; **113.** todas son falsas; **114.** (c); **115.** (b); **117.** (c); **118.** (b); **119.** (c); **120.** (a); **121.** (a); **122.** (b); **123.** (a); **124.** (b); **125.** (a); **126.** (a); **127.** c) 2%, d) 40; **128.** a)3, b) 57, c) 100, d) 97; **129.** a) 180, b) 60, c) 70, d) 120, e) 190; **130.** 4 y 14; **131.** $A=\{1,2,3,8\}$, $B=\{3,4,5,7,8,9\}$, $C=\{4,9\}$; **133.** a) 15%, b) 45%, c) 15%, d) 85%, e) 75%, f) 55%; **134.** (e); **137.** 30; **138.** (e); **139.** (d); **140.** a) 1, b) 1, c) 1; **141.** (c); **142.** a)$\{0,2,4,6\}$, b) $\{1,3,5\}$, c) Re; d) $\{1,3,5\}$, e) Re; f)$\varnothing$, g) $\{1,3,5\}$; **143.** a) Re, b) 0, 1; **144.** a) $\{1,2,4\}$, b) $\{1,2,3,4,5\}$, c) $\{6\}$, d) $\{2,3,5,7\}$, e) $\{1,2,4,6\}$, f) $\{2,3,5\}$, g) Re; h) $Aq(x)$; **145.** (b); **146.** (a); **147.** (c); **148.** (a); **149.** (b); **150.** (b); **151.** (b); **152.** (a); **153.** (b); **154.** $a=b$; **155.** (b); **156.** (b); **157.** (e); **158.** (b); **159.** (b); **160.** (b); **161.** (b); **162.** (a); **163.** (a); **164.** (b); **165.** (a); **168.** (b); **169.** (d); **170.** (d); **171.** (b); **172.** (b); **173.**(b); **174.**(e); **175.**(c); **176.**(e); **177.**(c); **178.**(c); **179.**(a); **180.**(d).

1. (b); **2.** (c); **3.** a) 20, b) $\frac{16}{3}$ c) 2; **5.** (b); **6.** (c); **7.** (a); **9.** (c); **12.** (b); **14.** (a); **15.** (b); **16.** (b); **17.** (c); **18.** (d); **19.** (a); **20.** (a); **21.** (b); **22.** (a); **23.** (c); **24.** (b); **25.** (b); **27.** a) $1.4m$, b) 30; **28.** 6; **29.** 60; **30.** $-\frac{1}{a}$; **31.** (c); **32.** (e); **33.** (a); **34.** a) $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^2+3a+6)$, b) $(a+b)(b+c)(a+c)$, c)$(x-1)(x+1)(x-5)$, d) $(x-1)(x-2)(x^2+2)$, e) $(x-1)(x+3)(x-2)$;

35. a) $\frac{4}{xy}$, b) $\frac{x(x-5)}{(x+2)(x-2)(x+1)}$, c) $\frac{3x^2-2}{x(x-1)}$, d) $\frac{47}{(x+1)(x^2-16)}$, e) $\frac{x+3}{4}$, f) $\frac{2}{5}$, g) $-\frac{3x}{(x-2)(x-3)}$, h) $\frac{5a+4}{a^2+a+1}$, i) $\frac{x-y}{y}$ j) $\frac{a^4+1}{a+1}$, k) $2a$, l) $\frac{16a^{15}}{1-a^{16}}$;

36. a) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ac)$, b) $3(a-b)(b-c)(c-a)$, c) $(a-3)(a+3)(a-3)(a+3)$, d) $(x+1)(x-1)(x-3)(3x-1)$, e) $-2(x-2)(x-4)(x-1)$; **37.** a) 0, b) $\frac{a}{a^2-1}$, c) $\frac{1}{a+c}$, d) $\frac{a+c}{(c-a)(a-b)}$; **38.** -1; **39.** 0; **40.** (e); **41.** (c); **44.** (a); **45.** (d); **46.** (d); **47.** (a); **48.** $\varnothing$; **49.** (c); **50.** $\frac{49}{36}$; **51.** (b); **52.** (a); **53.** (d); **54.** a) 5, b) $\frac{1}{a}$, c)$\varnothing$, d) 9, e) $(-\infty,-2]$, f) $-\frac{4}{3}$, 10, g) -1,4, h)$\varnothing$, i) 0, $\frac{25}{9}$, j) -2, 0; **56.** 19,38; **57.** $\frac{21}{8}$; **58.** $\frac{20}{3}$h; **59.** $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$;**60.** 76 y 24; **61.** (c); **62.** 225 ó 255; **63.** 4 y 8; **64.** a)70 ó 50, b)60, c)60 ó 45, d)50 ó 55; **65.** 6, 8 y 9, 11; **66.** $1\frac{1}{9}$h; **67.** $1\frac{1}{3}$ día; **68.** $4\frac{18}{25}$h; **69.** 6% y 7%; **70.** $3\frac{3}{4}$ Litros; **71.** 3 Litros; **72.** $\frac{1}{2}\,pie^3$ al 10%, $\frac{3}{2}\,pie^3$ al 30%; **73.** 9000 extra y 6000 súper; **74.** 140 al 15%, 60 al 25%; **75.** $15lb$ sal prieta y $30lb$ coco; **76.** 12000 al 9% y 6000 al 6%; **78.** a)$\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$, b)$\varnothing$, c)$2a-c$, $2a+c$, d) $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, e) $\frac{2ab}{a+b}$, f) $\frac{2a^2+ab+3b^2}{a+b}$, g) $\frac{ac}{b}$, h) $a+b$, i) $\frac{abc}{a+b+c}$; **79.** a)-2, $-\frac{13}{4}$, b) 2,7, c) $2a$, $-\frac{5}{13}a$, d) $c\pm\sqrt{(c+a)(c-b)}$, e) a, b, f) -1, g) $-\frac{a+b}{2}$, h)3; **80.** a) ± 4 , b) 3, c)0, d) a, $-a$, e) 4, 5, f) a, g) 0, h) 1, i)$\varnothing$, j)$9-4\sqrt{3}$, k)$\varnothing$; **81.** 8; **82.** $\frac{9}{4}$; **83.** $2+\sqrt{2}$; **84.** $\frac{5}{2}$; **85.** (a); **86.** (a); **87.** (c); **88.** (a); **89.** (d); **90.** (d); **91.** $[0,+\infty)$; **93.** a)$(-\infty,-\frac{5}{2})$, b)$(-7, 3)$, c)$(-\infty,\frac{26}{7})\cup(\frac{14}{3},+\infty)$, d) $(-3,-2)\cup(-1, 1)$, e) $(\frac{1}{3}, 3)^C$, f) 2; **94.** a) $(-\frac{5}{2},+\infty)$, b) $(2,7]$, c) $\varnothing$, d) $(0, \frac{8}{3}]$, e)$[4, \frac{16}{3})^C$, f) $(-\infty, 0]\cup[\frac{1}{2}, 2]$, g)$[-3, 6)\cup(6, 7]$, h)$[-\frac{5}{3},-1)\cup(1,+\infty)$; **110.** (a); **111.** 72; **112.** a)360, b)720, c)240; **113.** a) 816, b) 3060; **114.** a) 4200, b) 11550; **115.** (e); **116.** (b); **118.** $840u^4v^6$; **119.** $4320x^3y^{-3}$; **120.** sexto término, -61236; **122.** séptimo término, 84; **123.** sexto término, $16800x^{10}$; **124.** (e); **125.** a) 24, 7, b) -16, 18; **126.** (e); **127.** (e); **128.** (e); **129.** (c); **131.** (c); **136.** 5120; **139.** a) $\frac{2}{3}$, b) 9; **140.**

a) 20, b) 480; **141.** a) 25, b) 204, c) 6300, d) 1300; **142.** 10 años; **143.** 120; **144.** 11 años; **145.** a) 4; b) 125, c) 201. **146.** a) 30, b) 241; **147.** a) 168, b)151.5, c) 1917, d) 117; **148.** 12; **149.** 10; **150.** (d)

3 Capítulo tres

1. (b); **2.**(a); **3.**(b); **4.**(d); **5.** a) $\{1\}^C, \{1\}^C$, b) $\{-3\}^C, \{2\}^C$, c) $[-1,1], [0,1]$, d) $(-1,1)^C$, $[0,\infty)$, e) $[1,3]^C$, $(0,\infty)$, f) $\mathbb{R}$, $[-1,1)$, g) $\{x/x \neq 1 \wedge x \neq 2\}$, $\mathbb{R}$, h) $[2,\infty)$, $[1,\infty)$; **6.**(e); **7.**(c); **8.**(c); **10.** VI y VII no son funciones; **11.** (b); **12.**(a); **13.** (d); **14.** (a); **15.** a) impar, b) par, c) par, d) impar, e) ni par ni impar, f) par; **18.** (c); **19.** (a); **20.** (a); **21.** (b); **22.** (d); **23.** (c); **24.** a) AH: $y= 1$, AV:$x= -8$, $(0, 1/8)$, $(-1,0)$; b) AH: $y=0$, no hay AV, $(0,2)$; c) AH: $y = 1$, no hay AV, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$; d) AH: $y=-2$, AV: $x = \pm 3$, $(0,0)$; e) no hay AH, AV: $x = \pm 1$, $(0,0)$; f)no hay AH, AV: $x = \pm 2$, $(0, 0)$; **25.** $a=8$, $b=2$, $c=-3$; **26.** (V); **27.** $g(x)= 2-f(x)$; **28.** (a) ;**30.** (a); **31.** a) $[3,+\infty)$, b) $(-\infty, 1)\cup\{3\}$; **32.** (c); **33.** (e); **34.** (b); **35.** a) 200AUD, b) 525AUD; **36.** a) 2420, b) 1999; **37.** $4x+2500$, b) $5.25x$ c)(2000,10500), d)2160; **38.** a) (500,2000), c) $\$\ 4\frac{2}{15}$; **39.** a)$\approx 15m$, b) $[0,15]$; **40.** a)(III) $C(N)=5N + 20$; **41.** (a); **42.** (b); **43.** (e); **44.** (b); **45.** (d); **46.** (c); **47.** a)6; b)–2; c) $-2(x-3)(x+1)$; **48.** a) $h=3$, $k=1$; **49.** a) $A(0,0)$, $B(6,0)$; b) $(3,45)$; c) $x=3$; **50.** a)2, b) 1/2; **51.** a) –5, b) 6; **52.** (c); **53.** a) $100x$, b)$-x^2+80x-700$, c) 900,40; **54.** (b); **55.** a) $a=2$, $b=20$, $c=9$, $d=8$, $e=32$; b) $12x-x^2$; c) 6 y 6; **56.** a) $3seg$; b) $45m$; **57.** a) $-4000x^2+160000x-1500000$, b) 20, c) 20000;

58. a) $\begin{cases} 2x-4 & ; \quad x \geq 2 \\ x^2+x+2 & ; \quad x \in (0,2) \\ x^2-4x+3 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{3}(2x-1); & x \geq 2 \\ \frac{x^2+3}{1-x} & ; \quad x \in (0,2) \wedge x \neq 1 \\ \frac{x^2+3}{4x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+2 & ; \quad x \geq 2 \\ x^2-x+4 & ; \quad 0 < x < 2 \\ x^2+4x+3 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 6x-3 & ; \quad x \geq 2 \\ (x^2+3)(1-x) & ; \quad 0 < x < 2 \\ 4x(x^2+3) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$;

59. (c);

60. a) $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}-x-2 & ; x > 0 \\ x^2-x-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2-\sqrt{x}-x-2 & ; x > 0 \\ x^2-x-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \sqrt{x}(x^2-x-2) & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x^2-x-2}; & x > 0 \wedge x \neq 2 \\ 0 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x}}; & x > 0 \end{cases}$;

61. (e); **62.** (a); **63.** (b); **64.** a) $\sqrt[3]{x}$, c) $\{-1,0,1\}$; **65.** $|x-1|$; **66.** a)$x-1$, b)$x+3$;

67. $\begin{cases} 4(-1-x) & ; \ x\in[-1, 0] \\ (1+2x)^2 & ; \ x\in(-\infty, -1) \end{cases}$; **68.** (a); **69.** (b); **70.** a) \$6; b) \$13.2; c) $\begin{cases} 10 & ; \ x\in[2, 2.5) \\ 12 & ; \ x\in[2.5, 3) \end{cases}$; d) $B(x) = 2[\![2x]\!] + 2$, e) \$8; f) 5.5 kg; g) \$24; h) 4kg, \$18; **71.** (c); **72.** (d); **73.** $\begin{cases} -6x-1 & ; \ x>0 \\ -6 & ; \ x=0 \\ -3x-2 & ; \ x<0 \end{cases}$; **74.** (d); **75.** (a), (g) y (h) no tiene gráfica; **76.**(a);

77.(b); **78.**(a); **79.**(b); **80.** a) $8/x$, es la misma que f, b) $8/x^2$, par, c) 2; **81.** a) $6 - 2x$; b) -18; **82.** todas son verdaderas; **83.** b) $\frac{x-1}{2}$, d) -13, e) $6x-7$, f) $8/x$, h) $8/x^2$, i) $\{-4, 4\}$; **84.** (c); **85.** a) 1; b) $\sqrt{\frac{x+1}{x}}$; $x > 0$, c) x^2-1, d) $\frac{1}{x^2(x^2-2)}$; **86.**(a); **87.**(b); **88.** (a); **89.** (a); **90.** (a); **91.** (a); **92.** (b); **93.** (c); **94.** (e); **95.** (c); **96.** $-4,2,3$; **97.** $x^4+2x^3+x^2-2x-2$; **98.** $\{18,-846/343\}$; **99.** (b); **100.** (d); **101.** (e); **102.** (c); **103.** a)$\{2\}$, b)$\{3\}$, c)$\{-1,1\}$; **104.** (d); **105.** a)$\{1\}$; b) $\{0,1\}$; c)$\{1/2,1\}$; d)$\{0\}$; e) $\{4\}$; **106.** (b); **107.** a) $(-\infty,1)\cup(5/3, 7/3)$; b) $\left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$; c) $\varnothing$; d) $(-\infty,-1)\cup\left(log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{3},0\right)$; e) $(-\infty, 0)$; **108.** a) $\frac{2^x}{2^x-2}$; $(0, 1)\cup(1,\infty)$; b) $\frac{2x}{x-1}$; $x\neq1$; c)x; $\mathbb{R}-\{2\}$; **109.**(b); **110.**(a); **111.**(b); **112.**(a); **113.**(e); **114.** a) $(0,\infty)$, $[1,\infty)$; c)$2^{x+3}-2x+1$; $x\leq0$; **115.** a)$\{4\}$, b)$\{3\}$, c)$\left\{ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$, d)$\{log_5(1+\sqrt{2})\}$, e) $\{log_{25}6,\ log_6 5\}$; **116.** a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17+log16}}{2}$, b) $x = e^{ln\,c}e^{5y}-4$; **117.** sólo (d) es verdadera; **118.** a) 24; b) 360; c) 0; d) 5; e) 0; f) 1; g) $log_3 12$; **120.** a) $\frac{a+3}{2(a+1)}$; b) $\frac{b}{1-a}$; c) $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$; d) 1; e) $\frac{x+3y}{2x}$; **121.** $ln\,9/ln\,8$; **122.** $3/2$; **123.** $\left\{1,\ log_2\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right\}$; **124.** (c); **126.** (b); **127.** (d); **128.** (c); **131.** a)$\{-1\}$; b)$\{1+e\}$; c)$\{1,4\}$; d)$\{-3\}$; e)$\{1,2\}$; f)$\{1/2,\ 1/4\}$; g)$\{100\}$; h)$\{10,10^{1/9}\}$; i) $\{1,\ 4,\ \sqrt{2}/2\}$; **132.** (c); **133.** (b); **134.** (a); **135.** (e); **136.** $ln\ 9-2e^{-2}-2$; **137.** a)$[2,\ 11/4)\cup[4,\ \infty)$; b)$(-3,-2)\cup(1,\ 2)$; c)$[9,\ \infty)$; d) $(2,\ 3)\cup[27/8,\ 4)$.

4 Capítulo cuatro

1. (b); **2.** (b); **3.** (a); **4.** (b); **5.** (b); **6.** a) $\pi/6$, b) $3\pi/4$, c) $-2\pi/3$, d) $5\pi/2$, e)-3π, f) $\pi/3$ **7.** a)30º, b)−225º, c)240º, d) 90º, e)15º, f) 720º;

8.

Rad.	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	28π/45	5π/6	π/12
Grad.	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	112º	150º	15º

9. 7cm; **10.** 60º; **11.** $\pi/8$; **12.** 57º, 33º; **13.** a) 0, b) $-1/12$, c) $(\sqrt{3}+1)/2$, d)$13/12$, e) $(3-\sqrt{3})/4$; f) $1/4$; **14.** a) 0, b) 1, c) $(9\sqrt{2}-8\sqrt{3})/6$, d) -1, e) $-(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$; **15.** (e); **16.** (e); **17.** a)7, b)4, c)1/2; **19.** a) a=1,5 y b=$\pi/4$, b) $\frac{3}{2}cos(5\pi/4) + 3$; c)

12:00; **20.** $-\sqrt{3}/2$; **21.** $-7\sqrt{65}/65$; **22.** a) $\sqrt{1-x^2}$, b) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$, c) $3\pi/5$, d) $-\frac{5\sqrt{34}}{34}$; **23.** (b); **24.** (d); **25.** (d); **26.** (a); **27.** (e); **28.** (e); **29.** (d); **30.** $-(2+\sqrt{3})$;

31. $\begin{cases} -x & , \ x < -e \\ ln(-x) & , \ -e \le x \le -\frac{1}{e} \\ -x & , \ -\frac{1}{e} < x < 0 \\ cos(x) & , \ x \ge 0 \end{cases}$; **32.** $\frac{a^2+1}{1-a^2}$; **33.** a) 1, b) 1/4, c) $2tan(20^o)$

d) $-1/4$, e) $-cos(2\beta)/sen^2(\beta)$, f) 1/64, **36.** (d); **37.** 24/7; **38.** $\sqrt{2}/2$; **39.** $2(\sqrt{3}-1)$; **40.** $\frac{5+12\sqrt{3}}{26}$; **42.** 4/5; **44.** a) $2\sqrt{2}/3$, b) 7/9, c) $4\sqrt{2}/9$; **45.** (a); **46.** $(\pi/6, 5\pi/6)$; **47.** $\left(cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right), 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$; **48.** a) 2, $\pi/3$, b) $rg\,f = [1, 2]$, c) No es inversible, d) $7\pi/12$; **49.** (d); **50.** $\{\pi/4, \pi/2\}$.

5 Capítulo cinco

1. (b); **2.** $\begin{pmatrix} 12 & -44 & 43 \\ -8 & 35 & -33 \end{pmatrix}$; **3.** a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) Si, c) No, d) (i) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 15 \\ 8 & 21 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & -12 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$; **4.** a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **5.** a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & -5 \\ -7 & 9 & 12 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ -9 & 9 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -12 & 8 & -29 \\ 24 & -13 & 54 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, **6.** a) $\begin{pmatrix} -17 & -3 \\ 0 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 28 \\ -34 & 16 & 40 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -3 & 35 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$; **7.** a) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, b) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 39 & 78 \\ -30 & -60 \\ -33 & -66 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **8.** $\begin{pmatrix} 68 & -3 & -3 \\ 13 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **10.** $\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 28 & 59 \\ 20 & 28 \end{pmatrix}$;

12. (i) $\begin{pmatrix} a^2+4 & 2a-2 \\ 2a-2 & 5 \end{pmatrix}$, (ii) -1; **13.** a) $\begin{pmatrix} 52 & 65 & 5 \\ 73 & 90 & 10 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & -13 & 13 & -4 \\ 4 & -10 & 9 & -3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 20 & 30 & -10 \\ -34 & -25 & -45 \\ 41 & 55 & -5 \\ -11 & -10 & -10 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$; **15.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **17.** $m = \pm\sqrt{2}$;

18. A y B no son semejantes; **19.** -2, $\frac{2}{3}$; **20.** a) $\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 16 \\ 0 & -6 & 8 \\ 28 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 14 \\ 20 & -24 & -40 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$, c) 0, d) 192, e) $\frac{1}{256}\begin{pmatrix} 7 & -11 & 5 \\ -58 & 18 & 50 \\ 26 & 14 & -18 \end{pmatrix}$;

21. -1; **22.** a) 0, b) 0, c) $\mathbb{R}$, d)$\varnothing$; **23.** a) 0, 0, b) $AB \neq BA$, AB es matriz cero, c) CD matriz cero, $DC=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; **24.** 2; **25.** (c); **26.** (e); **27.** (d); **28.** (a); **29.** (a); **30.** (d); **31.** $36n$, $-n$; **32.** $\{-1, 0\}$; **33.** 0, -1; **34.** (e); **35.** a) 15, b) 8, c) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$; **36.** $\left\{k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$ $k=0,1,2,...$; **39.** (c); **41.** a) $(x-4)(x-1)$, b) $(x-2)(2x-1)$, c) $2(x-2)(x+6)$; **42.** $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$; **44.** 1; **45.** 30; **46.** (a); **47.** b)1, c) $\left\{\left(\frac{1}{3}(11-7t), \frac{1}{3}(2t-4), t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$;

48. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, $(A^{-1})^{-1}=A$, c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$, **49.** $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 2 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, **50.** a)$\alpha=2$, $\beta=1$, b)Sí porque $det(A)=-1$;

51. a) 0,–2, b) $t=-1$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;**52.** a) $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, b)$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **53.** a) $X=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$;

54. (e);**55.** a) $a \in \mathbb{R}-\{-2\}$, b) $a,b \in \mathbb{R}$; **56.** 0, 1; **57.** (c); **58.** 1, –2; **60.** $\lambda=-1$, $t=1$;

61. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, c) $\varnothing$, d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, **62.** $a=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$; **63.** 1, 1, 0, 0, 0; **64.** (c);

65. a) $\forall m \in \mathbb{R}$, b) $m \neq 0$, $m \neq 1$ c) $m \neq -3$; **66.** a) (1,3), b) (2,3), c) (4,2),(2,4), d) (2,1), e) (3,1), f) (4,2), g) (100,10),(10,100), h) (8,4), i) (50,200); **67.** a) (30º, 30º),(150º, 150º), b) (60º, 30º),(120º, 330º), c) (30º, 30º),(150º, 150º), d) (90º, 30º),(30º, 40º), e)(60º, 30º), f) (30º, 90º); **68.** (b); **69.** hijo 28 y padre 21 días; **70.** 15Ω, 10Ω; **72.** a) $x=15$, $y=10$; **73.** (b); **74.**(c); **76.** (e); **78.** (e); **80.** (e); **81.** (c).

6 Capítulo seis

1. (a); **2.** (b); **3.** (b); **4.** (a); **5.** $x=1$, $y=1$; **6.** (i) $x=7$, $y=2$; (ii) $x=0$, $y=2$, (iii) $x=2$, $y=3$; **7.** $16i$; **8.** $m=-7$, $n=1$; **9.** (c); **10.** 2,–8; **11.** –1, $3\pm2i$; **13.** a) $\frac{1}{2}(93-i)$, b) $0-4i$, c) $-4+0i$, d) $\frac{1}{2}(3-i)$, e) $8+0i$; **14.** a) $x=2+i$, $y=1+3i$, b) $x=\frac{1}{5}(3+11i)$, $y=1+i$; **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -2-i & 1 \\ -2 & 5+2i & -2+2i \\ 1 & -2-i & 1-i \end{pmatrix}$; **16.** a)$i$; b) $-i$;

17. a) $-9-13i$, b) $58-69i$, c) $1+i$, d) $-5+5i$, e) $-142-65i$; **19.** $-5-12i$; **20.** $\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}$; **21.** a) $2cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, b) $3\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, c) $2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$; **24.** (c); **25.** (a); **27.** a)$4cis(\pi)$, b) $\frac{1}{27}cis\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$; **28.** $-2+2i$; **30.** (i) $-2+2i$, (ii) $-1-i$; **31.** a) $1,-1,0$, b) $e, \frac{e\sqrt{3}}{2}, -\frac{e}{2}$, c) $e, e\,cos(1), e\,sen(1)$; **32.** (e); **33.** -1; **34.** a) $-1+0i$, b) $2+0i$, c) $0+0i$, d) $0+i\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})+i\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$; **35.** a) $2cis\left(\frac{\pi}{8}\right)$, b) $e^2cis(1)$, c) $2e\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$; d) $cis(ln8)$, e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, f) $5cis(ln5)$, g) $10[cos(ln10)-isen(ln10)]$; **37.** (i) -16, (ii) $9cis(\pi)$, (iii) $\frac{1}{16}cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$; **39.** $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $-2i$, $\sqrt{3}-i$; **42.** a) $3\pm2i$, b) $\frac{1}{4}(-5\pm i\sqrt{23})$, c) $2+i, i$, d) $-2, 1\pm i$, e) $1-i, 2+i$, f) $2, \frac{1}{2}(-5\pm i\sqrt{3})$; **44.** $x^2+y^2>5$; **45.** $(-3,-2)\cup(0,1)$; **46.** $\left[a+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)b\right]\left[a+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)b\right]$.

7 Capítulo siete

2. $16/5u$; **3.** (a); **4.** cateto $=9\sqrt{2}/2$ pies; **5.** $10\sqrt{3}m$; **6.** 48.59^{o}; **7.** lado diferente $=15cm$; **8.** lado diferente $=4.67cm$; **9.** $53.34m$; **10.** (b); **11.** (e); **12.** (d); **13.** 15; **14.** a) $70m$; b) $arcsen(0.7)$; **15.** b) $5\sqrt{3}/4cos(40^{o})$; **17.** (b); **18.** $36cm$; **19.** 9; **20.** $20\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+\sqrt{6})/3$; **21.** 31° y 59°; **22.** $5cm$; **23.** $48{,}2^{o}$; **24.** $(4-2\sqrt{3})m$; **25.** $25\sqrt{3}/4cm^2$; **26.** $2\sqrt{15}cm, 6\sqrt{15}cm$; **27.** 5 y $20m$; **28.** (d); **29.** $2\sqrt{3}u^2$; **30.** (b); **31.** $1/4u^2, (2-\sqrt{3})u$; **32.** $2hb/(2h+b)$; **33.** 12; **34.** 6.25%; **35.** $80/9u^2$; **36.** F; **37.** F; **38.** F; **39.** 4; **40.** $arccos(0.78)$; **41.** F; **42.** $\sqrt{24}cm$; **43.** $(105.29+37.71\pi)cm$; **44.** $25\sqrt{3}/2cm^2$; **45.** $25(4\pi-3\sqrt{3})/12$; **46.** $16cm^2$; **47.** 4; **48.** V; **49.** V; **50.** (b); **51.** (a); **52.** (c); **53.** $(24+2\pi)/3cm$; **54.** $48\sqrt{3}cm^2$; **55.** $8cm$.

8 Capítulo ocho

5. $arccos(\sqrt{2/3})$; **9.** $1.83m^3$; **10.** $21\sqrt{135}m^3$; **11.** $1512cm^3$; **12.** (c); **13.** (b); **14.** $10cm$; **15.** $\sqrt[3]{407}cm$; **16.** (a); **17.** V; **18.** F; **19.** (b); **20.** (a); **21.** (c); **22.** (a); **23.** (c); **24.** (a); **25.** (b); **26.** (d); **27.** $4\pi a^3/3$; **28.** (d); **29.** (b); **30.** F; **31.** (a); **32.** $3.45cm$, $105.7cm^2$; **33.** $2.26cm$, $459.93cm^2$

9 Capítulo nueve

1. a) $(1, 3)$, b) $(13,-5)$, c) $(3, 3)$, d) $(0, 3)$, e) $(-9, 0)$, f) $(2, 3, 2)$, g) $(1,2,-3)$, h) $(0,-1, 0)$, i) $(0, 0, 0)$, j) $(-8, -1, 2)$; **2.** a) $-2, -8$; b) $-1, 1$; c) $a,b\in\mathbb{R}$; d)$\varnothing$; **3.** a) $3, -6, -1$; b) $0, 3/4, 1/4$; c) $-4, 1, 38$; d) $-2, -1, -1/2$; **4.** a) $(7,-3,7)$; b) $(1, -6, -2)$; c) $(-45, 42, 21)$; d) $(1,-6,-1)$; e) $(29/7, -30/7, -13/7)$; **5.** Sí; **6.** V; **7.** V; **8.** a) -4; b)$\varnothing$; **9.** a) $arccos(-10/3\sqrt{66})$; b) $arccos(22/3\sqrt{108})$; c) $arccos(-22/3\sqrt{108})$; d) $arccos\,(\sqrt{2}/2)$; e) $\pi/2$; **10.** V; **11.** a) $5/8$; b)$-2\pm\sqrt{3}$; **12.** F; **13.** (b); **14.** $\|\mathbf{V_1}\|^2/\|\mathbf{V_2}\|^2$; **15.** F; **16.** F; **17.** F; **18.** F; **19.** a)$(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$; b)$(-\sqrt{10}/10, 3\sqrt{10}/10)$; c) $(1,0)$; d) $(0,-1)$; e) $(2\sqrt{5}/5, 0, \sqrt{5}/5)$; f) $(0,-10\sqrt{101}/101, \sqrt{101}/101)$; g)$\varnothing$; h) $(0,-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$; **20.** a) $7\sqrt{26}/26$, $(35/26, -7/26)$; b) -3,

(−3,0); c) 8, (0, 8); d) $2\sqrt{26}/26$, (0, 5/13, −1/13); e) $\sqrt{5}$, (1, 0, 2); f) $31\sqrt{29}/29$, (124/29,−93/29, 62/29); **21.** F; **22.**V; **23.** V; **24.** (c); **25.** (e); **26.** a) (−1, −3, 11); b) (3, 0, 6); c) (0, 0, 0); d) (0,1,0); e)(0, 0, 1); **27.** V; **29.** (b); **30.** $-\sqrt{77}/77(4, 5, 6)$; **31.** (d); **32.** a) $\sqrt{299}$; b) $\sqrt{3\,954}$; c) $\sqrt{245}$; **33.** a) $\sqrt{257}/2$; b) $\sqrt{42}$; c) $\sqrt{3}/2$; **34.** a) 8; b) 2; c)8; **35.**F; **36.** $40a^3$; **37.** $\sqrt{117}/117$

10 Capítulo diez

1. a) $\sqrt{10}$, (−1/2, 5/2); b) $\sqrt{5}$, (1/2,4); c) $\sqrt{26}$, (−5/2, 3/2); d) 1, (5/2,4); e)3, (−11/2, 6); f) $|a|$, $\left(\frac{3}{2}a,1\right)$; g) $\sqrt{17}|a|$, $(3a,5a/2)$; **2.** a) $2x-y+7=0$; $y=2x+7$; $x=t$, $y=7+2t$; b) $5x-2y-10=0$; $y=5x/2-5$; $x=t$, $y=-5+5t/2$; c) $y=1$; d) $y=4$; e) $x=-4$; **3.** $9x-y-6=0$; **4.** a) $y=6$; b) $x=0$; c) $3x-2y+12=0$; d) $x+2y-12=0$; **5.** a)F; b)V; c)V; d)V; e)V; **6.** $x=-1/2$; **7.** $2x+y-9=0$; **8.** $y-2x=0$; **9.** $x+2y+7=0$; **10.** (b); **11.**(a); **12.** (d); **13.** (c); **14.** (c); **15.** (c); **16.** (a); **17.** $y=-7800x+80000$; **18.** (b); **19.**28/5; **20.**(c); **21.**$2x+4y-5=0$; **22.** 9/5; **23.** $2x+y+1-4\sqrt{5}=0$, $2x+y+1+4\sqrt{5}=0$; **24.** ±8; **25.** ∅, ∅, (4, ∞); **26.** (d); **27.** $r=4$, $(x-1)^2+(y+2)^2=16$; **28.** (c); **29.** $2x+y-7=0$; **30.** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$; **31.** (c); **32.** $(x-4)^2+(y-1)^2=100/13$; **33.** $x^2+y^2-6x+2y=0$; **34.** $y=-x+2\sqrt{2}$; **35.** $x+y-2=0$; **36.** 2; **37.** $(x-2)^2=8(y-1)$, $x^2-4x-8y+12=0$; **38.** $x^2-2x-8y+1=0$; **39.** (b); **40.** (1, −17/8); **41.** (c); **42.** (0,−1), (−2,1); ∅; (0,−1),(−1,0) **43.** C: $x^2+y^2+6x-2y+1=0$, P: $y^2-x-2y-2=0$; **44.** $x^2+4y^2-4x-16y+16=0$; **45.** (c); **46.** (b); **48.** (b); **49.** $9x^2+8y^2-36x+18y+45=0$; **50.** $x^2-3y^2-4x-10y+1=0$

11 Capítulo once

7. a) {1,2,3,4,5,6,2,4,6,8,10,12,3,6,9,12,15,18,4,8,12,16,20,24,5,10,15,20,25,30,6,12, 18,24,30,36}; b) 0.11; c) 0.47; **8.** a) {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5)}; b) 0.52; **9.** a) {sss, ssn, sns, snn, nss, nsn, nns, nnn}; b) 0.875; c) 0.125; **10.** a) {ssss, sssn, ssns, ssnn, snss, snsn, snns, snnn, nsss, nssn, nsns, nsnn, nnss, nnsn, nnns, nnnn}; b)0.3125; c)0.6875; **12.** 0.15; **13.** a)0.34; b)0.01; c)0.09; **14.** a) 0.1; b) 0.375; c) 0.25; **15.** a) 0.58; b) 0.57; c) 0.43; **16.** 0.35; **17.** a) 0.18; b) 0.15; **18.** a) 0.5; b)0.5; **19.** a) 0.525; b) 0.724; **20.** 0.017

Glosario de términos

Álgebra: Rama de las matemáticas que tiene por objeto de estudio la generalización del cálculo aritmético mediante expresiones compuestas de constantes (números) y variables (letras).

Axioma: Proposición o enunciado que se considera evidente y no requiere demostración.

Azar: Es un tratamiento adecuado de la aleatoriedad, que a su vez es dependiente de algún suceso fortuito.

Bosquejo: Traza primera y no definitiva de una obra pictórica, y, en general, de cualquier producción del ingenio.

Certeza: Seguridad en el conocimiento; adhesión firme del sujeto al contenido de un enunciado.

Concepto: Es el elemento básico del pensamiento. Puede expresarse mediante palabras y otorgarle o no algún tipo de valor. Será un concepto real conforme ese valor que se le ha otorgado demuestre potencial para afectar a algo o alguien. Su estudio promueve el conocimiento humano.

Corolario: Una afirmación que sigue inmediatamente a un teorema. Una proposición B es un corolario de una proposición o teorema A si B puede ser deducida sencillamente de A.

Cota: Valor límite.

Criterio: Norma para conocer la verdad, juicio o discernimiento.

Dato: Es una representación simbólica (numérica, alfabética, etc.) de un atributo o característica de una entidad. El dato no tiene valor semántico (sentido) en sí mismo, pero, convenientemente tratado (procesado), se puede utilizar en la realización de cálculos o toma de decisiones.

Enunciado: Es la expresión lingüística de una proposición. Se trata de una oración que afirma o niega algo, y que, en lógica sólo puede ser verdadera o falsa. Los argumentos lógicos se estructuran a partir de enunciados: premisas y conclusión.

Equidistar: Dicho de un punto, de una línea, de un plano o de un sólido, cuando se halla a igual distancia de otro determinado.

Espacio: Es un conjunto, usualmente con alguna estructura adicional. Ejemplos: espacio euclídeo, espacio vectorial, espacio topológico, espacio uniforme, espacio métrico.

Estadística: Rama de las matemáticas que se utiliza para describir, analizar e interpretar fenómenos donde interviene el azar, y que permite a otras ciencias generar modelos matemáticos empíricos donde se considera el componente aleatorio.

Fracción: Es un número racional escrito como un entero (el numerador) dividido por un entero no nulo (el denominador).

Grado: En trigonometría, se considera a la unidad de medida angular y se representa con el símbolo º, en este texto se considera la escala sexagesimal. En las funciones polinomiales, se denomina así al mayor exponente que tiene alguna de sus incógnitas.

Gráfica de una función: Esquema de representación de una función de variable real, de tal manera que facilite el análisis de sus características.

Hipótesis: Una afirmación matemática que se cree verdadera, pero no ha sido demostrada. También se denomina conjetura. Por ejemplo: la conjetura de Goldbach o la hipótesis de Riemann.

Lema: Es una afirmación que forma parte de un teorema más elaborado. Por supuesto, la distinción entre teoremas y lemas es arbitraria. El lema de Gauss y el lema de Zorn, por ejemplo, son considerados demasiado importantes para algunos autores.

Lenguaje de programación: En informática, es cualquier forma de escritura que posee determinadas instrucciones que, combinadas y modificadas correctamente, podrán ser interpretadas y así resultar en un programa, página web, etc.

Longitud: Del latín *longitudo*, constituye la distancia existente entre dos puntos. En el Sistema Internacional de Unidades se mide en metros.

Lugar geométrico: Conjunto de puntos, en el plano o en el espacio, que poseen una propiedad común. Los mismos suelen formar una figura.

Matemáticas: En español se usa comúnmente en plural para referirse al estudio y ciencia. Del griego μάθημα (*máthema*): ciencia, conocimiento,

aprendizaje; μαθηματικός (*matemáticos*): amante del conocimiento. Es el estudio de patrones en las estructuras de entes abstractos y en las relaciones entre ellas. Algunos matemáticos se refieren a ella como la «Reina de las Ciencias».

Nexo: Cualquier elemento que sirve para unir a otros dos.

Número: Es un símbolo que representa de manera abstracta una cantidad. Noción fundamental de las matemáticas que permite contar, clasificar los objetos o medir magnitudes, pero que no puede ser objeto de definición rigurosa.

Probabilidad: Teoría desarrollada para describir los sucesos aleatorios. Es la característica de un suceso del que existen razones para creer que se realizará.

Postulado: Proposición que, sin ser evidente, se admite como cierta sin demostración.

Recursivo: Proceso, función o rutina que se ejecuta repetidas veces basado en su propia definición, hasta que se satisface una condición específica.

Similitud: Similaridad en apariencia, carácter o naturaleza entre personas y cosas.

Sistema de numeración: Es un conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números válidos en él.

Teorema: Es una afirmación que puede ser demostrada como verdadera dentro de un marco lógico. En matemáticas, una afirmación debe ser interesante o importante para ser considerada un teorema.

Variable: Es un elemento de una fórmula, proposición o algoritmo que puede adquirir o ser sustituido por un valor cualquiera. Los valores que una variable es capaz de recibir pueden estar definidos dentro de un rango. En muchos usos, lo contrario de una variable es una constante.

Bibliografía

MATEMÁTICAS BÁSICAS, Escuela Superior Politécnica del Litoral – Instituto de Ciencias Matemáticas, febrero de 2006.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA SIMBÓLICA, Karl J. Smith. Grupo Editorial Iberoamérica, 1991.

PRECÁLCULO, Sullivan Michael, Prentice-Hall Inc., A Simon & Schuster Company. Cuarta Edición. México, 1997.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS, Juan Manuel Silva, Adriana Lazo. Editorial Limusa, Quinta Edición.

MANUAL DE PREPARACIÓN MATEMÁTICA, Óscar Tapi, Miguel Ormazábal, Jorge Olivares y David López. Ediciones Universidad Católica de Chile. Segunda Edición, 2003.

ÁLGEBRA MATRICIAL Y LINEAL, Carbo Carre Ramón y Domingo Pascual Lloren. Serie Schaum

ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES, Torregrosa Sánchez Juan Ramón y Jordán Lluch Cristina. McGraw-Hill, S.A. Segunda Edición. México, 1987.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA, Noble Ben y Daniel James W. Prentice-Hall Hispanoamerica S.A. Tercera Edición. México, 1989.

ÁLGEBRA, Ximena Carreño Campos y Ximena Cruz Schmidt. Publicaciones Cultural, Primera Edición, 2003.

MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA, Ernest Haeussler, Richard Paul, Pearson Prentice Hall, 2003.

GEOMETRÍA, Addison Wesley Longman, Pearson Educación Latinoamericana, México, 1ra. Edición, 1998.

http://es.wikipedia.org, actualizado a octubre de 2005 y consultado a octubre de 2005.

http://www.sidweb.espol.edu.ec/prepo001001.nsf, actualizado a octubre de 2005 y consultado a octubre de 2005.

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/aula.htm, actualizado al 30 de agosto de 2001 y consultado a octubre de 2005.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html, actualizado a octubre de 1998 y consultado a octubre de 2005.

http://www.philosophypages.com/ph/desc.htm, actualizado a agosto de 2002 y consultado a noviembre de 2005.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Napier.html, actualizado a abril de 1998 y consultado a noviembre de 2005.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cayley.html, actualizado a diciembre de 1996 y consultado a noviembre de 2005.

http://www.astrocosmo.cl/biografi/b-n_copernico.htm, actualizado a 31 de octubre de 2002 y consultado a noviembre de 2005.

http://www.diccionarios.com, actualizado a octubre de 2005 y consultado a noviembre de 2005.

APUNTES DE ESTADÍSTICA, David Ruiz Muñoz y Ana María Sánchez Sánchez, **http://www.eumed.net/libros/2006a/rmss/00.htm,** consultado a noviembre de 2005.